

本书若干通用符号

下面给出本书通用的标准符号，某些非标准符号在书中将加以定义。

$a \in A$	a 是集 A 的一个元素	R	实域
$A \subset B$	集 A 包含在集 B 中	C	复域
$A \cup B$	集 A 和集 B 的并集	Z	整数环，如 ($\dots -1, 0, 1, \dots$)
$A \cap B$	集 A 和集 B 的交集	j	-1 的平方根
\ni	使得	$R_+(R_-)$	非负 非正 实数集
\forall	任意	$C_+(C_-)$	包括虚轴的右 (左) 半复平面
\exists	存在	$\operatorname{Re} z$	复数 z 的实部
$p \Rightarrow q$	由 p 推出 q	$\operatorname{Im} z$	复数 z 的虚部
$p \Leftarrow q$	由 q 推出 p	C_+	$\{z \in C: \operatorname{Re} z > 0\}$
$p \Leftrightarrow q$	p 与 q 等价	C_-	$\{z \in C: \operatorname{Re} z < 0\}$
M^c	集 M 的内点	$A^{m \times n}$	$m \times n$ 阶矩阵
M	集 M 的闭包	$\sigma(A)$	方阵 A 的特征值集
M^\perp	M 的正交补空间	$\operatorname{tr} A$	方阵 A 的迹
\oplus	子空间的直和	$f: A \rightarrow B$	将区域 A 映射为区域 B
$[a, b]$	R 的闭子集	∂A	A 的边界
$(a, b]$	R 的含 b 不含 a 点的子集	$(x_k)_{k \in K}$	属于指标集 K 的元素族
$a \rightarrow b$	a 趋于 b	$C([a, b], R)$	$[a, b] \rightarrow R$ 的连续函数空间
N	非负整数集，如 ($0, 1, 2, \dots$)		

$\ x\ $	向量或者矩阵 x 的	$O(x)$	与 x 同阶的无穷小量或函数
$C^k([a,b],R)$	欧氏范数	$\text{span}P$	由 P 张成的子空间
	$[a,b] \rightarrow R$ 的具 k 阶连续导数的连续函数空间	$\text{image}P$	P 的像点所组成的集合
\dot{f}	定义在某区域上的向量、矩阵(或标量)函数 f 的时间导数	$SO(3)$	$R^{3 \times 3}$ 中所有行列式值为 1 的正交矩阵组成的集合
$df(x)$	$R^n \rightarrow R^m$ 的函数 f 的导数	$SO(n)$	$R^{n \times n}$ 中所有行列式值为 1 的正交矩阵组成的集合
$L_p^k[a,b]$	$[a,b]$ 上 p 次可积的实函数空间	$\text{sign}(x)$	符号函数 即
$o(x)$	比 x 高阶的无穷小量或函数		$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

第一章 绪言

1.1 引言

线性系统理论自 20 世纪 50 年代以来不仅已在理论上逐步完善，也已成功地应用于各种国防和工业控制问题。随着现代工业对控制系统性能要求的不断提高，传统的线性反馈控制已很难满足各种实际需要。这是因为大多数实际控制系统往往是非线性的，采用近似的线性模型虽然可以使我们更全面和容易地分析系统的各种特性，但是却很难刻画出系统的非线性本质，线性系统的动态特性已不足以解释许多常见的实际非线性现象。另一方面，计算机及传感器技术的飞速发展，也为我们实现各种复杂非线性控制算法奠定了硬件基础。因此自 20 世纪 80 年代以来，非线性系统的控制问题受到了国内外控制界的普遍重视。

有许多非线性现象是无法用线性系统理论刻画的，例如：

1. 多个平衡点或多个操作点

对于线性系统模型：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.1)$$

式中 $\mathbf{x} \in R^n$ ， $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ 为常数矩阵；点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是系统的平衡点。也就是说，如果微分方程 (1.1) 在 $t = 0$ 时的初始状态为 $\mathbf{0}$ ，则对任何 t 系统的状态仍为 $\mathbf{0}$ 。如果 \mathbf{A} 为一个非奇异矩阵，那么 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是线性系统唯一的平衡点。如果 \mathbf{A} 为奇异矩阵，那么系统平衡点集将是矩阵 \mathbf{A} 的零向量空间，即有无穷多个平衡点。但是对于渐近稳定的系统而言，总是只有一个平衡点，因为此时 \mathbf{A} 显然为非奇异的。而当 \mathbf{A} 奇异时，若给 \mathbf{A} 的元素一个适当的无限小扰动将几乎肯定

地使它变成非奇异。因此，由方程(1.1)构成的线性系统在很大程度上不会出现一个以上的平衡点。

但是，许多实际系统往往存在多个平衡点。例如二进制逻辑电路中至少有两种稳定状态，化学反应运动学允许有多个平衡点以及模拟输电网中有功功率和无功功率流动的潮流方程有多个稳定的运行点等等。因而采用传统的线性模型是无法描述这种现象的。

2. 状态变量或极限环的周期性变化

作为对比，我们再来分析线性系统(1.1)。如果 A 具有纯虚部的特征值的话，则线性系统将有一个连续的周期解。但若给 A 的元素一个小扰动将会引起特征值的实部不为零而使周期解不复存在。因此，线性系统中参数的微小变化会破坏周期解的存在性，同时会使系统产生不稳定的或稳定的平衡点，也即有周期解的线性系统对参数的变化不具有鲁棒性。

另一方面，在多个平衡点情形，也存在多个孤立周期解的实际系统，如范德普尔(van der Pol)方程描述的系统 这些现象是不能用线性模型来描述的。

但是，有许多具有鲁棒性作周期变化的实际系统，例如模拟心跳和神经脉动的所谓范德普尔类方程，这类系统存在稳定的极限环。

3. 分叉及混沌

许多系统的一些特性，如平衡点的数量、极限环的数量以及这些特性的稳定性，会随着模型参数的变化而改变，而这些变化都不能用一个参数化的线性模型来刻画。例如当加于端口的电压升高或降低时，一端口电阻器，如隧道二极管的电流值会发生急剧的变化。当喷气式飞机的发动机的冲击角度发生变化时，一个恒定的飞行线路的角度轨迹就会变成不稳定，并代之以有恒定滚动率的周期模式。

4. 复杂的动态现象

我们来思考一下线性系统(1.1)的动态特性 若 A 的特征值不在虚轴上，其响应就是指数函数之和。当由矩阵 A 的特征值决定的

指数函数给定后，对于任何初始条件， t 趋于无穷大时系统的响应要么衰减为零要么急剧增加。若 A 有特征值位于虚轴上，系统(1.1)的解既不衰减也不急剧增加。正如上面所指出的，微小的参数扰动将使特征值偏移虚轴，这种模型是非鲁棒的。

相比之下，许多物理系统的动态特性是一个复杂和对初始条件敏感的函数，例如，人口模型的动态系统、气候模型和汹涌的流体流动模型。这些系统大都以分叉或收敛的指数函数的形式出现。初始条件很小的变化可以使曲线轨迹发生很大的变化。这些都被称为浑沌或复杂的动态系统，是不能用线性模型来产生的。

1.2 非线性系统分析的复杂性

与线性系统相比，非线性系统的分析要困难和复杂得多，主要表现在：

1. 线性系统和非线性系统解的形式不同

对线性系统而言，根据其对应矩阵的特征值可容易地得到解析解，然后根据其解的表达式可以得到一系列定量和定性结果。但对于非线性系统而言，却很少有这种情况，一般无法给出解的具体形式。因此，有必要对非线性系统进行深入的定性分析，在定量上进行反复的模拟证明。

2. 非线性系统分析必须涉及一些比较抽象和繁琐的现代数学工具

例如，考虑由下列微分方程描述的非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.2)$$

其中 $\mathbf{x} \in R^n$ 为状态变量； \mathbf{x}_0 为 $t=0$ 时的初始状态； $\mathbf{u} \in R^m$ 为控制向量。如果对任意 t ，系统(1.2)关于 \mathbf{x} 和 \mathbf{u} 是仿射或线性的，显然我们可找到相应的控制，使得：

(1) 系统(1.2)至少有一个解属于一些合理的函数族（解的存在性）；

(2) 系统(1.2)在上述函数族中刚好有一个解 解的唯一性) ;

(3) 系统(1.2)确有一个解对所有的 t 有定义 解的可延拓性)

但对于非线性系统而言, 就会出现各种比较复杂的现象, 其解可能不存在、不唯一或不能延拓到适当大的时间范围。举例如下。

(1) 解不存在的例子

考虑下列系统

$$\dot{x} = -\text{sign}(x), x(0) = 0 \quad (1.3)$$

式中 $\text{sign}(x)$ 为符号函数 即当 $x > 0$ 时, $\text{sign}(x)$ 取值为 1 而当 $x < 0$ 时, $\text{sign}(x)$ 取值为 -1 。因此, 不可能存在满足式(1.3)的连续可微函数。但是, 式(1.3)又是开关或继电控制系统中常见的模型。

(2) 解不唯一的例子

考虑下列系统

$$\dot{x} = 3x^{2/3}, x(0) = 0 \quad (1.4)$$

显然 函数 $x(t) = t^3$ 及 $x(t) = 0$ 均为满足初始条件的解, 也即此系统初值问题的解是不唯一的。

(3) 解不可延拓的例子

考虑如下系统

$$\dot{x} = 1 + x^2, x(0) = 0 \quad (1.5)$$

该系统初值问题的解为 $x(t) = \tan(t)$, 它在区间 $[0, \pi/2)$ 之外是无定义的, 也即解不可以连续地延拓到 $t \geq \pi/2$ 的时间范围。

因此, 对于非线性系统而言, 其解可能会出现各种线性系统所不具有的特征。下面考虑非线性系统

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1.6)$$

如果其中的函数 $f(x, t)$ 不明显依赖于时间 t , 则称系统(1.6)为自治的。若对任意 $t \geq t_0$ 有 $f(x_0, t) = 0$, 则称 $x_0 \in R^n$ 为系统(1.6)在 t_0 时刻的平衡点。

显然, 如果(1.6)存在唯一解且 x_0 是在 t_0 时刻的平衡点, 则当

$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 时, 对所有 $t \geq t_0$ 有 $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0$ 。若对所有的 t 有 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) \equiv \mathbf{0}$ 则简称 \mathbf{x}_0 为系统(1.6)的平衡点。例如对无外力作用的单摆系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_2 - k_2 \sin(x_1) \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

该系统是自治的, 而且存在多个平衡点 $(x_1, x_2) = (0, n\pi) (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 。

若系统(1.6)是自治的, 则寻求系统的平衡点就相当于求解下面的非线性代数方程

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (1.8)$$

它要么有一个连续解集, 要么有几个孤立解, 要么无解。特别地, 对线性系统, 即 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 若矩阵 \mathbf{A} 是非奇异的, 则显然方程 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有唯一解; 若矩阵 \mathbf{A} 是奇异的, 则此时有一个连续解集, 即为 \mathbf{A} 的零向量空间。如果存在 \mathbf{x}_0 的一个充分小的邻域 使得在此邻域内除了 \mathbf{x}_0 外没有其它的平衡点, 则称 \mathbf{x}_0 为自治系统的孤立平衡点。

假设 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ 是 C^1 类函数 (即连续可微函数) 对任何时刻, \mathbf{x} 是式(1.6)的一个平衡点。将 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ 在 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ 点作泰勒级数展开, 得:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) + \mathbf{A}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{r}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t) \quad (1.9)$$

其中

$$\mathbf{A}(t) = (A_{ij}(t)) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, t) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0, t) \right)$$

为该系统的近似线性化部分。若 $\mathbf{A}(t)$ 为非奇异的, 则此时 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ 显然是系统的一个孤立平衡点。对于 $\mathbf{A}(t)$ 为奇异的情形, 其平衡点可能会出现各种情况。例如系统

$$\dot{x} = x^3, \quad x \in \mathbb{R}$$

在平衡点 $\mathbf{x}=0$ 的线性化部分为 0 ，它仍然是孤立的。而下列非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + bx_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -bx_1x_2 \end{cases}$$

的平衡点是一连续集 $(0, x_2)$ ，相应的线性化矩阵的第二列为 0 。

1.3 若干非线性系统的实例

下面我们给出一些非线性系统的实例，从中可以看出它们的复杂性和非线性特征。

例 1.1 两连杆机器人。

考虑如图 1-1 所示的两连杆机器人。根据分析力学中的哈密顿 (Hamilton) 原理，我们可得其动力学方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (1.10)$$

其中 $\mathbf{q}=(\theta, \gamma)^T$ 为机器人的广义位移坐标向量； $\mathbf{M}=\mathbf{M}(\mathbf{q})$ 为惯量矩阵； $\mathbf{B}=\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 为哥氏力及离心力项； $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ 为重力项或未知扰动； $\boldsymbol{\tau}$ 为控制力矩向量；各项具体形式为

$$M_{11} = (m_1 + m_2)r_1^2 + m_2r_2^2 + 2m_2r_1r_2\cos\gamma$$

$$M_{12} = M_{21} = m_2r_2^2 + m_2r_1r_2\cos\gamma; \quad M_{22} = m_2r_2^2 + J_2$$

$$B_{11} = -2m_2r_1r_2\dot{\gamma}\sin\gamma; \quad B_{12} = -m_2r_1r_2\dot{\gamma}\sin\gamma$$

$$B_{21} = m_2r_1r_2\dot{\gamma}\sin\gamma; \quad B_{22} = 0$$

$$G_1 = -(m_1 + m_2)r_1\cos\theta + m_2r_2\cos(\theta + \gamma)]g$$

$$G_2 = -m_2r_2g\cos(\theta + \gamma)$$

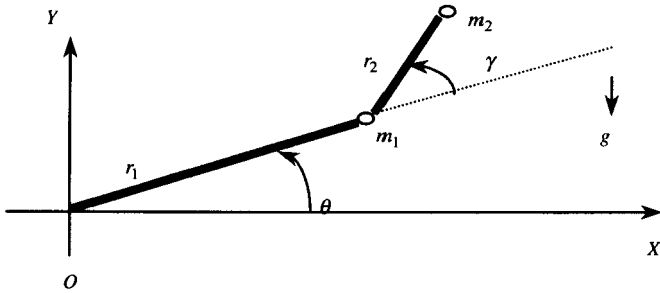


图 1-1 双臂机器人示意图

显然，该系统具有明显的非线性特征。当机器人处于高速运行状态时，有关非线性项的忽略会影响机器人的动态性能。对于多连杆机器人，各连杆间的非线性耦合影响更为突出。

例 1.2 移动机器人。

考虑如图 1-2 所示的典型三轮移动机器人，它由具有两个同轴的驱动轮和一个辅助前轮的小车组成，后轮两个独立的电机用于驱动其移动。其中 (X, Y) 为惯性坐标系； (X_1, Y_1) 为小车坐标系； Q 为小车的几何中心，即小车轮轴的中点，其惯性坐标为 (x_Q, y_Q) ； C 为小车重心坐标，其惯性坐标为 (x_c, y_c) ； b 为驱动轮与 Q 点之间的距离； r 为驱动轮半径； m 为小车及负载重量； I 为小车在轴上绕 C 点的转动惯量； d 为点 Q 与点 C 之间的距离； (x, y) 为小车轮轴中心点 Q 在惯性坐标系中的位置； θ 为坐标系 $\{Q, X_1, Y_1\}$ 和惯性坐标系之间的夹角。

由图 1-2 知 $(x_c, y_c) = (x + d \cos \theta, y + d \sin \theta)$ ，为使小车在运动时不存在打滑现象，即小车只能在与驱动轮轴垂直的方向上运动，必须满足以下的纯滚动和无打滑条件：

$$\dot{y}_c \cos \theta - \dot{x}_c \sin \theta - d\dot{\theta} = 0 \quad (1.11)$$

选取 $u_1 = \dot{x}_c$ 、 $u_2 = \dot{y}_c$ 为控制变量，则上述移动机器人的运动学模型可写为下列形式：

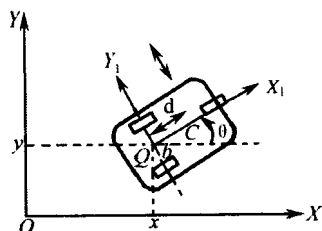


图1-2 移动机器人示意图

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{y}_C \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{d}\sin\theta & \frac{1}{d}\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

注意此系统的近似线性化模型中右端为零，明显是不能控的。但是该非线性系统确实可以用时变反馈实现系统的渐近稳定性，我们将在后面有关章节对其进行进一步的讨论。

例 1.3 范德普尔振荡电路。

考虑如图 1-3 所示的范德普尔振荡电路，其中 L ， C 为线性； R 为非线性； $i = \alpha v(v^2 - 1)$ ($\alpha > 0$)。设电感电流 i_L 和电容电压 v_C 为状态变量，则可得该电路的方程为

$$\left. \begin{aligned} C \dot{v}_C &= -i_L + i_R(v_C) \\ L \dot{i}_L &= v_C \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

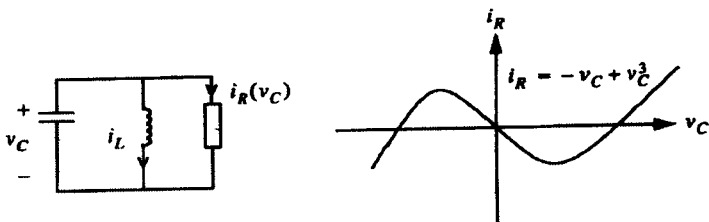


图 1-3 范德普尔振荡电路

图 1-4 为范德普尔振荡电路相轨迹图 由图可以看出 在初始点处的平衡点是不稳定的 并被一个极限环 (即孤立的周期解) 所包围, 从所有初始点出发的解似乎都收敛于这个极限环。当 C 逐渐减小时, 相轨迹是如何变化的呢? 对于非常小的电容值, 形成了如图 1-5 的振荡形式, 它由两个快变和两个慢变的部分组成。这就是所谓的不稳定的多谐振荡电路的原型, 它带有两个轨迹快变部分, 表征着在两个逻辑状态之间的过渡。该电路由电子工程师范德普尔首先研究发现, 范德普尔认为电路之所以能够振荡, 是因为非线性电阻对于小的 v 和 i 是“主动”的 (也即若 v 和 i 的方向都指向电阻, 那么乘积 vi 是非正的) 而对于大的 v 和 i 是“被动”的 (比如说, vi 是非负的)

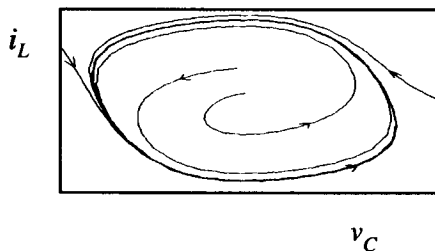


图 1-4 范德普尔振荡电路相轨迹图

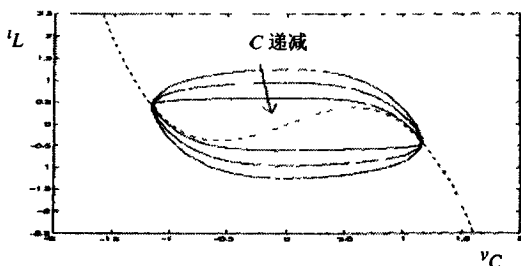


图 1-5 C 减小时的范德普尔振荡电路相轨迹图

为理解范德普尔振荡器极限环对于小的电容值存在快变部分, 我们令 $C=0$, 则此时系统(1.13) 变为一个微分代数系统。

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -i_L + i_R(v_C) \\ L \dot{i}_L &= v_C \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

因此，除非系统从特征曲线 $i_L = i_R(v_C)$ 的一个节点跳到另一节点（例如 有一个瞬时过渡）系统大部分时间是在该特征曲线上变化。此时，系统(1.14)不存在关于时间 t 连续的解。

例 1.4 牛顿摆。

考虑如图 1-6 所示的在重力作用下摆动的所谓牛顿摆。假设摆的长度为 l ，质量 m 集中在摆的末端，摩擦阻尼具有粘性，摩擦因数为 d ，其运动方程为

$$ml^2\ddot{\theta} + d\dot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \quad (1.15)$$

有关这个动态系统的轨迹，当阻尼系数为零时的相平面图如图 1-7 所示。

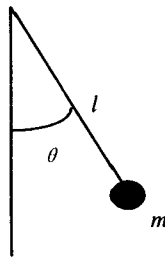


图 1-6 牛顿摆示意图

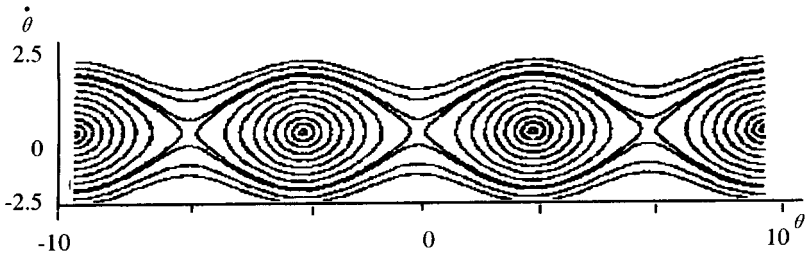


图 1-7 无阻尼时的牛顿摆相轨迹图

系统 1.15 存在无限个孤立的平衡点 $\theta, \theta) \in (\pm n\pi, 0) (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 此外, 该系统另一个显著的特征是, 相轨迹在 θ 方向上是作周期性变化, 其周期为 2π , 这是因为该系统的状态方程右端函数是以 θ 为变量的 2π 周期函数。

总之, 非线性系统广泛存在于各种实际问题中, 它具有许多与线性系统完全不同的特点。自 20 世纪 80 年代以来, 非线性控制系统理论与应用研究取得了突破性的进展, 其中起关键作用的是现代微分几何代数理论等现代数学工具在这一领域的成功应用。通过利用李括号及微分同胚等基本工具研究非线性系统状态、输入及输出变量间的依赖关系, 系统地建立了非线性控制系统能控、能观及能检测的充分或必要条件, 特别是全局状态精确线性化及输入 / 输出精确线性化方法的发展, 不仅推广了线性控制系统理论, 而且也极大地推动了非线性控制系统理论在各种复杂非线性控制对象中的应用与开发研究。

应该看到, 非线性控制系统的分析与综合问题要比线性系统困难和复杂得多。精确线性化方法只能适用于极少数实际控制对象, 对于绝大多数实际控制系统而言, 各种近似化方法如伪线性化方法、描述函数法、近似输入 / 输出线性化等依然在非线性系统分析与综合中起着重要的作用。因此, 本书将用一定篇幅介绍近年来比较热门的有关近似化方法。

第二章 数学预备知识

本章我们将简要介绍一些在非线性和综合中需要用到的数学基础知识，特别是微分几何的一些基本概念。对于从事应用研究的读者来说，只须理解其中的关键部分如李(Lie)导数、李括号、向量场集合的对合性以及微分方程解的一些基本理论等。对于熟悉微分方程、抽象代数和微分几何理论的读者，可跳过这一章。本章的内容在各种微分几何及非线性控制系统的教材或专著中都有介绍，读者可参考其它有关文献^[1, 10, 13, 23, 46, 52, 53, 76, 120, 124, 130, 143]。

2.1 群和域

本节将简要介绍一下有关群和域的基本概念。尽管我们在高等数学和其它场合都接触过或应用过这些概念，但对于工科专业的读者来说，有必要在此熟悉一下。

定义 2.1 设 G 不是空集，对 G 给定一个二元运算“ \cdot ”： $G \times G \rightarrow G$ ，满足下列性质：

- 1) 对任意的 $a, b \in G$ ，存在唯一的 $c \in G$ ，使得 $c = a \cdot b$ ；
- 2) 结合律：对任意的 $a, b, c \in G$ ，有 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ；
- 3) 存在单位元 e ，使得对所有 $a \in G$ 成立 $a \cdot e = e \cdot a = a$ ；
- 4) 对所有的 $a \in G$ 存在逆元 $a^{-1} \in G$ ，使得 $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ ；

则称 G 为一个群。

特别地 若对任意 $a, b \in G$ 有 $a \cdot b = b \cdot a$ 则称群 G 为阿贝尔 (Abelian) 群。

定义 2.2 群 G 和 H 在映射 $\phi: G \rightarrow H$ 下称之为是同态的, 如果它保持如下群运算性质:

$$\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b) \quad (2.1)$$

定义 2.3 群 G 和 H 在映射 $\phi: G \rightarrow H$ 下称之为是同构的, 如果它是同态和双射的, 也即式 (2.1) 中的对应关系是一一对一的。

显然, 同构本质上是一个等价关系, 即 G 和它本身是同构的; 若 G 和 H 同构 则 H 和 G 也同构 若 G 和 H 同构, H 和 Q 同构, 则 G 和 Q 也同构。

定义 2.4 域 K 是一个具有乘法 (\cdot) 和加法 ($+$) 二元运算且满足下列性质的集合:

- 1) K 在加法运算 ($+$) 下是一个含有单位元 “0” 的阿贝尔群;
- 2) $K - \{0\}$ 在乘法运算 (\cdot) 下是一个含有单位元 “1” 的阿贝尔群;
- 3) 分配律: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

域的概念对于我们并不陌生, 实数域和复数域 (在通常加法和乘法意义下 是我们常见的例子。

2.2 赋范线性空间

定义 2.5 一个实数域上的向量空间 V 称作是赋范线性空间, 如果它具有某种范数 $|\cdot|$ 满足下列条件:

- 1) 对任意 $x \in V$ 有 $|x| \geq 0$ 且 $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 2) 对任意 $a \in R$ 及 $x \in V$ 有 $|ax| = |a||x|$;
- 3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ 。

范数本质上是通常意义下的距离概念在一般线性空间上的推

广完备的赋范线性空间通常称为巴拿赫(Banach)空间[○]。对于 n 维向量空间 R^n 我们可以定义如下类型的范数：

$$1) \|x\|_{\infty} = \max(|x_i|, i=1, \dots, n);$$

$$2) \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|;$$

$$3) \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \quad (1 \leq p \leq \infty)。$$

相应地，对于 $[0, 1]$ 到 R^n 的连续函数组成的空间 $C^n[0, 1]$ ，我们可定义以下范数：

$$\|f(\cdot)\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}, p=1, 2, \dots$$

定义 2.6 设 $v_1, \dots, v_m \in V$ ，若在关联域 F 上存在一组不全为零的标量 a_i 满足

$$\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$$

则称 v_1, \dots, v_m 是线性相关的，否则称之为是线性无关或独立的。

定义 2.7 一个实向量空间 X 称为是内积空间，如果存在函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow R$ 具有以下性质：

- 1) 对所有 $x, y \in X$ 成立 $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ；
- 2) 对所有 $x, y, z \in X$ 成立 $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ ；
- 3) 对所有 $x, y \in X$ 及 $\alpha \in R$ 成立 $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ ；
- 4) 对所有 $x \in X$ 成立 $\langle x, x \rangle = |x|^2$ 。

[○]所谓空间完备的意义，即对任意 X 中的柯西(Cauchy)序列 $\{x_n, n=1, 2, \dots\}$ (即对任给正数 $\varepsilon > 0$ ，可找到 N ，使得对所有 $n, m > N$ ，有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$)，必存在 $x \in X$ ，使得当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $x_n \rightarrow x$ 。

注意到最后一个性质表明每个内积空间都可诱导出该向量空间上的一个范数。如果该内积空间是完备的，则称之为希尔伯特(Hilbert)空间。

在 R^n 上我们定义两个向量 x, y 的内积为

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (2.2)$$

在 $C^n[0, 1]$ 上定义两个元素(函数) $f(\cdot), g(\cdot)$ 的内积为

$$\langle f(\cdot), g(\cdot) \rangle = \int_0^1 \langle f(t), g(t) \rangle dt \quad (2.3)$$

其中 $\langle f(t), g(t) \rangle$ 的定义同式(2.2)，它表明 $C^n[0, 1]$ 不是一个希尔伯特空间(因为可微函数序列的极限可能不是可微函数)它的完备空间 $L_2^2[0, 1]$ 即平方可积函数组成的空间才是希尔伯特空间。

如果 X 和 Y 分别是具范数 $|\cdot|_X$ 和 $|\cdot|_Y$ 的实赋范线性空间 则这两个范数诱导出一个从 X 到 Y 的线性映射组成的向量空间上的范数，记该线性映射空间为 $L(X, Y)$ 。

定义 2.8 如果 X 和 Y 分别是具范数 $|\cdot|_X$ 和 $|\cdot|_Y$ 的实赋范线性空间，根据 X 及 Y 的范数诱导出 $A \in L(X, Y)$ 的范数形式为

$$|A|_l = \sup \left(\frac{|Ax|_Y}{|x|_X} : |x| \neq 0, x \in X \right) = \sup(|Ax|_Y : |x|_X = 1)$$

显然， $m \times n$ 矩阵为 R^n 到 R^m 的线性算子表达形式，因此根据 R^n 和 R^m 上的范数，我们可相应地诱导出 $R^{n \times m}$ 上的矩阵范数如下表所列。

R^n 和 R^m 上的范数	$R^{n \times m}$ 上诱导出的范数
$ x _\infty = \max_i x_i $	$ A _\infty = \max_i \sum_j a_{ij} $
$ x _1 = \sum_i x_i $	$ A _1 = \max_j \sum_i a_{ij} $
$ x _2 = (\sum_i x_i ^2)^{1/2}$	$ A _2 = (\lambda_{\max}(A^T A))^{1/2}$