

摇复合材料板壳理论及其应用 舒小平著 徐州:中国矿业大学出版社 1999.10

摇Ⅰ 摆...摇Ⅱ 摆...摇Ⅲ 摆 复合材料—层板—研究摇
Ⅳ 栽月藏

(图书出现印装质量问题 本社负责调换)

复合材料板壳理论及其应用

舒小平摇著

中国矿业大学出版社摇摇

自摇摇序

摇摇 先进工程材料的开发和应用是推动众多产业进步的关键技术。材料制备和结构形式的复杂性和多样性使业已成熟的均匀各向同性材料及其结构的分析方法失效,因而为新型工程材料及其结构提供有效的分析方法和设计依据成了近二、三十年的研究热点。本书之“复合材料板壳理论”所指“复合材料板壳”按惯例特指纤维增强复合材料层合结构,后两章也涉及压电复合材料层合结构和梯度功能材料结构。

本书集笔者数十年的研究成果:复合材料层合板壳的精确理论及其界面缺陷的精确分析。这些理论及应用反映了最新的研究进展,自成系列,具系统性。虽然国内外已经出版了一些复合材料结构力学的著述,笔者新近关于复合材料板壳结构的精确理论的研究是一个补充,而这些理论在层合结构界面缺陷分析中的成功应用也形成了系列,尚未见系统的著述。作为理论的推广应用,本书也增加了压电复合材料层合结构和梯度功能材料结构的内容,将复合材料板壳理论的分析方法成功地运用于这类先进工程材料及其结构的分析。本书叙述方式有明确的目标:理论及应用形成系列,贯穿全书,数学物理方法和表达前后一致,重点阐述新理论,兼顾对经典理论等成熟理论的介绍,新旧理论有机结合,采用从一般到特殊的叙述方式,使新旧理论统一在一个理论框架内。

本书可望帮助从事这方面学习和研究的起步者快速地了解研究的历史与现状,获取系统的参考资料和数据,也期望与从事相近

研究的同行交流。书中学术观点或为一家之见,表述也未必精确,敬望指正。

本书的大部分研究成果惠承多项省、部级课题及一项英国国家自然科学基金(基金编号49971001)的资助,与第七章“压电复合材料层板理论”相关的研究项目目前正在接受江苏省教育厅自然科学基金(基金编号02YB001)的资助;部分研究成果受惠于与南京航空航天大学孙良新教授、英国诺丁汉大学运爱媛教授博士的密切合作;本书的出版受到淮海工学院出版基金的资助;写作和出版过程中得到中国矿业大学出版社、淮海工学院学术期刊社的大力支持,责任编辑完成了繁重细致的编校工作,提供了许多技术建议和帮助,使本书增色不少,在此一并表示诚挚的感谢。

舒小平

2004年 8月

目 录

第一章 正交各向异性材料的弹性力学基础	(1)
第一节 直角坐标系下的基本关系和基本方程	(1)
第二节 柱坐标系和球坐标系下的基本关系 和基本方程	(2)
第二章 复合材料层板理论	(3)
第一节 经典层板理论	(3)
第二节 一阶剪切变形层板理论	(4)
第三节 高阶剪切变形层板理论	(4)
第四节 分层近似层板理论	(5)
第五节 层板的柱面弯曲	(5)
第六节 层板理论的精度比较	(6)
第七节 特殊铺层矩形层板的解析解	(6)
第八节 层板的稳定	(6)
第三章 复合材料层壳理论	(7)
第一节 扁壳理论	(7)
第二节 深壳理论	(7)
第三节 圆柱薄壳	(7)
第四章 层合板壳有限单元	(8)
第一节 正交铺层柱面弯曲层板(梁)单元	(8)
第二节 斜交铺层柱面弯曲层板(梁)单元	(9)
第三节 二维层板协调单元	(9)
第四节 基于分层近似理论的协调层板单元	(9)

摇摇第五节摇二维层板非协调单元	(页码)
摇摇第六节摇二维层壳单元	(页码)
摇摇第七节摇有限元精度比较	(页码)
第五章摇复合材料层合板壳层间缺陷分析	(页码)
摇摇第一节摇界面剪切滑移	(页码)
摇摇第二节摇界面弱粘贴	(页码)
摇摇第三节摇热弹性脱层	(页码)
摇摇第四节摇界面缺陷的有限元分析	(页码)
摇摇第五节摇局部张开型脱层	(页码)
第六章摇梯度功能材料热弹性分析	(页码)
摇摇第一节摇梯度功能材料圆柱壳和球壳	(页码)
摇摇第二节摇梯度功能材料板和扁壳	(页码)
第七章摇压电复合材料层板理论	(页码)
摇摇第一节摇柱面弯曲压电层板	(页码)
摇摇第二节摇二维压电层板理论	(页码)
摇摇第三节摇二维压电层板分层近似理论	(页码)
参考文献	(页码)
摇摇	

第一章

正交各向异性材料的弹性力学基础

正交各向异性材料是指具有三个相互正交对称平面的材料，纤维增强复合材料具备这样的特征，作为增强相的纤维是导致各项异性的原因。作为共识，本书所指“复合材料板壳理论”之复合材料特指纤维增强复合材料。复合材料结构其实是由若干单层粘帖而成的层合结构，每一单层称为铺层，按一定的角度交错叠合而成。材料的各向异性和铺层的特殊性带来了比各向同性材料结构复杂得多的几何、物理关系。

第一节 直角坐标系下的基本关系和基本方程

以 u, v, w 分别表示沿坐标 x, y, z 的位移。应力和应变各为六个，以向量记为

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T \quad (1.1)$$

$$\epsilon = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T \quad (1.2)$$

小变形时应变和位移满足以下关系

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

式中逗号表示求导。

正交各向异性材料的线弹性应力—应变关系可以表示为

$$\sigma = C \epsilon \quad (1.4)$$

正交各向异性材料刚度系数矩阵 C 是一个对称矩阵，有九个

独立的弹性系数。当材料的主轴与坐标轴重合时(正交铺层),刚度系数矩阵 悦表示为

$$\text{悦越} \begin{bmatrix} \text{悦}_{\text{原}} & \text{悦}_{\text{圆}} & \text{悦}_{\text{猿}} & \text{园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{悦}_{\text{圆}} & \text{悦}_{\text{圆}} & \text{悦}_{\text{圆}} & \text{园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{悦}_{\text{猿}} & \text{悦}_{\text{圆}} & \text{悦}_{\text{猿}} & \text{园} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{园} & \text{悦}_{\text{原}} & \text{园} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{园} & \text{园} & \text{悦}_{\text{圆}} & \text{园} \\ \text{园} & \text{园} & \text{园} & \text{园} & \text{园} & \text{悦}_{\text{圆}} \end{bmatrix} \quad (\text{员缘})$$

刚度系数 悦与材料的弹性模量、剪切模量和泊松比有关 怨个独立的材料常数常取为 耘, 耘, 耘, 郧, 郧, 郧, $\nu_{\text{圆}}$, $\nu_{\text{猿}}$, $\nu_{\text{圆}}$ 刚度系数 悦与它们的关系为

$$\begin{aligned} \text{悦}_{\text{原}} & \text{越} \frac{\text{耘}_{\text{原}}}{\text{员原} - \nu_{\text{圆}} - \nu_{\text{猿}}} \quad \text{悦}_{\text{圆}} \text{越} \frac{\text{耘}_{\text{圆}}}{\text{员原} - \nu_{\text{圆}} - \nu_{\text{猿}}} \quad \text{悦}_{\text{猿}} \text{越} \frac{\text{耘}_{\text{猿}}}{\text{员原} - \nu_{\text{圆}} - \nu_{\text{猿}}}; \\ \text{悦}_{\text{圆}} & \text{越} \frac{\text{耘}_{\text{圆}}}{\text{员原} - \nu_{\text{圆}} - \nu_{\text{猿}}} \quad \text{悦}_{\text{圆}} \text{越} \frac{\text{耘}_{\text{圆}}}{\text{员原} - \nu_{\text{圆}} - \nu_{\text{猿}}}; \\ \text{悦}_{\text{猿}} & \text{越} \frac{\text{耘}_{\text{猿}}}{\text{员原} - \nu_{\text{圆}} - \nu_{\text{猿}}} \quad \text{悦}_{\text{猿}} \text{越} \frac{\text{耘}_{\text{猿}}}{\text{员原} - \nu_{\text{圆}} - \nu_{\text{猿}}}; \\ \text{悦}_{\text{圆}} & \text{越} \frac{\text{耘}_{\text{圆}}}{\text{员原} - \nu_{\text{圆}} - \nu_{\text{猿}}} (\nu_{\text{圆}} \text{垣} \nu_{\text{圆}}) \text{越} \frac{\text{耘}_{\text{圆}}}{\text{员原} - \nu_{\text{圆}} - \nu_{\text{猿}}} (\nu_{\text{圆}} \text{垣} \nu_{\text{圆}}); \\ \text{悦}_{\text{圆}} & \text{越} \frac{\text{耘}_{\text{圆}}}{\text{员原} - \nu_{\text{圆}} - \nu_{\text{猿}}} (\nu_{\text{圆}} \text{垣} \nu_{\text{圆}}) \text{越} \frac{\text{耘}_{\text{圆}}}{\text{员原} - \nu_{\text{圆}} - \nu_{\text{猿}}} (\nu_{\text{圆}} \text{垣} \nu_{\text{圆}}); \\ \text{悦}_{\text{圆}} & \text{越} \frac{\text{耘}_{\text{圆}}}{\text{员原} - \nu_{\text{圆}} - \nu_{\text{猿}}} (\nu_{\text{圆}} \text{垣} \nu_{\text{圆}}) \text{越} \frac{\text{耘}_{\text{圆}}}{\text{员原} - \nu_{\text{圆}} - \nu_{\text{猿}}} (\nu_{\text{圆}} \text{垣} \nu_{\text{圆}}); \\ \text{灾} & \text{越} \frac{\text{员原} - \nu_{\text{圆}} - \nu_{\text{圆}}}{\text{员原} - \nu_{\text{圆}} - \nu_{\text{猿}}} \quad \text{灾} \text{越} \frac{\text{员原} - \nu_{\text{圆}} - \nu_{\text{圆}}}{\text{员原} - \nu_{\text{圆}} - \nu_{\text{猿}}} \quad \text{灾} \text{越} \frac{\text{员原} - \nu_{\text{圆}} - \nu_{\text{圆}}}{\text{员原} - \nu_{\text{圆}} - \nu_{\text{猿}}} \end{aligned} \quad (\text{员远})$$

其中 远个泊松比有下列关系

$$\frac{\nu_{\text{圆}}}{\text{耘}_{\text{圆}}} \text{越} \frac{\nu_{\text{圆}}}{\text{耘}_{\text{圆}}} \quad \text{悦}_{\text{圆}} \text{越} \frac{\nu_{\text{圆}}}{\text{耘}_{\text{圆}}} \quad \text{悦}_{\text{圆}} \text{越} \frac{\nu_{\text{圆}}}{\text{耘}_{\text{圆}}} \quad \text{悦}_{\text{圆}} \text{越} \frac{\nu_{\text{圆}}}{\text{耘}_{\text{圆}}} \quad (\text{员苑})$$

若材料的自然弹性轴与坐标轴不重合(斜交铺层),刚度系数矩阵 悦需作坐标变换。设铺层绕其中某一材料主轴(如 扎轴)旋转 θ 角,变换后的刚度系数矩阵 悦表示为

悦乙	悦乙 _源	悦乙 _源	悦乙 _源	园	园	悦乙 _源
悦乙	悦乙 _源	悦乙 _源	悦乙 _源	园	园	悦乙 _源
悦乙	悦乙 _源	悦乙 _源	悦乙 _源	园	园	悦乙 _源
悦乙	园	园	园	悦乙 _源	悦乙 _源	园
悦乙	园	园	园	悦乙 _源	悦乙 _源	园
悦乙	悦乙 _源	悦乙 _源	悦乙 _源	园	园	悦乙 _源

(元源)

刚度系数的变换服从下列关系

悦乙越皂悦垣皂灶悦垣皂悦垣皂灶悦
悦乙越皂灶悦垣皂垣皂)悦垣皂灶悦原皂灶悦
悦乙越皂悦垣皂悦
悦乙越原皂灶悦垣皂灶皂原皂)悦垣皂灶悦垣皂灶皂原皂)悦
悦乙越皂悦垣皂灶悦垣皂悦垣皂灶悦
悦乙越皂悦垣皂悦
悦乙越原皂悦垣皂悦
悦乙越皂悦原皂悦
悦乙越皂悦垣皂悦
悦乙越皂灶悦原皂灶悦
悦乙越皂悦垣皂悦
悦乙越皂灶悦原皂灶悦垣皂灶悦垣皂原皂)悦

其中摇摇越泽θ 摇摇灶越泽θ

在大多数复合材料层合结构的二维板壳理论中,挠度沿厚度变化被忽略,取 $\varepsilon_{扎扎} \approx 0$, 相对于其他应力很小也被忽略。在此情况下,应力—应变关系简化为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\text{曾}} \\ \sigma_{\text{贈}} \\ \tau_{\text{贈}} \end{Bmatrix} \text{越} \begin{bmatrix} \text{匠}_{\text{曾}} & \text{匠}_{\text{贈}} & \text{匠}_{\text{贈}} \\ \text{匠}_{\text{贈}} & \text{匠}_{\text{贈}} & \text{匠}_{\text{贈}} \\ \text{匠}_{\text{贈}} & \text{匠}_{\text{贈}} & \text{匠}_{\text{贈}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\text{曾}} \\ \varepsilon_{\text{贈}} \\ \gamma_{\text{贈}} \end{Bmatrix} \quad (\text{匠}_{\text{贈}})$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{\text{贈}} \\ \tau_{\text{贈}} \end{Bmatrix} \text{越} \begin{bmatrix} \text{匠}_{\text{贈}} & \text{匠}_{\text{贈}} \\ \text{匠}_{\text{贈}} & \text{匠}_{\text{贈}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\text{贈}} \\ \gamma_{\text{贈}} \end{Bmatrix}$$

或分别简写为

$$\sigma \text{越匠} \varepsilon \quad \tau \text{越匠} \gamma \quad (\text{匠}_{\text{贈}})$$

与式(匠)比较,层板的面内物理方程和横向物理方程被分开表达。匠称为简化的刚度系数,匠和匠分别称为面内刚度矩阵和横向剪切刚度矩阵,按下式计算:

$$\begin{aligned} \text{匠}_{\text{曾}} &\text{越匠}_{\text{曾}} \text{摇匠}_{\text{贈}} \text{越匠}_{\text{贈}} \text{摇匠}_{\text{贈}} \text{越匠}_{\text{贈}} \\ \text{匠}_{\text{贈}} &\text{越匠}_{\text{贈}} \text{摇匠}_{\text{贈}} \text{越匠}_{\text{贈}} \\ \text{匠}_{\text{贈}} &\text{越匠}_{\text{贈}} \text{摇匠}_{\text{贈}} \text{越匠}_{\text{贈}} \\ \text{匠}_{\text{贈}} &\text{越匠}_{\text{贈}} \text{摇匠}_{\text{贈}} \text{越匠}_{\text{贈}} \end{aligned} \quad (\text{匠}_{\text{贈}})$$

若铺层时材料的自然弹性轴与坐标轴不重合,变换后的刚度系数矩阵匠和匠表示为

$$\text{匠}_{\text{贈}} \text{越} \begin{bmatrix} \text{匠}_{\text{贈}} & \text{匠}_{\text{贈}} & \text{匠}_{\text{贈}} \\ \text{匠}_{\text{贈}} & \text{匠}_{\text{贈}} & \text{匠}_{\text{贈}} \\ \text{匠}_{\text{贈}} & \text{匠}_{\text{贈}} & \text{匠}_{\text{贈}} \end{bmatrix} \text{摇匠}_{\text{贈}} \text{越} \begin{bmatrix} \text{匠}_{\text{贈}} & \text{匠}_{\text{贈}} \\ \text{匠}_{\text{贈}} & \text{匠}_{\text{贈}} \end{bmatrix} \quad (\text{匠}_{\text{贈}})$$

刚度系数的变换服从下列关系

$\varepsilon_{越} \varepsilon_{侧} \varepsilon_{\theta} \varepsilon_{\theta} \varepsilon_{排} \gamma_{排} \gamma_{侧} \gamma_{侧}$ 裁 (员侧)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{则}} \text{越} \frac{\partial \text{怎}}{\partial \text{则}} \varepsilon_{\theta} \text{越} \frac{\partial \text{增}}{\partial \theta} \text{怎} \text{则} \varepsilon_{\text{扎}} \text{越} \frac{\partial \text{憎}}{\partial \text{扎}} \text{ (员} \frac{\partial \text{怎}}{\partial \text{则}} \text{增} \text{则)} \\ \gamma_{\theta} \text{扎} \text{越} \frac{\partial \text{增}}{\partial \text{扎}} \text{员} \frac{\partial \text{憎}}{\partial \theta} \text{怎} \text{则} \gamma_{\text{则}} \text{越} \frac{\partial \text{怎}}{\partial \text{扎}} \text{员} \frac{\partial \text{憎}}{\partial \text{则}} \gamma_{\text{则}} \text{越} \frac{\partial \text{员}}{\partial \theta} \text{怎} \frac{\partial \text{增}}{\partial \text{则}} \text{原} \text{增} \text{则} \end{aligned}$$
$$\frac{\partial \sigma_{\text{则}}}{\partial \text{则}} \text{垣} \frac{\partial \tau_{\text{则}}}{\partial \theta} \text{垣} \frac{\partial \tau_{\text{扎}}}{\partial \text{扎}} \text{垣} \frac{\sigma_{\text{则}}}{\text{则}} \text{垣} \frac{\text{原}_{\theta}}{\text{则}} \text{垣} \text{责越} \text{悛}$$

$$\frac{\partial \tau_{\text{则}}}{\partial \text{则}} \text{垣} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} \text{垣} \frac{\partial \tau_{\theta \text{扎}}}{\partial \text{扎}} \text{垣} \frac{\text{圆}_{\text{则}}}{\text{则}} \text{垣} \text{责越} \text{罅} \quad (\text{灵圆})$$

$$\frac{\partial \tau_{\text{扎}}}{\partial \text{则}} \text{垣} \frac{\partial \tau_{\theta \text{扎}}}{\partial \theta} \text{垣} \frac{\partial \sigma_{\text{扎}}}{\partial \text{扎}} \text{垣} \frac{\tau_{\text{扎}}}{\text{则}} \text{垣} \text{责越} \text{悛}$$

以 $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ 分别表示沿坐标 r, θ 的位移。应变和位移满足以下关系

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta} & \text{越} \frac{\text{员} \partial \text{怎} \text{增} \text{怎}}{\partial \text{则} \partial \theta} \text{则} \\ \varepsilon_{\varphi} & \text{越} \frac{\text{员} \partial \text{憎} \text{怎} \text{精} \text{怎}}{\partial \text{则} \partial \varphi} \text{则} \\ \gamma_{\theta \varphi} & \text{越} \frac{\text{员} \partial \text{增} \text{员} \partial \text{憎} \text{精} \text{怎}}{\partial \text{则} \partial \varphi} \text{则} \\ \gamma_{\varphi} & \text{越} \frac{\text{员} \partial \text{怎} \partial \text{憎} \text{憎}}{\partial \text{则} \partial \varphi} \text{则} \\ \gamma_{\theta} & \text{越} \frac{\text{员} \partial \text{怎} \partial \text{增} \text{增}}{\partial \text{则} \partial \theta} \text{则} \end{aligned} \quad (\text{员则})$$

· 远 ·

第二章 摇 复合材料层板理论

复合材料层合结构因其结构的呈层性,表现出与均匀各向同性板不同的响应方式。虽然将其作为三维问题对待并得到一些三维精确解^[苑- 愿],但这类解只限于具有特殊的几何形状、边界条件的层板。对于动辄几十层、上百层的复合材料层合结构,三维问题的解析方法及其有限元模型会导致非常复杂的表达和可观的计算量。因此,三维精确解的主要作用是用来检验近似理论的精度。降维是简化分析的有效方法,通常的做法是假设某类物理量(一般是位移)沿板厚的分布规律已知,使三维问题退化为二维问题乃至一维问题。这类降维的理论称为复合材料板壳理论。

最早的复合材料板壳理论移植于均匀各向同性板壳理论。对于薄板,最简单的经典理论(薄板弯曲理论^[苑- 愿])仍然适用。由于纤维复合材料板壳的横向剪切刚度较各向同性板壳低,一阶剪切变形理论(薄板剪切理论^[愿])因其考虑了横向剪切变形而进一步扩大了适用范围。但是,横向剪切变形对结构响应的影响随板厚的增加而增大,对于中厚层板和厚层板,它的影响非常显著,形式简单的经典层板理论和一阶剪切变形层板理论会造成显著的误差。因此,有必要针对复合材料层合结构的特性建立一些更好地考虑横向剪切变形的层板理论,办法之一是增加位移场沿板厚的分布精度,如较高阶(薄板高阶理论^[愿])理论^[苑- 愿]、高阶(薄板高阶理论^[愿])理论^[愿]和分层近似理论(薄板分层理论^[愿])^[苑- 愿],精度也依次提高。还有一类精化的理论(薄板精化理论^[愿])^[愿- 愿],所涉位移场能够满足层间的各种连续性要求,显现出更高的精度。近二十年来,许多学者致力于发展各种复合材料板

壳理论,并取得了丰硕成果。关于各类层板理论的特点的详细讨论可以参见相关著作^[员-猿]和综述文章^[源-远]。笔者及其合作者也作了有益的探索,在发展复合材料层板高精度理论上形成系列成果^[苑-猿]。本章将介绍几种典型的层板理论,重点介绍笔者及其合作者最新的研究成果。

第一节 摇 经典层板理论

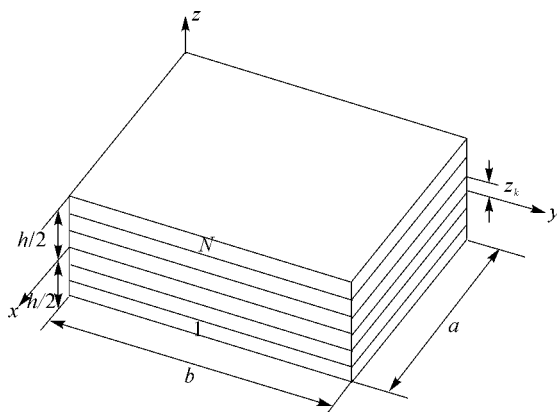


图 2-1 摇 层板几何图形

图 2-1 为层板几何图形。层板由 N 层各向异性薄层粘贴而成,板厚为 h 。为方便起见,取层板的中面 Ω 为参考面(中面), z 轴垂直于板面。第 k 个材料界面的 z 坐标由 z_k 表示($z_0, z_1, \dots, z_N$)表示, h_k 为第 k 层的厚度。用 u, v, w 来分别表示沿 x, y, z 方向的位移。板面受横向载荷 q 作用。

经典层板理论是在各向同性经典板理论的基础上发展起来

的。各向同性经典板理论基于克希霍夫的薄板假设 ① 板的中面 (参考面) 不变形 ;② 不计横向变形 ,即取 $\varepsilon_z \rightarrow 0$;③ 不计横向剪切变形 ,即取 $\gamma_{yz} \rightarrow 0$ 该理论适合于长厚比大的薄板。考虑到复合材料层板的非均匀性 ,变形时会出现拉压 — 弯曲耦合 ,板的中面将产生显著的变形 ,因此 ,克希霍夫的薄板假设 ① 不适合层板。考虑到这些因素 ,经典层板理论的位移场取为如下形式

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v &= v_0 + z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w &= w_0 \end{aligned} \quad (10.10)$$

式中涉及三个位移变量 u_0 、 v_0 和 w_0 ,它们表示板中面沿 x 、 y 方向的位移。由此位移场可得 $\varepsilon_z \rightarrow 0$ 、 $\gamma_{yz} \rightarrow 0$,即不计横向变形 ,仅考虑面内应变 ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} 和面内应力 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 。由式 (10.10) 得应变 — 位移关系

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (10.11)$$

或用向量表示为

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_0 + z \kappa \\ \varepsilon &= [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T \\ \varepsilon_0 &= [\frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}]^T \\ \kappa &= [\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}]^T \end{aligned} \quad (10.12)$$

考虑第 k 层的应力 — 应变关系 ,上标 (k) 表示第 k 层的物理量 :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & Q_{16}^{(k)} \\ Q_{12}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & Q_{26}^{(k)} \\ Q_{16}^{(k)} & Q_{26}^{(k)} & Q_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \Delta \alpha \begin{Bmatrix} \alpha_x^{(k)} \\ \alpha_y^{(k)} \\ \alpha_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (10.13)$$

或用矩阵表示

$$\sigma = Q^{(k)} (\varepsilon - \Delta \alpha) \quad (10.14)$$

$\Delta \alpha$ 为温度变化 $\alpha^{(k)}$ 等为第 k 层的热膨胀系数 $\Delta \alpha^{(k)}$ 为第 k 层的

热应变,层板的弹性系数 E_T 的定义见式(2.1.10)。

层板的控制方程可以由应力形式的运动微分方程(2.1.11)积分得到,也可根据板的单元体的动力学关系得到。为保持一致性,本书一律根据变分原理推导层板的控制方程。依据哈密尔顿(2.1.12)原理

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \delta u_i d\Omega \right) dt = 0 \quad (2.1.12)$$

式中位移向量 u_i 字母上面的点表示对时间求导 ρ 表示材料密度。上式变分得到层板的控制方程(详细过程见本章附录)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\rho}{E_T} \frac{d^2 u}{dt^2} \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\rho}{E_T} \frac{d^2 v}{dt^2} \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\rho}{E_T} \frac{d^2 w}{dt^2} \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

和边界条件

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ 或 } u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ 或 } v = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ 或 } w = 0 \\ & \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ 或 } u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ 或 } v = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ 或 } w = 0 \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

下标 x 和 y 表示边界的法线和切线方向。

控制方程和边界条件中的截面内力和内力矩由下式确定

$$\begin{aligned} & N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \\ & M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \\ & M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

其中由温升引起的热内力和热内力矩为