

复合材料层合板壳理论探索

刘人怀摇著



暨南大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

复合材料层合板壳理论探索 刘人怀著

—广州：暨南大学出版社，2009

ISBN 7-5487-0911-1

I. ①刘... II. ①刘... III. ①复合材料—壳体—理论研究 IV. ①O342.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 153670 号

出版发行：暨南大学出版社

地址：中国广州暨南大学

电话：总编室 (020) 85385000 发行部 (020) 85385001

营销部 (020) 85385002 邮购部 (020) 85385003

传真：(020) 85385004 (办公室) 85385005 (营销部)

邮码：510632

网址：<http://www.jnu.edu.cn> <http://press.jnu.edu.cn>

排版：广州市星辰文化发展部

印刷：佛山市浩文彩色印刷有限公司

开本：787mm×1092mm 1/16

印张：10

字数：200千字

版次：2009年 1月第 1版

印次：2009年 1月第 1次

定价：20.00元

(暨大版图书如有印装质量问题，请与出版社总编室联系调换)

内 容 提 要

本书收集了将薄板壳非线性力学理论用于精密仪器仪表、传感器弹性元件设计的论文共 100 篇，分别涉及波纹膜片、跳跃膜片、波纹管、波纹壳和圆形光滑膜片的非线性弯曲、非线性稳定和非线性振动等问题，系统、全面地展示了作者在板壳非线性问题上的独特方法及其在工程设计中的重大应用，其公式可直接用于工程设计。

本书对于精密仪器仪表、传感器以及航空、航天、航海、土木、机械、石油化工等工程的设计师和工程师来说，是实用的设计制造指导书；同时，本书可作为大学和研究所的力学、精密仪表与传感器等专业教师、研究人员和研究生的教学、科研和参考用书。

目 录

第一章 复合材料层合矩形板	员
摇 设计及高阶影响的复合材料层合矩形板非线性弯曲的简化理论 ...	猿
摇 一种考虑层间位移和横向剪应力连续条件的层合板理论	远
摇 具有随厚度变化膨胀特征应变的弹性层的分析	愿
摇 四边简支对称正交层合矩形板的非线性弯曲问题	源
第二章 复合材料层合圆形板	缘
摇 层合圆薄板的轴对称弯曲问题	缘
摇 直线型正交异性层合圆板的大挠度问题	远
摇 剪切变形对直线型正交异性层合圆板大幅度受迫振动的影响 ...	缘
摇 研究正交各向异性圆板非线性振动问题的新方法	愿
第三章 复合材料层合椭圆形板	怨
摇 考虑横向剪切的对称层合直线型正交异性椭圆板	
摇 的大挠度弯曲	怨
第四章 复合材料面层夹层板	员
摇 复合材料面层夹层板中转动一致有效理论	怨
摇 正交复合材料面层夹层板非线性理论及应用	员
第五章 复合材料层合扁球壳	员
摇 对称圆柱正交异性层合扁球壳的非线性稳定问题	员
摇 考虑横向剪切的对称层合圆柱正交异性扁球壳的非线性稳定问题	员
摇 对称层合圆柱正交异性扁球壳的非线性动态屈曲	员
摇 复合材料层合扁球壳的非线性强迫振动	员
第六章 复合材料层合开顶扁球壳	员
摇 考虑剪切影响的对称层合圆柱正交异性开顶扁球壳在均布	

压力作用下的非线性屈曲	苑
考虑横向剪切的对称层合圆柱正交异性中心	
开孔扁球壳的非线性屈曲	源
复合材料层合开顶扁球壳的非线性动态屈曲	源
阻尼对层合复合材料中心开孔扁球壳非线性振动的影响 ...	源
第七章 复合材料层合扁锥壳	怨
复合材料层合扁锥壳的非线性稳定问题	源
考虑剪切影响的对称层合圆柱正交异性扁锥壳	
的非线性屈曲	怨
第八章 复合材料面层夹层壳	猿
考虑横向剪应力连续的复合材料面层夹层壳非线性	
一致有效理论	猿
考虑层间应力连续条件的夹层扁壳的非线性屈曲	猿
复合材料面层夹层扁壳非线性精化理论及应用	猿
第九章 复合材料的性质	猿
含非均匀界面相碳纤维复合材料等效热传导性质的研究 ...	猿
球面各向同性颗粒复合材料膨胀系数的界限	猿
空心球复合材料热弹性性质的一些精确结果	猿

第一章

复合材料层合矩形板

题录

计及高阶影响的复合材料层合矩形板 非线性弯曲的简化理论^{* 1}

一、引 言

近年来,复合材料层合结构的几何非线性问题已引起更多关注。在薄板理论假设下,一些研究人员已经研究了各向异性层合板的非线性力学特性,并得到包含一些典型问题分析在内的许多乐观的结果^[1-5]。由于薄板理论假设忽略了横向剪切变形的影响,因此这些结果仅能适用于非常薄的板。

众所周知,对于纤维加固的复合材料层合板,面内弹性模量与横向剪切模量的比值相对说来较大,因此就须考虑横向剪切变形的影响。考虑到这个事实,就需要建立一个能够计及横向变形的理论。1972年,何陵辉^[6]基于三维弹性理论,系统地提出了非均匀的各向异性板的一般理论。这个理论包含了横向剪切和法向应变、加速度以及温度场。随后,宰恩和艾德^[7]研究了在薄板近似下层合各向异性板的非线性振动问题。薄板近似的限制是仅能用于带有面内不可移动边界条件的板。应用有限元法,何陵辉^[8]和艾德^[9]等人研究了层合板的非线性问题,如弯曲、自由振动和瞬变响应。此外,艾德^[10]和贾春元^[11]基于薄板理论原理创立了一个精确理论,并应用迦辽金步骤和谐波平衡原理研究了层合矩形板的非线性振动问题。然而,薄板理论型板理论不能满足在板的上、下表面横向剪切应力为零的条件,而且三维理论用于分析实际问题相当难于操作。因此,提出一个不仅精确而且也较简单的简化

* 陈鹤翔教授首先提出该课题,何陵辉教授负责理论推导,陈鹤翔教授负责论文编辑。原文英文。合作者:何陵辉

理论是十分必要的。

在本文中,应用虚位移原理,系统地提出了一个计及高阶影响的复合材料层合板的非线性弯曲问题的简化理论。通过引入由关于线性问题的研究成果^[10]所得的位移场,本文理论说明了横向剪切应变在厚度上的抛物线变化的原因,以至于在计算剪切应力时就不需要应用剪切修正因子。再者,因为板的总挠度可分解为一个由弯曲而产生的挠度和一个由剪切而产生的挠度,所以本文理论控制方程的解将变得较简单。此外,在均匀横向载荷作用下对称正交层合板的非线性弯曲问题被作为一个特殊情况进行研究。本文所得到的结果与由三维理论^[10]所得的结果相当一致。

二、控制方程和边界条件

考虑一个在 x 方向等厚度为 h , 在 y 方向长度为 b , 在 z 方向宽度为 $2b$ 的层合矩形板。参考面 $z=0$ 被放置在未变形的中面上, 而且假定板的两个邻边分别与 y 轴和 z 轴重合。这个板由有限个均匀正交各向异性层完全粘合在一起而构成。每一层有任意的厚度和弹性性质, 而且正交各向异性轴的方向与板的轴相关。在横向载荷 $p(x, y)$ 作用下, 假定板的位移场类似于文献^[10], 则有

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z^2 u_2(x, y) + z^4 u_4(x, y), \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z^2 v_2(x, y) + z^4 v_4(x, y), \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + z^2 w_2(x, y) + z^4 w_4(x, y). \end{aligned} \quad (1)$$

其中 u_0, v_0, w_0 分别是一个点在 y, z 和 x 方向的位移分量, u_2, v_2, w_2 是 u_0, v_0, w_0 在中面上的值, u_4, v_4, w_4 分别是板由弯曲和剪切所产生的挠度, 应用以下横向剪切应力 σ_{xz} 和 σ_{yz} 在板的上、下表面为零的条件

$$\sigma_{xz}(x, y, \pm h) = \sigma_{yz}(x, y, \pm h) = 0 \quad (2)$$

可确定未知函数 $u_2, v_2, w_2, u_4, v_4, w_4$ 。

对于正交各向异性板或者由正交各向异性面层所层合的板, 条件 (2) 等效于相应的应变 ϵ_{xz} 和 ϵ_{yz} 在这些曲面上为零的条件

$$\epsilon_{xz}(x, y, \pm h) = \epsilon_{yz}(x, y, \pm h) = 0 \quad (3)$$

由于

$$\begin{aligned} \epsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} = 2z u_2 + 4z^3 u_4, \\ \epsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} = 2z v_2 + 4z^3 v_4, \end{aligned} \quad (4)$$

于是便可由条件 (3) 得到

と曾 越と贈 越園揺と 曾 源憎 揺と 贈 源憎 (國縁贈)

这样一来, 相应于式(10.1.1)的冯·卡门意义上的应变分量可写为

$\varepsilon_{\text{曾}}$ 越^源_園 原^源_園 增^源_園 原^源_園 增^源_園 猿^源_園 增^源_園 ,
 $\varepsilon_{\text{贈}}$ 越^源_園 原^源_園 增^源_園 原^源_園 增^源_園 猿^源_園 增^源_園 ,
 $\varepsilon_{\text{扎}}$ 越^源_園 原^源_園 增^源_園 原^源_園 增^源_園 猿^源_園 增^源_園 ,
 $\varepsilon_{\text{贈}}$ 越^源_園 原^源_園 增^源_園 原^源_園 增^源_園 猿^源_園 增^源_園 ,
 $\varepsilon_{\text{揸}}$ 越^源_園 (員^源_園 原^源_園 增^源_園) 猿^源_園 增^源_園 ,
 $\varepsilon_{\text{揸}}$ 越^源_園 (員^源_園 原^源_園 增^源_園) 猿^源_園 增^源_園

其中 $\varepsilon_{\text{普}}^{\text{园}}$ 、 $\varepsilon_{\text{赠}}^{\text{园}}$ 和 $\varepsilon_{\text{赠}}^{\text{园}}$ 是中面上的应变

$\varepsilon_{\text{曾}} \text{越}^{\text{園}} \text{怎}^{\text{園}} \text{垣}^{\text{園}} \text{憎}^{\text{園}} \text{曾},$
 $\varepsilon_{\text{贈}} \text{越}^{\text{園}} \text{增}^{\text{園}} \text{垣}^{\text{園}} \text{憎}^{\text{園}} \text{贈},$
 $\varepsilon_{\text{贈}} \text{越}^{\text{園}} \text{怎}^{\text{園}} \text{垣}^{\text{園}} \text{增}^{\text{園}} \text{垣}^{\text{園}} \text{憎}^{\text{園}} \text{贈}$

并且满足以下关系

$\varepsilon_{\text{普}}^{\text{园}} \text{垣} \varepsilon_{\text{贖}}^{\text{园}} \text{原} \varepsilon_{\text{鑄}}^{\text{园}} \text{越} \text{憎}^{\text{園}} \text{原} \text{憎}^{\text{園}} \text{憎}^{\text{園}}$ (園愿)

现在，假定 噪层的本构方程可表示为

$\left. \begin{array}{l} \sigma \text{ (喝曾)} \\ \sigma \text{ (喝贈)} \\ \sigma \text{ (喝攢)} \\ \sigma \text{ (喝揸)} \\ \sigma \text{ (喝鑽)} \end{array} \right\} \text{越} \left[\begin{array}{ccccc} \text{悦}^{\text{喝}} & \text{悦}^{\text{喝}} & \text{园} & \text{园} & \text{悦}^{\text{喝}} \\ \text{悦}^{\text{喝}} & \text{悦}^{\text{喝}} & \text{园} & \text{园} & \text{悦}^{\text{喝}} \\ \text{园} & \text{园} & \text{悦}^{\text{喝}} & \text{悦}^{\text{喝}} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{悦}^{\text{喝}} & \text{悦}^{\text{喝}} & \text{园} \\ \text{悦}^{\text{喝}} & \text{悦}^{\text{喝}} & \text{园} & \text{园} & \text{悦}^{\text{喝}} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \varepsilon \text{ 曾} \\ \varepsilon \text{ 贈} \\ \varepsilon \text{ 攢} \\ \varepsilon \text{ 揸} \\ \varepsilon \text{ 鑽} \end{array} \right\} \quad (\text{鹽恩})$

其中 Δ_{ij} 是该层的矩阵刚度系数, 可由该层的工程常数转化而来(参见文献[10])。

定义内力和弯矩为

(晕_首晕_赠晕_赠)越^{漢圖}_{原漢圖}(σ_首σ_贈σ_贈)𪛗_𪛗

(酝_首酝_赠酝_赠)越^{漢圖}_{原漢圖}(σ_首σ_贈σ_贈)𪛗_𪛗

(孕_首孕_赠孕_赠)越^{漢圖}_{原漢圖}(σ_首σ_贈σ_贈)𪛗_𪛗

$$\begin{aligned} & \left(\begin{smallmatrix} \text{匠} \\ \text{曾} \end{smallmatrix} \text{匠} \right) \text{越} \int_{\text{源園}}^{\text{源園}} \left(\sigma_{\text{擻}}^{(\text{喝})} \sigma_{\text{擻}}^{(\text{喝})} \right) \text{凿} \text{L} \\ & \left(\begin{smallmatrix} \text{砸} \\ \text{曾} \end{smallmatrix} \text{砸} \right) \text{越} \int_{\text{原樂園}}^{\text{源園}} \left(\sigma_{\text{擻}}^{(\text{喝})} \sigma_{\text{擻}}^{(\text{喝})} \right) \text{擻} \text{凿} \text{L} \end{aligned}$$

(園院擻擻)

将式(園院)代入式(園院擻擻), 可得如下公式

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{smallmatrix} \varepsilon \\ \text{酝} \\ \text{孕} \end{smallmatrix} \right\}^{\text{園}} \text{越} \begin{bmatrix} \left[\text{粤} \right] & \left[\text{月} \right] & \left[\text{耘} \right] \\ \left[\text{月} \right]^{\text{栽}} & \left[\text{阅} \right] & \left[\text{云} \right] \\ \left[\text{耘} \right]^{\text{栽}} & \left[\text{云} \right]^{\text{栽}} & \left[\text{匀} \right] \end{bmatrix} \left\{ \begin{smallmatrix} \text{晕} \\ \text{运} \\ \text{运} \end{smallmatrix} \right\}^{\text{擻}}, \\ & \left\{ \begin{smallmatrix} \text{匠} \\ \text{匠} \end{smallmatrix} \right\} \text{越} \begin{bmatrix} \text{粤}^{\text{源}} \text{原}^{\text{源}} \text{阅}^{\text{源}} \text{摇}^{\text{源}} \text{粤}^{\text{源}} \text{原}^{\text{源}} \text{阅}^{\text{源}} \\ \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \\ \text{粤}^{\text{擻}} \text{原}^{\text{擻}} \text{源}^{\text{擻}} \text{阅}^{\text{擻}} \text{摇}^{\text{擻}} \text{粤}^{\text{擻}} \text{原}^{\text{擻}} \text{源}^{\text{擻}} \text{阅}^{\text{擻}} \\ \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \end{bmatrix} \left\{ \begin{smallmatrix} \text{憎} \\ \text{憎} \end{smallmatrix} \right\}^{\text{擻}}, \\ & \left\{ \begin{smallmatrix} \text{砸} \\ \text{砸} \end{smallmatrix} \right\} \text{越} \begin{bmatrix} \text{阅}^{\text{源}} \text{原}^{\text{源}} \text{云}^{\text{源}} \text{摇}^{\text{源}} \text{阅}^{\text{源}} \text{原}^{\text{源}} \text{源}^{\text{源}} \text{云}^{\text{源}} \\ \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \\ \text{阅}^{\text{擻}} \text{原}^{\text{擻}} \text{云}^{\text{擻}} \text{摇}^{\text{擻}} \text{阅}^{\text{擻}} \text{原}^{\text{擻}} \text{源}^{\text{擻}} \text{云}^{\text{擻}} \\ \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \text{擻}^{\text{擻}} \end{bmatrix} \left\{ \begin{smallmatrix} \text{憎} \\ \text{憎} \end{smallmatrix} \right\}^{\text{擻}} \end{aligned}$$

(園院擻擻)

其中

$$\begin{aligned} & \left\{ \varepsilon \right\}^{\text{園}} \text{越} \left\{ \begin{smallmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{smallmatrix} \right\}^{\text{園擻擻}} \text{摇} \left\{ \text{酝} \right\} \text{越} \left\{ \begin{smallmatrix} \text{酝} \\ \text{酝} \\ \text{酝} \end{smallmatrix} \right\}^{\text{擻擻}} \text{摇} \left\{ \text{孕} \right\} \text{越} \left\{ \begin{smallmatrix} \text{孕} \\ \text{孕} \\ \text{孕} \end{smallmatrix} \right\}^{\text{擻擻}}, \\ & \left\{ \text{晕} \right\} \text{越} \left\{ \begin{smallmatrix} \text{晕} \\ \text{晕} \\ \text{晕} \end{smallmatrix} \right\}^{\text{擻擻}} \text{摇} \left\{ \text{运} \right\} \text{越} \left\{ \begin{smallmatrix} \text{憎} \\ \text{憎} \\ \text{圆} \end{smallmatrix} \right\}^{\text{擻擻}} \text{摇} \left\{ \text{运} \right\} \text{越} \left\{ \begin{smallmatrix} \text{憎} \\ \text{憎} \\ \text{圆} \end{smallmatrix} \right\}^{\text{擻擻}} \text{源}^{\text{擻擻}} \text{擻}^{\text{擻擻}}, \\ & \left[\text{粤} \right] \text{越} \begin{bmatrix} \text{粤}^{\text{擻}} \text{粤}^{\text{擻}} \text{粤}^{\text{擻}} \\ \text{粤}^{\text{擻}} \text{粤}^{\text{擻}} \text{粤}^{\text{擻}} \\ \text{粤}^{\text{擻}} \text{粤}^{\text{擻}} \text{粤}^{\text{擻}} \end{bmatrix}^{\text{擻擻擻擻擻}} \text{摇摇摇摇摇} \left[\text{月} \right] \text{越} \begin{bmatrix} \text{月}^{\text{擻}} \text{月}^{\text{擻}} \text{月}^{\text{擻}} \\ \text{月}^{\text{擻}} \text{月}^{\text{擻}} \text{月}^{\text{擻}} \\ \text{月}^{\text{擻}} \text{月}^{\text{擻}} \text{月}^{\text{擻}} \end{bmatrix}^{\text{擻擻擻擻擻}}, \\ & \left[\text{阅} \right] \text{越} \begin{bmatrix} \text{阅}^{\text{擻}} \text{阅}^{\text{擻}} \text{阅}^{\text{擻}} \\ \text{阅}^{\text{擻}} \text{阅}^{\text{擻}} \text{阅}^{\text{擻}} \\ \text{阅}^{\text{擻}} \text{阅}^{\text{擻}} \text{阅}^{\text{擻}} \end{bmatrix}^{\text{擻擻擻擻擻}}, \quad \left[\text{耘} \right] \text{越} \begin{bmatrix} \text{耘}^{\text{擻}} \text{耘}^{\text{擻}} \text{耘}^{\text{擻}} \\ \text{耘}^{\text{擻}} \text{耘}^{\text{擻}} \text{耘}^{\text{擻}} \\ \text{耘}^{\text{擻}} \text{耘}^{\text{擻}} \text{耘}^{\text{擻}} \end{bmatrix}^{\text{擻擻擻擻擻}}, \\ & \left[\text{云} \right] \text{越} \begin{bmatrix} \text{云}^{\text{擻}} \text{云}^{\text{擻}} \text{云}^{\text{擻}} \\ \text{云}^{\text{擻}} \text{云}^{\text{擻}} \text{云}^{\text{擻}} \\ \text{云}^{\text{擻}} \text{云}^{\text{擻}} \text{云}^{\text{擻}} \end{bmatrix}^{\text{擻擻擻擻擻}}, \quad \left[\text{匀} \right] \text{越} \begin{bmatrix} \text{匀}^{\text{擻}} \text{匀}^{\text{擻}} \text{匀}^{\text{擻}} \\ \text{匀}^{\text{擻}} \text{匀}^{\text{擻}} \text{匀}^{\text{擻}} \\ \text{匀}^{\text{擻}} \text{匀}^{\text{擻}} \text{匀}^{\text{擻}} \end{bmatrix}^{\text{擻擻擻擻擻}}, \\ & \left[\text{粤} \right] \text{越} \begin{bmatrix} \text{粤}^{\text{擻}} \text{粤}^{\text{擻}} \text{粤}^{\text{擻}} \\ \text{粤}^{\text{擻}} \text{粤}^{\text{擻}} \text{粤}^{\text{擻}} \\ \text{粤}^{\text{擻}} \text{粤}^{\text{擻}} \text{粤}^{\text{擻}} \end{bmatrix}^{\text{擻擻擻擻擻}}, \quad \left[\text{月} \right] \text{越} \begin{bmatrix} \text{月}^{\text{擻}} \text{月}^{\text{擻}} \text{月}^{\text{擻}} \\ \text{月}^{\text{擻}} \text{月}^{\text{擻}} \text{月}^{\text{擻}} \\ \text{月}^{\text{擻}} \text{月}^{\text{擻}} \text{月}^{\text{擻}} \end{bmatrix}^{\text{擻擻擻擻擻}}, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{酝} & \text{或} & \text{憎} \\
 \text{孕} & \text{或} & \text{憎} \\
 \text{酝} & \text{或} & \text{憎} \\
 \text{孕} & \text{或} & \text{憎}
 \end{array}$$

其中

$$\begin{aligned}
 & \text{匠} \frac{\partial \text{越}}{\partial \text{晕}} \frac{\partial \text{憎}}{\partial \text{曾}} \text{垣} \frac{\partial \text{憎}}{\partial \text{曾}} \frac{\partial \text{酝}}{\partial \text{曾}} \text{垣} \frac{\partial \text{酝}}{\partial \text{曾}}, \\
 & \text{匠} \frac{\partial \text{越}}{\partial \text{晕}} \frac{\partial \text{憎}}{\partial \text{曾}} \text{垣} \frac{\partial \text{憎}}{\partial \text{曾}} \frac{\partial \text{酝}}{\partial \text{曾}} \text{垣} \frac{\partial \text{酝}}{\partial \text{曾}}, \quad (\text{愿员缘韵}) \\
 & \text{匠} \frac{\partial \text{越}}{\partial \text{晕}} \frac{\partial \text{憎}}{\partial \text{曾}} \text{垣} \frac{\partial \text{憎}}{\partial \text{曾}} \frac{\partial \text{源}}{\partial \text{猿}} \frac{\partial \text{孕}}{\partial \text{猿}} \text{垣} \frac{\partial \text{源}}{\partial \text{猿}} \frac{\partial \text{孕}}{\partial \text{猿}} \text{垣} \frac{\partial \text{源}}{\partial \text{猿}} \frac{\partial \text{孕}}{\partial \text{猿}}, \\
 & \text{匠} \frac{\partial \text{越}}{\partial \text{晕}} \frac{\partial \text{憎}}{\partial \text{曾}} \text{垣} \frac{\partial \text{憎}}{\partial \text{曾}} \frac{\partial \text{源}}{\partial \text{猿}} \frac{\partial \text{孕}}{\partial \text{猿}} \text{垣} \frac{\partial \text{源}}{\partial \text{猿}} \frac{\partial \text{孕}}{\partial \text{猿}} \text{垣} \frac{\partial \text{源}}{\partial \text{猿}} \frac{\partial \text{孕}}{\partial \text{猿}}
 \end{aligned}$$

引入力函数 φ (曾赠 如下

$$\text{晕} \frac{\partial \varphi}{\partial \text{赠}} \text{摇} \frac{\partial \varphi}{\partial \text{晕}} \text{越} \frac{\partial \varphi}{\partial \text{曾}} \text{越} \frac{\partial \varphi}{\partial \text{源}}, \quad (\text{愿员远韵})$$

显然,在这种情况下,方程(愿员缘韵)便自动满足。将式(愿员缘韵)和(愿员远韵)代入式(愿员)和(愿员糟韵),则得本文所研究问题的关于 憎、憎和 φ 的控制方程如下

$$\begin{aligned}
 & \text{蕴}(\text{憎}) \text{垣} \text{蕴}(\text{憎}) \text{垣} \text{蕴}(\varphi) \text{越} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{蕴} \text{憎} \text{憎}, \\
 & \text{蕴}(\text{憎}) \text{垣} \text{蕴}(\text{憎}) \text{垣} \text{蕴}(\varphi) \text{越} \text{蕴} \varphi \text{憎} \text{原} \text{择}, \quad (\text{愿员糟韵}) \\
 & \text{蕴}(\text{憎}) \text{垣} \text{蕴}(\text{憎}) \text{垣} \text{蕴}(\varphi) \text{越} \text{蕴} \varphi \text{憎} \text{原} \text{择}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 & \text{蕴}(\text{ }) \text{越} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{圆}}, \\
 & \text{垣}(\text{月} \text{垣} \text{月} \text{原} \text{月}) \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{圆}}, \\
 & \text{垣}(\text{月} \text{原} \text{月}) \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{圆}}, \\
 & \text{蕴}(\text{ }) \text{越} \frac{\text{源}}{\text{猿}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{猿}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{猿}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{猿}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{猿}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{猿}}, \\
 & \text{垣}(\text{耘} \text{垣} \text{耘} \text{原} \text{耘}) \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{圆}}, \\
 & \text{垣}(\text{耘} \text{原} \text{耘}) \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{圆}}, \\
 & \text{蕴}(\text{ }) \text{越} \frac{\text{粤}}{\text{粤}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{粤}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{粤}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{粤}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{粤}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{粤}}, \\
 & \text{垣}(\text{粤} \text{垣} \text{粤} \text{垣} \text{粤}) \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{圆}}, \\
 & \text{原}(\text{粤} \text{垣} \text{粤}) \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{圆}}, \\
 & \text{蕴}(\text{ }) \text{越} \frac{\text{阅}}{\text{阅}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{阅}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{阅}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{阅}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{阅}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{阅}}, \\
 & \text{垣}(\text{阅} \text{垣} \text{阅} \text{垣} \text{阅}) \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{垣} \frac{\text{圆}}{\text{圆}} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{圆}},
 \end{aligned}$$

垣夙 阅 垣夙)() 垣夙)()
源
蕴() 越 源 [云() 垣(云 垣云)()
猿
垣(云 垣云 垣夙)()
垣夙 云 垣云)() 垣云() ,
蕴() 越 蕴() ,
蕴() 越 蕴() ,
蕴() 越 远 匀() 垣夙 匀 垣匀)()
怨
垣(匀 垣匀 垣夙)()
垣夙 匀 垣匀() 垣匀()]
垣(粤 原 愿 垣 垣 垣云)()
垣(粤 原 愿 垣 垣 垣云)()
垣(粤 原 愿 垣 垣 垣云)()
垣(粤 原 愿 垣 垣 垣云)()
蕴() 越 蕴() ,
蕴 憎 越 垣 憎 原 憎 原 憎
(垣夙)
在本文中,我们考虑如下的简支边界条件
在 曾越园葬时,憎 越憎 越憎 越憎 越憎 越憎 越憎 越憎 越憎 越园
(垣夙)
在 赠越园遭时,憎 越憎 越憎 越憎 越憎 越憎 越憎 越怎 越憎 越园
(垣夙)

三、对称层合矩形板的解

作为本文所提出理论的应用,我们考虑在简支边界条件(垣夙)和(垣夙)下的对称正交层合矩形板。在这种情况下,这板的几个材料刚度系数为零:

悦 越悦 越悦 越园 (猿)

而且,由式(垣夙)还有

[月] 越 [耘] 越园摇摇摇摇摇摇 [阅] 越原 [阅] ,
[云] 越原 [云] , [匀] 越原 [匀] (猿)

为了简化起见,引入以下无量纲量

ξ 越 $\frac{\alpha}{\alpha}$ 摇摇摇摇摇摇 η 越 $\frac{\beta}{\beta}$

宰^通越^憎_澡,

宰^译越^憎_澡,

Φ 越 ^{φ} _{粵澡},

匠越^擇_{粵澡},

λ 越^葬_遭,

葬越^員_{粵垣粵},

葬越^員_粵,

葬越^員_{粵粵},

遭越^{圓閱垣圓}_閱,

遭越^閱_閱,

遭越^源_{猿澡},

遭越^{愿云垣愿}_{猿澡},

遭越^源_{猿澡},

遭越^{粵澡}_閱, (猿澡)

糟越^{圓云垣愿}_云,

糟越^云_云,

糟越^源_{猿澡},

糟越^{愿匀垣愿}_{猿澡},

糟越^源_{猿澡},

糟越^{猿擇}_源(粵澡原愿垣愿云),

糟越^{猿擇}_源(粵澡原愿垣愿云)摇摇糟越^{猿澡}_源,

凿越^員_{粵粵},

凿越^員_{粵粵},

凿越^員_{粵粵}

于是, 控制方程(圆)简化为

$$L_{\text{源}}(\Phi) \text{越葬}^{\text{員}} L(\text{宰宰}),$$

$$L_{\text{源}}(\text{宰}) \text{垣} L_{\text{源}}(\text{宰}) \text{越原遭}^{\text{員}} L(\Phi \text{宰}) \text{垣遭}^{\text{員}}, \quad (\text{猿源})$$

$$L_{\text{猿}}(\text{宰}) \text{垣} L_{\text{猿}}(\text{宰}) \text{越原糟}^{\text{員}} L(\Phi \text{宰}) \text{垣糟}^{\text{員}}$$

其中

$$L_{\text{源}}(\text{ }) \text{越}(\text{ }) \text{垣葬}^{\text{員}} \lambda \text{垣葬}^{\text{源}} \lambda,$$

$$L_{\text{源}}(\text{ }) \text{越}(\text{ }) \text{垣遭}^{\text{員}} \lambda \text{垣遭}^{\text{源}} \lambda,$$

$$L_{\text{源}}(\text{ }) \text{越遭}^{\text{員}} \lambda \text{垣遭}^{\text{源}} \lambda \text{垣遭}^{\text{源}} \lambda, \quad (\text{猿缘})$$

$$L_{\text{猿}}(\text{ }) \text{越}(\text{ }) \text{垣糟}^{\text{員}} \lambda \text{垣糟}^{\text{源}} \lambda,$$

$$L_{\text{猿}}(\text{ }) \text{越糟}^{\text{員}} \lambda \text{垣糟}^{\text{源}} \lambda \text{垣糟}^{\text{源}} \lambda, \text{原糟}^{\text{員}} \lambda,$$

$$L(\Phi \text{宰}) \text{越} \Phi \text{宰} \text{原} \Phi \text{宰} \text{原} \Phi \text{宰}$$

而且边界条件(圆)和(圆)成为

在 ξ 越园员时,

$$\begin{aligned} & \text{宰}^{\text{通}} \text{越} \text{宰}^{\text{译}} \text{越} \text{宰}^{\text{通}}_{\xi\xi} \text{越} \text{宰}^{\text{译}}_{\xi\xi} \text{越} \text{宰}^{\text{通}}_{\eta} \text{越} \text{宰}^{\text{译}}_{\eta} \text{越} \Phi_{\eta\eta} \\ & \text{越} \int_{\text{园}}^{\text{员}} (\text{宰}^{\text{圆}}_{\lambda} \Phi_{\eta\eta} \text{垣} \text{宰}^{\text{圆}}_{\mu} \Phi_{\eta\eta} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{宰}^{\text{圆}}_{\lambda} \text{宰}^{\text{圆}}_{\eta}) \text{宰}^{\text{圆}}_{\eta} \text{越} \text{园} \end{aligned} \quad (\text{猿园})$$

在 η 越园员时,

$$\begin{aligned} & \text{宰}^{\text{通}} \text{越} \text{宰}^{\text{译}} \text{越} \text{宰}^{\text{通}}_{\eta\eta} \text{越} \text{宰}^{\text{通}}_{\eta\eta} \text{越} \text{宰}^{\text{通}}_{\xi} \text{越} \text{宰}^{\text{译}}_{\xi} \text{越} \Phi_{\xi\xi} \\ & \text{越} \int_{\text{园}}^{\text{员}} (\text{宰}^{\text{圆}}_{\lambda} \Phi_{\eta\eta} \text{垣} \text{宰}^{\text{圆}}_{\mu} \Phi_{\xi\xi} \text{原} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{宰}^{\text{圆}}_{\lambda} \text{宰}^{\text{圆}}_{\xi}) \text{宰}^{\text{圆}}_{\eta} \text{越} \text{园} \end{aligned} \quad (\text{猿一})$$

为了求解上述边值问题(猿)~(猿),我们将 宰^通、宰^译和 Φ 表示成如下双重福里哀级数形式

$$\begin{aligned} \text{宰}^{\text{通}} & \text{越} \sum_{\text{皂越员}}^{\text{肄}} \sum_{\text{灶越员}}^{\text{肄}} \text{宰}^{\text{通}}_{\text{皂灶}} \text{泽}^{\text{皂}}_{\xi} \text{泽}^{\text{灶}}_{\eta}, \\ \text{宰}^{\text{译}} & \text{越} \sum_{\text{皂越员}}^{\text{肄}} \sum_{\text{灶越员}}^{\text{肄}} \text{宰}^{\text{译}}_{\text{皂灶}} \text{泽}^{\text{皂}}_{\xi} \text{泽}^{\text{灶}}_{\eta}, \\ \Phi & \text{越} \sum_{\text{皂越员}}^{\text{肄}} \sum_{\text{灶越员}}^{\text{肄}} \Phi_{\text{皂灶}} \text{泽}^{\text{皂}}_{\xi} \text{泽}^{\text{灶}}_{\eta}, \\ \text{匝} & \text{越} \sum_{\text{皂越员}}^{\text{肄}} \sum_{\text{灶越员}}^{\text{肄}} \text{匝}_{\text{皂灶}} \text{泽}^{\text{皂}}_{\xi} \text{泽}^{\text{灶}}_{\eta} \end{aligned} \quad (\text{猿二})$$

其中

$$\text{匝}_{\text{皂灶}} \text{越} \int_{\text{园}}^{\text{员}} \int_{\text{园}}^{\text{员}} \text{匝} \text{泽}^{\text{皂}}_{\xi} \text{泽}^{\text{灶}}_{\eta} \text{宰}^{\text{圆}}_{\eta} \text{宰}^{\text{圆}}_{\xi} \text{越} \text{园} \quad (\text{猿三})$$

显然,式(猿二)满足式(猿)~(猿)所给出的全部条件。将式(猿二)代入方程(猿),用 $\text{泽}^{\text{皂}}_{\xi} \pi\xi$ 、 $\text{泽}^{\text{灶}}_{\eta} \pi\eta$ 乘这三个方程的两端,并在它们各自的区间内用逐项积分法进行积分,便得以下非线性代数方程

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{皂灶}} & \text{越} \frac{\text{园}}{\text{责}^{\text{圆}}_{\lambda} \text{垣} \text{责}^{\text{圆}}_{\mu}} \sum_{\text{皂越员}}^{\text{肄}} \sum_{\text{灶越员}}^{\text{肄}} \sum_{\text{皂越员}}^{\text{肄}} \sum_{\text{灶越员}}^{\text{肄}} \frac{\text{责}^{\text{皂}}_{\lambda} \text{宰}^{\text{皂}}_{\eta} \text{宰}^{\text{灶}}_{\xi}}{\text{责}^{\text{皂}}_{\lambda} \text{垣} \text{责}^{\text{皂}}_{\mu}} \text{宰}^{\text{皂}}_{\eta} \text{宰}^{\text{灶}}_{\xi} \\ & \text{越} \frac{\text{园}}{\text{责}^{\text{圆}}_{\lambda} \text{垣} \text{责}^{\text{圆}}_{\mu}} \sum_{\text{皂越员}}^{\text{肄}} \sum_{\text{灶越员}}^{\text{肄}} \sum_{\text{皂越员}}^{\text{肄}} \sum_{\text{灶越员}}^{\text{肄}} \frac{\text{责}^{\text{皂}}_{\lambda} \Phi_{\text{皂灶}} \text{宰}^{\text{皂}}_{\eta} \text{宰}^{\text{灶}}_{\xi}}{\text{责}^{\text{皂}}_{\lambda} \text{垣} \text{责}^{\text{皂}}_{\mu}} \text{宰}^{\text{皂}}_{\eta} \text{宰}^{\text{灶}}_{\xi} \\ & \text{垣} \left(\frac{\text{责}^{\text{皂}}_{\lambda} \text{宰}^{\text{皂}}_{\eta} \text{宰}^{\text{皂}}_{\xi}}{\pi} \text{垣} \frac{\text{责}^{\text{皂}}_{\mu} \text{宰}^{\text{皂}}_{\eta} \text{宰}^{\text{皂}}_{\xi}}{\pi} \right) \text{宰}^{\text{皂}}_{\eta} \text{宰}^{\text{皂}}_{\xi} \\ & \text{越} \frac{\text{园}}{\text{责}^{\text{圆}}_{\lambda} \text{垣} \text{责}^{\text{圆}}_{\mu}} \sum_{\text{皂越员}}^{\text{肄}} \sum_{\text{灶越员}}^{\text{肄}} \sum_{\text{皂越员}}^{\text{肄}} \sum_{\text{灶越员}}^{\text{肄}} \frac{\text{责}^{\text{皂}}_{\lambda} \Phi_{\text{皂灶}} \text{宰}^{\text{皂}}_{\eta} \text{宰}^{\text{灶}}_{\xi}}{\text{责}^{\text{皂}}_{\lambda} \text{垣} \text{责}^{\text{皂}}_{\mu}} \text{宰}^{\text{皂}}_{\eta} \text{宰}^{\text{灶}}_{\xi} \end{aligned} \quad (\text{猿四})$$

其中

$$\text{责}^{\text{皂}}_{\lambda} \text{越} \int_{\text{园}}^{\text{员}} \left[\text{责}^{\text{皂}}_{\lambda} \text{宰}^{\text{皂}}_{\eta} \text{宰}^{\text{皂}}_{\xi} \text{垣} \text{责}^{\text{皂}}_{\mu} \text{宰}^{\text{皂}}_{\eta} \text{宰}^{\text{皂}}_{\xi} \right] \text{宰}^{\text{皂}}_{\eta} \text{宰}^{\text{皂}}_{\xi} \text{越} \text{园} \quad (\text{猿五})$$

