

# 锻压机械及其有限元计算

林道盛 杨雨生 曹桂荣  
田 越 阮中燕 安国平  
合 编

北京工业大学出版社

## 内容简介

本书共分三部分:第一部分介绍了弹性有限元的基本知识;第二部分以锻压机械中应用最广的曲柄压力机为主,分析了锻压机械的设计及有限元计算;为了使读者对曲柄压力机有全面了解,第三部分介绍了此类锻压机械的其余知识。书中多方面反映了作者多年来的教学实践经验和科研成果,并引用了一些院校关于有限元在锻压机械中应用的实例,全书结构安排合理,内容深入浅出,循序渐进,理论联系实际。

本书适合材料成型及控制工程专业本科生使用,也可供从事锻压机械设计、制造的工程技术人员及其他有关专业的学生学习和参考。

锻压机械及其有限元计算

主 编 林道盛

副主编 杨雨生 曹桂荣

北京工业大学出版社出版发行

各地新华书店经销

印刷厂印刷

1998年12月第1版 1998年12月第1次印刷

787mm×1092mm 16开本 15.75印张 366千字

印数:1~1000册

ISBN 7-5639-0739-4/T·98

定价:17.00元

# 前 言

随着电子计算机的广泛应用，有限单元法也得到了迅速的发展，在短短的 40 多年里，这种实用的数值计算方法从起步到普遍推广应用，使得工业领域里的许多设计与计算发生了根本性的变革，有限单元法成为机械、汽车、飞机、船舶、宇航器等领域中 CAD/CAM 的必不可少的工具。

锻压机械是实现锻压工艺所必需的机器，由于有限单元法的应用，使得锻压机械的设计更具有科学性。

本书是编者根据多年教学实践和科研成果，在编者原来所编教材的基础上，经适当扩充和修改而完成的。编写中，理论部分力求深入浅出，循序渐进，并尽量做到理论联系实际，学以致用；书中多方面反映了编者的研究成果，并引用了一些兄弟院校关于有限单元法在锻压机械设计中应用的实例。

本书共分三个部分，其中第一部分是弹性有限元的基本知识；第二部分以锻压机械中应用最广泛的曲柄压力机为主，分析了锻压机械的设计及有限元计算；为了使读者对曲柄压力机有全面了解，第三部分介绍了此类锻压机械的其余知识。本书主要供“材料成型及控制工程”专业的学生学习本课程应用，同时也可供从事锻压机械设计、制造的工程技术人员及其他有关专业的学生学习与参考。

本书编写的分工如下：由林道盛教授编写绪论、第一章、第八章、第十章的第一节至第四节、第十三章的第一节至第四节；杨雨生教授编写第四章、第六章、第七章、第九章的第六、第七节、第十章的第五节；曹桂荣副教授编写第二章、第三章、第五章及第十一章；田越高级工程师编写第九章的第一节至第五节、第十三章的第五节；阮中燕副教授编写第十二章及第十四章的第一、第二节；安国平讲师编写第十四章的第三、第四节及第十五章。

全书由林道盛任主编，杨雨生、曹桂荣任副主编。

在本书的编写过程中，得到黄乃强教授的关心与帮助；本书参考了国内外一些作者们的著作，引用了本校、外校及其他人员的一些研究成果，谨在此向北京工业大学黄乃强教授，意大利的卡拉布里亚大学 LAURA · LUCHI 教授、ANDREA · POGGIALINI 教授，清华大学何德誉教授、俞新陆教授以及有关著作的作者们、有关兄弟院校的老师、北京工业大学锻压教研室有关老师及毕业生们，致以衷心的感谢。

本书能顺利出版，要感谢北京工业大学出版社的大力支持与帮助。

由于水平所限，书中难免有错漏不周之处，欢迎批评指正。

本书编写组

1998.8

# 目 录

绪论	(1)
第一节 锻压机械分类及型号	(1)
第二节 有限元概况及其在锻压机械设计中的应用	(4)
第一章 有限元计算步骤	(7)
第一节 离散化	(7)
第二节 单元分析	(10)
第三节 单元综合	(11)
第二章 单元分析	(13)
第一节 弹性力学基本知识	(13)
第二节 位移函数	(20)
第三节 节点位移与节点力	(25)
第四节 单元刚度矩阵	(30)
第三章 单元综合	(34)
第一节 单元综合的步骤	(34)
第二节 总体刚度矩阵的形成	(35)
第三节 支承条件处理	(38)
第四节 总体刚度矩阵特点	(39)
第五节 例题	(42)
第四章 平面问题框图及计算程序	(46)
第一节 平面问题的总框图	(46)
第二节 框图设计	(47)
第三节 计算结果整理	(60)
第四节 三角形三节点单元计算程序	(60)
第五章 轴对称问题	(65)
第一节 几何方程和弹性方程	(65)
第二节 位移函数	(67)
第三节 单元应变及应力	(69)
第四节 单元刚度矩阵及节点载荷	(71)
第六章 平面问题的高次单元	(73)
第一节 三角形六节点单元	(73)
第二节 矩形单元	(77)
第三节 任意四边形单元	(81)
第七章 有限元前期处理	(86)
第一节 简单节点定义方法	(86)
第二节 节点集定义节点方法	(89)
第三节 坐标系的定义与坐标转换	(91)

第四节	单元的定义划分 .....	( 93)
第五节	节点、单元定义中一些其它问题的说明 .....	( 96)
<b>第八章</b>	<b>有限元计算中的简支梁 .....</b>	<b>( 97)</b>
第一节	支承问题 .....	( 97)
第二节	简支工字梁的二维及三维有限元计算 .....	( 99)
第三节	三种不同截面形状简支梁的有限元计算 .....	( 102)
<b>第九章</b>	<b>曲柄滑块机构 .....</b>	<b>( 103)</b>
第一节	曲柄滑块机构的运动分析和受力分析 .....	( 103)
第二节	曲柄滑块机构结构 .....	( 112)
第三节	曲轴设计计算 .....	( 115)
第四节	芯轴设计计算 .....	( 119)
第五节	连杆设计计算 .....	( 122)
第六节	滑块设计及有限元计算 .....	( 126)
第七节	板料折弯机滑块有限元计算 .....	( 131)
<b>第十章</b>	<b>机身 .....</b>	<b>( 133)</b>
第一节	压力机开式机身及有限元计算 .....	( 134)
第二节	剪板机和折弯机机身的有限元计算 .....	( 139)
第三节	压力机闭式机身 .....	( 143)
第四节	压力机闭式机身的有限元计算 .....	( 147)
第五节	框式整体机身和缠绕式机身的有限元计算 .....	( 156)
<b>第十一章</b>	<b>轴对称零件的有限元计算 .....</b>	<b>( 160)</b>
第一节	液压缸的弹性理论解 .....	( 160)
第二节	液压缸的有限元计算 .....	( 163)
第三节	锤杆的有限元计算 .....	( 164)
第四节	剪切式过载保护装置的有限元计算 .....	( 165)
<b>第十二章</b>	<b>曲柄压力机传动系统和电动机飞轮 .....</b>	<b>( 170)</b>
第一节	传动系统的布置及设计 .....	( 170)
第二节	电动机容量选择 .....	( 174)
第三节	曲柄压力机工作周期的能量损耗 .....	( 176)
第四节	飞轮设计 .....	( 180)
第五节	电动机选用 .....	( 183)
<b>第十三章</b>	<b>离合器和制动器 .....</b>	<b>( 186)</b>
第一节	刚性离合器 .....	( 186)
第二节	摩擦离合器—制动器结构 .....	( 188)
第三节	圆盘式摩擦离合器的设计计算 .....	( 193)
第四节	圆盘式摩擦制动器的设计计算 .....	( 198)
第五节	带式制动器 .....	( 201)
<b>第十四章</b>	<b>曲柄压力机的附属系统 .....</b>	<b>( 205)</b>
第一节	辅助装置 .....	( 205)
第二节	气动系统 .....	( 209)
第三节	润滑系统 .....	( 216)
第四节	安全保护装置 .....	( 218)

第十五章 专用曲柄压力机 .....	(220)
第一节 热模锻压力机 .....	(220)
第二节 冷挤压机 .....	(224)
第三节 拉延压力机 .....	(229)
第四节 板料多工位压力机 .....	(231)
第五节 板冲高速自动压力机 .....	(237)
参考资料.....	(243)

# 绪 论

锻压机械是为实现锻压工艺服务的。随着生产的发展，锻压机械已越来越广泛的应用于国民经济各部门的工业生产中，除机械制造业本身外，动力机械工业、船舶、电机、电器、汽车、拖拉机、农业机械、机车车辆制造业、航空航天工业，以及与人们日常生活密切相关的家用电器、日用五金等轻工业部门，均需要大量的锻压机械为之服务；随着科学技术的进步，需要更多、更好的各种锻压机械来进行各种锻压工艺，这就要求我们应用各种现代化的设计理论和计算方法，设计出自重轻、性能好、生产率高的各类新型锻压机械。

## 第一节 锻压机械分类及型号

锻压机械的类型很多，无论外形或驱动方式都有很大差别，但按照使工件发生塑性变形时（工作行程时）模具（或砧块）的运动情况，即按照工作行程时的速度—时间曲线，可以归纳为锻锤、液压机、曲柄压力机及旋转锻机等四大类。

### 一、锻锤

锻锤的代号为 C，目前它包括下列六组十二个系列的产品：

- (1) 蒸汽、空气自由锻锤；
- (2) 蒸汽、空气模锻锤；
- (3) 空气锤；
- (4) 落锤；
- (5) 对击式模锻锤；
- (6) 液压模锻锤。

锻锤的工作能力以落下部分的重量来表示，如 1t 蒸汽、空气模锻锤，就说明这台锻锤的落下部分重量为 10kN；65kg 空气锤是指它落下部分的重量为 650N。落下部分的重量包括活塞、锤杆、锤头、砧块（或上模）的重量之和（见图 1）。

锻锤的砧块（或上模）在工作行程开始时，即在它与锻件接触时，它的速度为最高值，经工作时间  $t_p$  后，速度急剧下降到零，速度—时间曲线是变量（见图 2(a)）；就是同一台锻锤，速度—时间曲线也不是固定的，它与很多因素有关，随着锻件的尺寸、形状、材料性质及加热温度的变化而不同；速度的最大值可达到  $7\text{m/s} \sim 9\text{m/s}$ ，工作时间  $t_p$  以千分之几秒来计算。

锻件塑性变形时，工作时间很短，因而锻件的变形只能依靠落下部分在工作行程开始前所积蓄的能量来完成。因为能量在极短时间里加到锻件上，可见锻锤是利用冲击来进行工作的，所以锻锤工作时的振动及噪音都很大。

图 1 锻锤

落下部分

1. 活塞；2. 锤杆；
3. 锤头；4. 砧块

图 2 各种锻压机械的速度—时间曲线

## 二、液压机

液压机的代号为 Y，目前包括以下十组十七个系列的产品：

- (1) 手动液压机；
- (2) 锻造液压机；
- (3) 冲压液压机；
- (4) 一般用途液压机；
- (5) 校正压装液压机；
- (6) 层压液压机；
- (7) 挤压液压机；
- (8) 压制液压机；
- (9) 打包、压块液压机；
- (10) 其它液压机。

液压机的工作能力以工作行程时所能发出的最大压力来表示，如 Y16—3000，表示 30000kN (3000t) 锻造模锻液压机。

液压机的砧块（或上模）在工作行程时的速度—时间曲线（见图 2 (b)）也是不定形的，但就其特性来说，与锻锤的速度—时间曲线又有很大差别，砧块（或上模）的初始速度可能等于零或某值，然后逐渐升到最高值，又逐渐下降，在工作行程结束时降为零。在同一台液压机上，由于加工件情况的不同，速度—时间曲线也不相同，除快锻液压机外，一般液压机的最高速度为 30cm/s，工作时间以秒为单位计算。

## 三、曲柄压力机

曲柄压力机是锻压机械中的大家族，“锻压机械型号编制方法”中所划分的八大类锻压机械里，有五大类与它有关；曲柄压力机的特点是，装在滑块上的模具由曲柄连杆机构带动进行工作，工作部分的速度—时间曲线是按照规定的正弦曲线变化，在工作行程也不例外（见图 2 (c)），与工件情况无关；这里忽略了机器在工作时的弹性变形及传动系统因飞轮转速下降而造成的不等速旋转等因素的影响。

曲柄压力机包括机械压力机中（代号 J）除螺旋压力机外的全部产品，以及线材成形自动

机(代号 Z)、锻机(代号 D)、剪切机(代号 Q)、弯曲校正机(代号 W)这四大类中的大部分产品。机械压力机中属于曲柄压力机的产品为:

- (1) 手动压力机;
- (2) 单柱压力机;
- (3) 开式压力机;
- (4) 闭式压力机;
- (5) 拉伸压力机;
- (6) 压制压力机;
- (7) 板料自动压力机;
- (8) 精压、挤压压力机;
- (9) 其它压力机。

曲柄压力机的工作能力,主要以在工作行程时能产生的最大压力来表示,有一些曲柄压力机如剪板机以所剪板厚乘板宽表示其工作能力,一些线材自动机以制件杆料最大直径表示它的工作能力。

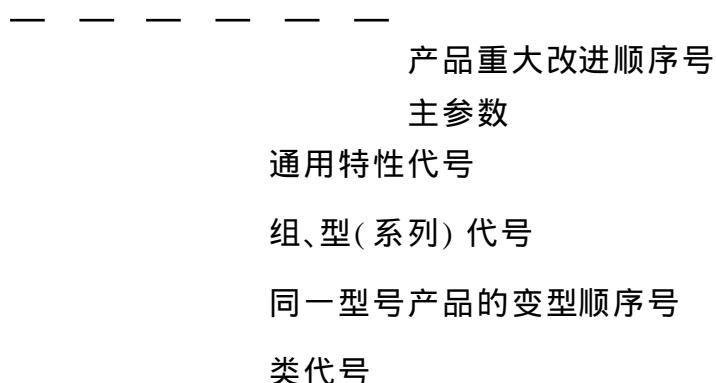
#### 四、旋转锻机

这类锻压机器主要指锻机类中的辊锻机,它的工作部分是加工成各种形状的辊子,作旋转运动,若不考虑传动系统转动的不均匀性,它的速度—时间曲线就是一条与横坐标平行的直线(图 2(d));它的工作能力以辊子直径表示;大型旋转锻机工作部分线速度为  $2.5\text{m/s} \sim 7\text{m/s}$ ,小型机为  $4.5\text{m/s} \sim 12\text{m/s}$ 。

根据国家标准(ZB—J62030—90)锻压机械型号编制方法的规定,锻压机械的型号包括锻压机械名称、主参数、结构特征及工艺用途的代号,由汉语拼音字母和阿拉伯数字组成。这个编制方法把锻压机械划分为八大类,其名称及代号如下:

机械压力机	(J)
液压机	(Y)
线材自动成形机	(Z)
锤	(C)
锻机	(D)
剪切机	(Q)
弯曲校正机	(W)
其它	(T)

每类锻压机械分为十组,每组分为若干型(系列),其表示方法如下:



同一型号产品的变型顺序号是指主参数之外的参数有改变的产品，按 A、B、C、D、... 顺序排列。

产品重大改进顺序号是指结构有重大改进的产品，也按 A、B、C、D、... 顺序排列。

锻压机械通用特性字母代号见表 1。

表 1 锻压机械通用特性字母代号表

通用特性	自动	半自动	数控	液压	缠绕结构	高速	精密	长行程或长杆	冷挤压	温热挤压
字母代号	Z	B	K	Y	R	G	M	C	L	W

举例说明如下：JB36—400A 表示该产品是机械压力机大类，参数第二次改变，属于第三组第六系列（闭式双点压力机），公称压力为 400t（4000kN），结构第一次改进。又如 WA67Y—63/2500 表示该产品是弯曲校正机大类，第一次改变参数，第六组第七系列（板料折弯机），液压传动，公称压力为 63t（630kN），折弯板料的最大宽度为 2500mm，可简称为 63t 液压板料折弯机。再如 Z11—4 是指线材成形自动机中的第一组——自动墩锻机，第一系列——单击整模冷墩机，加工杆件的最大直径为 4mm。

## 第二节 有限元概况及其在锻压机械设计中的应用

有限元是有限单元法的简称，它是一种结构分析方法。弹性有限元是有限元中的主要组成部分，它的理论基础是弹性力学及线性代数，运算工具是计算机，它是应用数学的一个重要分支。

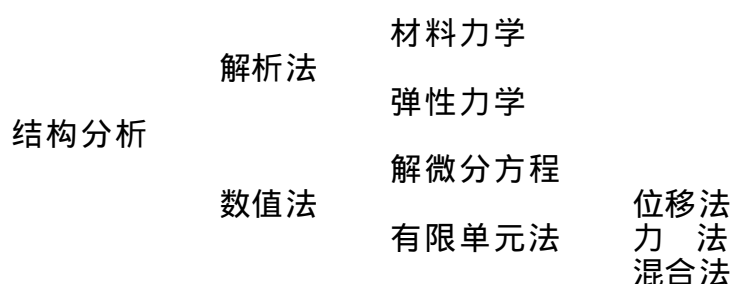


图 3 结构分析的树枝状图

在进行任何机器设计时，都需要进行结构分析，从而了解此机器各零部件能否满足强度和刚度的要求。结构分析有解析法和数值法两大类，解析法是用材料力学或弹性力学的基本方程来求解应力和变形，一般只适合解简单的问题，如细长杆、梁等，稍微复杂些的问题如果用解析法求解时，因为要进行较大的简化，计算精度很低。

数值法中的解微分方程法也是一种近似解法，对于复杂的结构和复杂的边界条件就不适用；数值法中的另一种解法是有限单元法，它首先是建立一个连续体的力学模型，然后把这个力学模型按一定规则划分为一定形状的很多小块，称这些小块为单元，假设它们只是一些点上联结，这些点就称为节点；单元可以分得比较小，但数量上不能无限多，所以，这种数值法就叫做有限单元法，它包括位移法、力法、混合法三种方法。结构分析的树枝状如图 3 所示。

位移法是以节点位移为基本未知量，它具有很强的通用性，公式简单，易于实现计算自动化等优点，应用得最为广泛，本书中只介绍这种方法。

力法是以节点力为基本未知量。

混合法是以部分节点位移及部分节点力为基本未知量。

应用有限单元法，将所建立的力学模型划分为很多单元，并确定边界条件，然后把有关数据送入计算机，应用计算机内存有的、已调试好的程序进行计算，得到节点位移及应力，从而可了解整个结构在外力作用下各处的应力分布及变形情况；如果应力分布不合理或变形太大，则需要修改机器结构，再次进行计算；这样反复几次，使得所设计的机器结构比较合理，自重轻，有较好的强度和刚度。在有限元应用于机械设计之前，由于解析法对实际的、形状复杂的机器简化得比较多，所以计算精度较低。为了确保机器质量，对一些重要的机器，往往需要先制造样机，对样机进行实测，根据测试结果来修改设计，这样就使研制周期拖得很长。如我国制造第一台万吨级自由锻造水压机时，就是先根据设计图纸缩小比例，设计制造了一台一千吨的模型机，对它进行实测，根据测试结果修改设计图，然后制造出万吨级水压机来。当应用有限元来进行设计计算时，可以使样机在设计阶段就比较合理。

锻压机械由于工作条件比较差，以前在计算方法不准确的情况下，为了保证机器安全，常采用加大安全系数的办法，从而使得机器结构粗笨，自重很重，应力分布也不尽合理。为了使锻压机械改变落后面貌，在锻压机械设计中应用有限元是很必要的。

为了形象地了解有限元的应用，下面举一个例子来说明：图 4 为一块在中心位置有一个椭圆形孔的平板，它的两端受到均匀分布、大小相等、方向相反的力的作用，现在要了解板上的应力分布，当应用材料力学方法计算时，可分别求得 A—A 截面上应力  $\sigma_a$  及 B—B 截面上的应力  $\sigma_b$ ，即

$$\sigma_a = \frac{P}{A_a}$$
$$\sigma_b = \frac{P}{A_b}$$

式中  $P$  —— 作用力；

$A_a$  —— A—A 截面的截面积；

$A_b$  —— B—B 截面的截面积。

由于  $A_a$  大于  $A_b$ ，所以  $\sigma_a$  小于  $\sigma_b$  (图 4 (a))，但实际上由于应力集中等因素的影响，B—B 截面上应力不是均布，而是如图 4 (b) 情况，所以用材料力学方法计算，不能准确反映比较复杂的形状物体的应力分布，而如果应用有限单元法则可求得较精确的解答。对于图 4 这

图 4 中空平板计算模型

种结构对称受力及支承条件也对称的物体，在有限元计算中，可取四分之一来进行计算。现把它划分为 33 个三角形单元，共 26 个节点；把作用力按等效原则移置到节点上，在中间垂直截面上，23、24、25 及 26 四个节点处于平板的垂直对称面上，受拉力作用时，只产生  $y$  向变形，不可能有  $x$  向变形，所以可用水平支杆来表示左半部结构对它的约束；同样在中间的水平截面上，1、2、3、4 四个节点也是处于对称面上，受力变形时只产生  $x$  向变形，而不可能有  $y$  向变形，所以加垂直支杆作为下半部结构对它的约束。值得注意的是在这个例子中，孔的位置正好在板的正中，长轴和  $y$  轴重合，所以可取四分之一来计算。划分完单元、处理好边界条件后，把有关数据输入计算机，经过运算，就可求得各单元应力及节点位移；单元分得越多，计算结果越精确，但计算工作量加大。

有限单元法有下列特点：

- (1) 直接从力学模型上划分单元，概念很清楚、直观，易于为工程技术人员所接受；
- (2) 有限元对于简单问题和复杂问题基本上同样对待，对各种复杂因素如复杂的几何形状、任意的边界条件等，都能灵活的加以考虑；
- (3) 有限元运算的各个环节容易标准化，所以便于掌握，设计程序比较容易，适合应用计算机来进行计算。

有限元这个概念早在 1934 年就已提出，由于它要解很多联立方程组，而当时缺乏合适的计算工具，所以未为人们所重视。到了 50 年代，由于航空和空间技术发展的需要，加上电子计算机已进入实用阶段，所以首先为航空工程师们所应用。1956 年，美国波音公司的 M·J·TURNER 和华盛顿大学的 H·C·MARTIN 等人发表题目为“复杂结构的刚性和挠度分析”的论文，介绍有限元在后掠机翼结构分析上的应用。有了电子计算机这一得力工具，有限元的应用迅速发展，在飞机、船舶、机械制造、土木建筑等部门得到广泛的应用，并从固体力学发展到流体力学、热力学、电磁场等领域，有无限广阔的发展前景。

我国在 60 年代初，由大连理工大学的冯康教授等，开始了对有限元的研究；在 70 年代，包括北京工业大学在内的许多高校，开始研究将有限元应用于锻压机械设计，并取得了很大成绩；机械部济南铸造锻压机械研究所总工程师闵学熊高工，在“我国锻压机械的现状与展望”一文中，对有限元在我国锻压机械设计中的应用作了如下介绍：“许多高等院校如清华大学、上海交大、西安交大、华中工学院、北京工业大学、重庆大学、天津天学等等，广泛应用优化设计理论、有限单元法对锻压机械主要零件，如开式压力机床身、闭式压力机床身、钢丝缠绕机架、摩擦压力机床身、法兰支承油缸、压力机主传动的偏心轴等进行强度、刚度的现代化设计计算。”（见《锻压机械》1988 年第一期）

北京工业大学锻压教研室在黄乃强教授领导下，于 70 年代中期开始，研究将有限元应用于塑性成形及锻压机械设计中，先后对开式压力机机身、闭式压力机机身、剪板机机身、框式整体机身、闭式双点压力机滑块、板料折弯机主要零部件（机身、工作台、滑块、前后面板等）、液压油缸以及机械压力机的保险块等进行过有限元计算，取得了一些成果，在全国性和地区性学术会议上宣读过多篇学术论文，其中有的获优秀论文奖；在全国性刊物如《锻压机械》、《计算机世界》以及《北京工业大学学报》上发表过多篇论文，其中有的被国外杂志《METALS ABSTRACTS》(VOL 26 DEC.1993) 摘登。

# 第一章 有限元计算步骤

从绪论中所举平板拉伸的例子中可以看到，进行有限元计算时，首先划分单元，并将作用力按等效原则移置到节点上去，这样一个过程称为离散化；接着进行单元分析，了解一个单元里节点力和节点位移的关系；最后是单元综合，即利用节点平衡方程式，在已知节点力的情况下，联系边界条件，求出节点位移，然后求得各单元应力或节点应力。在平面问题中，每个节点有两个位移分量  $u$ 、 $v$ ，每个节点上的力亦可分解为  $x$  向和  $y$  向的两个节点力分量  $U$ 、 $V$ ；如果所计算的力学模型总共有  $n$  个节点时，节点力  $\{F\}$  为  $2n \times 1$  矩阵，节点位移  $\{ \}$  也是  $2n \times 1$  矩阵，且两者有如下关系：

$$\{F\} = [K]\{ \}$$

式中  $[K]$  ——转换矩阵，是  $2n \times 2n$  矩阵。

因为节点数可以从几个到几百个、上千个，所以从这里也可以看到，有限元计算中必需应用计算机。

## 第一节 离散化

离散化是指将连续的弹性体划分成有限个单元组成的离散体，并把作用力按等效原则移置到各节点上，所以首先要了解单元都有些什么样的类型。

### 一、单元类型

#### 1. 一维单元

杆单元，如图 1-1 (a)。

#### 2. 二维单元

二维单元是平面单元，如图 1-1 (b)。在平面问题中，最常用的是三角形三节点单元、矩

图 1-1 单元类型

形四节点单元及任意四边形四节点单元，还有一些多节点单元，如在上述单元中，在每边中点增加一个节点的三角形六节点单元、矩形或任意四边形八节点单元等。一般来说，一个单元的节点数越多，计算精度就越高，但是位移函数的次数也高，计算也复杂。对于一般平面问题，当单元划分得较细时，三角形三节点单元能满足计算精度要求。

### 3. 三维单元

三维单元是立体单元，见图 1-1(c)。在空间问题中，有四面体、棱柱体、长方体、任意六面体等单元，每类单元节点数不同，同一类单元也可有不同节点数，如长方体和任意六面体单元中，最少为 8 个节点，最多可达 21 个节点——角上 8 个节点，12 条边的中点 12 个节点，单元中心 1 个节点。同平面问题一样，单元节点数多时计算精度也高，但计算时间会大大增加。

图 1-2 截面积相同形状不同的简支梁

对于图 1-2 的几种不同截面形状的简支梁，由于截面积相等，当作为平面问题来看待时，它们的有限元计算结果是完全一样的，但采用立体单元计算时，计算结果有较大差别。

此外还有梁单元、板单元、壳单元等。在本书中重点介绍三角形三节点单元及三角形六节点单元。

## 二、单元划分注意事项

### 1. 单元边界线

在所研究的力学模型中，各处厚度不相等是经常遇到的，有时还会遇到不同材料的问题，所以划分单元时，每个单元的材料必须相同，厚度也应相等，也就是说，力学模型上的厚度及材料变化线必须是所划分单元的边界线。

### 2. 划分单元的多少

单元的多少取决于结构特点、受力状况，也与所用计算机容量有关。结构复杂时单元必然划分得多，单元分得多计算精度就高，但要求计算机容量大，计算的时间也增多。为了兼顾各方，在预计应力比较高的区域，或结构复杂的部位，单元划分得细些，其余地区可划分得粗些。

### 3. 边界条件的处理

边界是曲线时，用直线近似代替曲线作为单元的一边。图 4 中的圆弧部分有六个节点，所以是用五条直线组成的折线来代替圆弧。如果这部分只有三个节点，就变成用二条直线来代替曲线，从直观感觉上就可发现有较大的误差，当然计算结果有较大误差。

### 4. 节点位置

任意一个单元，角上的节点必须是相邻单元的角点，而不允许是边上的点，图 1-3 的三角形单元划分中，(a)、(b)、(c) 均是允许的，而 (d) 则是不允许的，因为单元、是三节点单元，单元成了四节点单元。

### 5. 单元边长与夹角的关系

同一个单元里，各边长度不要相差太大，对于三角形单元，最长边与最短边之比不要大于 3:1；夹角以在 30°~90° 之间为好，不要出现大的钝角，如图 1-3 (e) 的物体，同样分成

两个单元，右边划分方式的计算精度就比较高。

图 1-3 划分单元注意事项

### 6. 利用对称性

对于结构、受力及支承条件都是对称的结构，可以只计算一部分，其余部分对它的影响可以用增加约束条件来处理，以减少计算工作量。图 4 的椭圆孔平板就因为结构、受力及支承完全对称，所以可取四分之一来计算；闭式压力机机身作为平面问题时取二分之一计算，当按空间问题处理时，可取四分之一来进行计算。

单元划分是有限元计算中十分重要的一个步骤，要予以充分重视。

### 三、外载荷向节点移置

在力学模型的边界上，有可能作用着各种力，如集中力、均布力、呈三角形或梯形分布的力。对于作用着的集中力，可以直接取力的作用点为节点，或者把集中力按静力等效的原则移置到附近的节点上去。图 1-4 (a) 的单元中， $ij$  边上作用着集中力  $P$ ，移到节点  $i$  的力为  $P_i$ ，移到节点  $j$  的力为  $P_j$ ，当  $P$  力作用点距  $i$  节点为  $a$ 、距  $j$  节点为  $b$  时，则

$$P_i \cdot a = P_j \cdot b$$

$$P = P_i + P_j$$

图 1-4 外载荷向节点移置

当一个单元里，边长为  $L$  的边上作用均布力  $q$  时（见图 1-4 (b)），则这边上两个节点上的节点力相等，即

$$P_i = P_j = \frac{qL}{2}$$

当边长为  $L$  的  $ij$  边上作用着呈三角形分布的力时（见图 1-4 (c)），边上全部的作用力为  $qL/2$ ，则

$$P_i = \frac{qL}{6}$$

$$P_j = \frac{qL}{3}$$

原载荷与移置载荷之间应满足如下的关系：原载荷在虚位移上所作虚功，等于移置载荷在虚位移上所作的虚功之和。

对于如图 1-4 (d) 这样的复杂受力情况，可以按力的独立作用原理，将其分解为均布力及三角形分布的力，分别移置后叠加。

对于分属两个单元的节点，如图 1-5 (e) 中的 j 节点，该节点的节点力是两个单元各自对该节点的移置载荷的叠加，即 j 节点的节点力包括从单元 移置来的  $P_j$  力与从单元 移置来的  $Q_j (= qL/2)$  力之和。

单元体的自重按三分之一均布到各节点上去，方向垂直向下。由于锻压机械的受力远远大于自重，所以实际计算中忽略自重作用。

## 第二节 单元分析

单元分析的任务是通过节点位移来表示单元内部任一点的位移，从而建立起节点力和节点位移之间的转换关系。

在平面问题的三角形三节点单元中，每个节点都有一个编号，叫做节点码。一个单元里三个节点的节点码组成单元节点码，要注意，单元节点码必须逆时针编写，如图 1-5 所示单元的三个节点编号为 i、j、m，单元节点码编号可以是 i、j、m，j、m、i 或 m、i、j，但不允许顺时针取 i、m、j。

图 1-5 节点位移分量及节点力分量

每个节点都有两个位移分量，称水平分量为  $u$ ，垂直分量为  $v$ ，所以三角形三节点单元位移  $\{ \}^e$  有六个位移分量，也叫做六个自由度，其位移可表示为

$$\{ \}^e = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m]^T$$

和位移分量对应的是节点力向量，每个节点上都有力，都可分解为水平方向的力  $U$  及垂直方向的力  $V$ ，所以也是六个分量，可表示为

$$\{F\}^e = \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_m \\ V_m \end{bmatrix} = [U_i \quad V_i \quad U_j \quad V_j \quad U_m \quad V_m]^T$$

在单元分析中，求得节点力与节点位移的转换关系：

$$\{F\}^e = [K]^e \{ \delta \}^e$$

式中  $[K]^e$ ——单元刚度矩阵，在三角形三节点单元中是  $6 \times 6$  矩阵。

单元分析的核心就是求出单元刚度矩阵。

假设已知节点位移  $\{ \delta \}^e$ ，就可以求得单元内任一点的位移  $\{ \delta \}$ ，应用几何方程可以求出单元应变  $\{ \epsilon \}$ ，进而应用弹性方程求解单元应力  $\{ \sigma \}$ ，然后用虚功方程求得节点力  $\{F\}^e$ ，即有如下转换关系：

$$\begin{aligned} \{ \delta \} &= [B][ \delta \}^e \\ \{ \epsilon \} &= [D][ \delta \} \\ \{F\}^e &= [B]^T \{ \sigma \} tA \\ \{F\}^e &= [K]^e \{ \delta \}^e \\ [K]^e &= [B]^T [D] [B] tA \end{aligned}$$

式中  $[B]$  ——几何矩阵；  
 $[D]$  ——弹性矩阵；  
 $t$  ——单元厚度；  
 $A$  ——单元面积。

### 第三节 单元综合

离散化是拆整为零，单元综合是集零为整，是利用节点平衡方程，求得各节点位移。在单元分析中，已求出单个单元的方程，但是孤立的一个个单元是没有办法求解的，如图 1-6 中的  $i$  节点，它是  $e_1$ 、 $e_2$ 、 $e_3$  三个单元的公共点，在三个单元的单元分析中，该节点都各自存在  $U_i$ 、 $V_i$  两个作用力，而且该节点上还作用着外力  $P_{xi}$  及  $P_{yi}$ ，所以  $i$  节点上总的节点力为

$$\begin{aligned} U_i^e &= U_i^1 + U_i^2 + U_i^3 \\ V_i^e &= V_i^1 + V_i^2 + V_i^3 \end{aligned}$$

建立这个节点的平衡方程式

$$\begin{aligned} U_i^e &= P_{xi} \\ V_i^e &= P_{yi} \end{aligned}$$

对于  $j$  节点，因为没有外力作用，则

$$U_j^e = U_j^1 + U_j^2 + U_j^3 = 0$$