第 1 章

自动控制的基本概念

1.1 自动控制

自动控制是根据人工操作（或称人工控制）的过程发展而来的。通过以下两个例子，我们可以了解人工操作与自动控制之间的关系。

例 1　机床加工零件。人工操作的过程是：根据技术要求，制定出加工的工艺流程，即操作方案，操作人员根据这个方案按部就班地进行操作，从而加工出合格的零件。其过程可以用图 1.1(a)来表示。如果我们把操作方案编制成程序，存入一个控制器中，由控制器发出各种操作指令，使机床按确定的顺序和要求动作，同样可以加工出合格的零件。这个过程，不需要操作人员直接操作，实现了机械零件的自动加工。其加工过程可以用图 1.1(b)来表示。

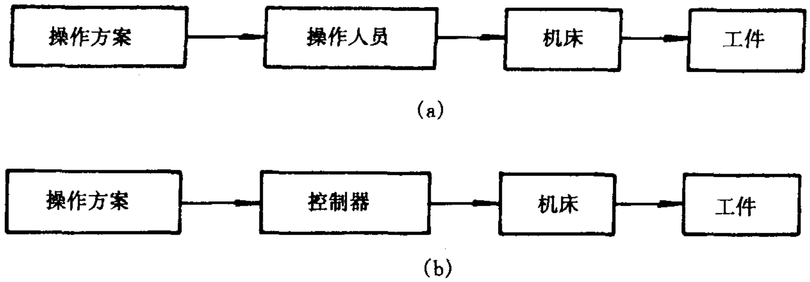

图 1.1　机床加工零件示意图
(a) 人工操作过程；(b) 自动控制过程

例 2　水箱水位的控制。在化工、电力、轻工、环境保护，城市给排水等许多部门都常常遇到水位(液位)的控制问题。图 1.2 是人工控制一个水箱的水位的示意图。

操作人员从水位检测装置上读出水位值，这是水位的检测过程。然后，操作人员和预先确定的水位比较，求出实际水位和给定水位之间的偏差，再根据偏差的大小及方向确定进水阀门是应该开大还是应当关小以及阀门开或关的幅度。这个过程是判断决策过程，是通过操作人员的大脑完成的。最后，操作人员对阀门进行具体操作，这是控制决策的执行过程。不断重复以上几个过程，直到水箱水位达到预定的水位，整个操作过程就结束了。如果用检测变送仪表完成检测过程，用控制器代替人脑完成比较、判断决策过程，用机械的或电气的操作装置代替人工操作阀门，就可以实现对水位的自动控制。用来代替操作人员的测量变送仪表、控制器和操作装置等称为自动控制装置。图 1.3 表示了水箱水位自动控制系统的组成原理。

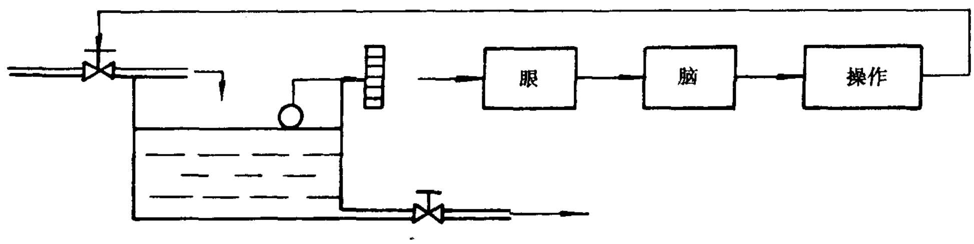

图 1.2　人工控制水箱水位的示意图

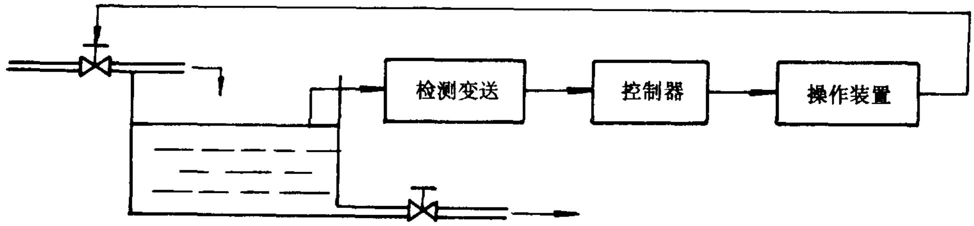

图 1.3　自动控制水箱水位的原理图

通过以上例子可以看出，所谓自动控制就是不需要人工直接操作，而是通过控制器等若干种自动控制装置，使被控制的参数按照指定的规律变化。自动控制装置延伸并扩大了人的功能。自动控制源于人工控制，但却完成了由人操纵机器到机器（自动装置）操纵机器的飞跃。自动控制的应用给人类的发展与进步带来了不可估量的影响。同时控制科学与技术与其他学科相互渗透，推动了其他理论与技术的发展，也促进了控制理论与技术自身的发展。例如，控制理论与技术与计算机科学与技术，人工智能，信息技术，系统理论的结合，促进了许多高新技术产业的形成。再如，工业生产中的单纯生产过程控制已远远不能满足社会经济发展的需要，为了提高企业高质量、高节能、高效益和高持续发展的能力，就必须把生产技术，管理和人集成到一个综合自动化系统中，逐步实现工业生产的计划，决策，设计研究，制造，市场的开发与经营的全面自动化。

近年来，控制科学与技术早已越过了传统的应用范围，广泛地扩展到了环境、医学、生物、经济管理和其他社会科学学科以及办公室、家庭等社会生活领域。因此，学习和掌握控制工程的基本知识，已不再仅仅是自动化专业学生的任务。其他各学科领域的学生也应把它作为自己必须具备的基本知识来学习，在学习过程中扩充自己的知识面，拓展自己的思路，培养自己的创新意识和综合运用各类知识的能力，全面提高自身的素质。

1.2　反馈控制的基本原理

分析上节中的水箱水位自动控制的例子，被控制的物理量是水位，加在进水阀上的控制作用是由控制器产生的，而控制器则是按实际水位和给定水位的偏差产生控制作用的；这种从被控制的变量中取得控制信息又用来控制被控制变量的控制方法，称为反馈控制。反馈控制系

统的原理如图 1.4所示。

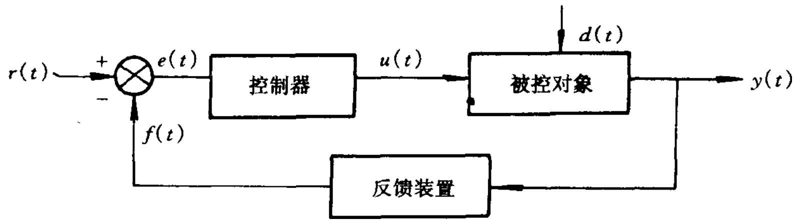

图 1.4 反馈控制系统原理图

在图 1.4 中，$y(t)$称为被控变量或输出变量，它是被控对象需要被控制的量；

$r(t)$称为输入变量或给定值，是输出变量的希望值。 $f(t)$称为反馈变量，它是输出变量的一部分或全部，反映了输出变量的变化；

$e(t)$称为偏差变量；$u(t)$称为控制变量，它是根据偏差变量由控制器按一定的函数关系产生的，$u(t)$对输出变量 $y(t)$有直接的影响。

控制器、反馈装置等都是自动控制装置。在多数情况下，反馈装置就是输出变量的测量变送装置。被控对象与自动控制装置的组合，就构成了一个自动控制系统。图 1.4 所示的控制系统称为反馈控制系统。由于信息的传递可以构成一个闭合环路，所以又称闭环控制系统。从输入端到输出端的信号传递路径称为前向通道，从输出端到输入端的信号传递路径称为反馈通道。

反馈控制的原理是将输出变量 $y(t)$经反馈装置传送到输入端并且与给定值比较，产生偏差变量

$$e(t) = r(t) - f(t)$$

这种反馈称为负反馈。控制器根据偏差 $e(t)$产生相应的控制变量 $u(t)$,从而把控制作用加在被控对象上，使输出变量向消除偏差的方向变化。因此，反馈控制是按偏差进行控制的，即输入变量 $r(t)$与输出变量 $y(t)$共同参与了控制过程。

图 1.4 中还有一个变量 $d(t)$ 称为扰动变量。凡作用在控制系统中，可以引起输出变量 $y(t)$变化的除去控制变量 $u(t)$以外的其他因素，都可以称为扰动。扰动变量可以分为内扰和外扰两类。由反馈控制系统内部产生的扰动，如元件参数的变化，称为内扰。而由反馈控制系统外部引入的扰动，如负载变化，能源变化等，称为外扰。扰动对控制系统是一种不利因素。克服扰动对输出变量的影响是反馈控制系统的主要任务之一。扰动变量 $d(t)$对整个反馈控制系统来说也是一种输入变量。为了区别，把给定值称为控制输入变量，把扰动变量称为扰动输入变量。

1.3 控制系统的分类

自动控制系统可以按多种方法进行分类。以下是几种常见的分类方法。

1.3.1 线性系统与非线性系统

这是按照控制系统特性进行分类的方法。

线性控制系统是由线性元件构成的系统。线性元件是指输入和输出静特性的关系为线性的元件。也可以说，线性系统是可以用线性微分方程描述的系统。当线性微分方程的系数为常数时，称为线性定常系统。当线性微分方程的系数是时间的函数时，称为线性时变系统。线性系统的主要特点是满足叠加原理和齐次原理。叠加原理是指当系统有多个输入时，系统的输出等于每个输入单独作用下系统的输出之和。齐次原理是指当输入增大或缩小若干倍时，系统的输出也相应增大或缩小若干倍。所以，还可以这样说：凡是既满足叠加原理又满足齐次原理的系统就是线性系统。

若控制系统中至少含有一个非线性元件，系统就是非线性系统。或者说用非线性微分方程描述的系统就是非线性系统。非线性微分方程的特点是系数与方程变量有关。例如非线性方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = r \tag{1.1}$$

可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = r \tag{1.2}$$

式中$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$项的系数$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y\right)$就与方程的变量$y$有关。

实际上理想的线性系统是不存在的，但在一定条件下，如变量在工作点附近做小范围的变化，或忽略系统中的一些次要因素等，许多非线性系统可以近似为线性系统。线性系统在数学上处理较为容易，线性系统理论也相当成熟，而非线性系统目前还缺少统一的数学处理方法。本书所讨论的系统都是线性定常系统。

1.3.2 开环控制系统与闭环控制系统

这是按照控制系统结构进行分类的方法。

开环控制系统的原理如图 1.5 所示。图中，由于不存在从输出端到输入端的反馈回路，所以称为开环控制系统。

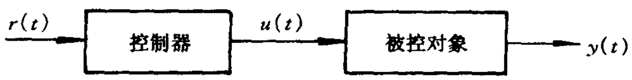

图 1.5　开环控制系统的原理图

在开环控制系统中，控制变量$u(t)$只根据控制输入变量$r(t)$产生，输出变量$y(t)$在控制过程中对控制变量不产生影响。

开环控制系统比较简单，反应速度快。当控制系统受到各种扰动作用时，输出变量会产生一定的误差。开环控制在原理上没有修正误差的能力，这就影响了开环控制的精度。若要达到较高的控制精度，必须选用精度高，抗干扰能力强的元器件，这就增加了控制系统的投资。

开环控制的应用相当广泛。轻工、食品、机械加工、纺织等许多行业的自动生产线都是按开环控制设计的。家用洗衣机以及某些家用电器也是按开环控制设计的。

闭环控制是按偏差控制的，以检测偏差、消除偏差为特征。各种扰动对被控变量产生的影响，都可以通过偏差检测出来，控制系统都能自动纠正。所以，闭环控制系统具有较强的抗干

扰能力，因而组成系统的元件不必要求太高仍可得到较高的控制精度。但闭环控制由于反馈的存在，可能引起控制过程的振荡，使控制系统不能稳定地工作。闭环控制的应用非常广泛。我们所说的自动控制系统，一般都是指闭环控制系统。

1.3.3 恒值控制系统与随动控制系统

恒值控制系统与随动控制系统是根据控制系统的控制输入变量 $r(t)$进行分类的方法。

当控制系统的控制输入变量 $r(t)$(即给定值)为常量时,称控制系统为恒值控制系统,又可称为恒值调节系统。这类控制系统的任务就是克服各种扰动对系统的影响，使输出变量与给定值保持一致。

在有些情况下，控制系统的输入变量不可能事先确定，即 $r(t)$是时间的随机函数。如拦截飞行器的导弹的控制，电力生产中负荷的控制等。这类控制系统的任务就是要保证输出变量以一定的精度快速跟随输入变量 $r(t)$的变化。这种控制系统称为随动控制系统。

实际应用中的控制系统，有时为了满足较高的控制要求，往往采用既有调节功能，又有随动功能或其他控制功能的综合控制方式。

1.3.4 单变量系统和多变量系统

单变量系统又叫单输入单输出控制系统（SISO)，是只有一个输入变量和一个输出变量的控制系统。

随着生产和科学技术的发展，被控对象越来越复杂，控制要求也越来越高，因而出现了多变量控制系统，即多输入多输出控制系统(MIMO),这类控制系统中,变量之间相互耦合,控制难度较大，控制系统的结构也比较复杂。

1.3.5 连续系统和离散系统

若控制系统中各部分的信号都是连续的（即是时间的连续函数），称这类控制系统为连续系统。

在控制系统中，只要有一处信号是不连续信号，则称其为离散系统。离散系统中的信号是脉冲信号。离散系统中应用最广泛的是采样控制系统。通过采样开关，可以把连续信号变为脉冲序列信号（采样信号），这样的控制系统称为采样控制系统。如果对采样信号进一步量化为数码信号，这类控制系统则称为数字控制系统。应用计算机构成的数字控制系统已经获得了广泛的应用。

1.4 控制系统举例

本节给出一些自动控制应用的例子。通过这些例子的分析，可以进一步加深对自动控制基本概念的理解。

例 1 图 1.6 是一个数控机床的控制原理图。在机械零件加工前，先由技术人员根据技术要求将有关工艺步骤及数据编成程序输入到计算机中。计算机按照程序向数字脉冲控制元件发出各种指令，数字脉冲控制器按照这些指令对脉冲进行分配及功率放大，驱动步进电机，

带动刀具对零件进行加工。

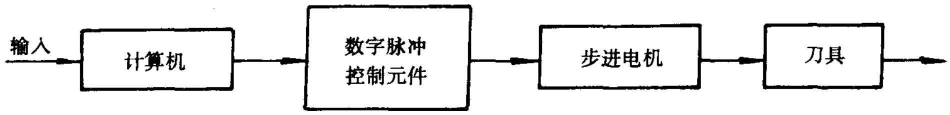

图 1.6 数控机床的控制原理

这是一个开环控制的例子。由于采用了计算机、数字脉冲技术和步进电机，控制精度较高。若自动控制系统的输入是时间的已知函数，即预先规定了系统的动作顺序及动作转换条件，控制系统根据输入的程序发出控制指令，这类控制方式称为顺序控制。顺序控制在操作过程复杂、操作频繁且有规律性的场合应用非常普遍。

例 2 传热设备的控制。图 1.7 是一个热交换器的控制原理图。工艺介质通过热交换器被蒸汽加热，要求工艺介质出口温度恒定。该方案采用了反馈控制系统。用温度测量变送仪表测量工艺介质的出口温度并转换为电信号，该信号在控制器中经过与给定值比较，求出偏差，控制器对偏差进行运算，产生控制指令信号，控制信号加在流量调节阀上，通过控制加热蒸汽的流量来控制工艺介质的出口温度。采用反馈控制方案，不论任何因素的扰动对工艺介质出口温度的影响，都可以得到克服，使工艺介质出口温度与给定温度保持一致。

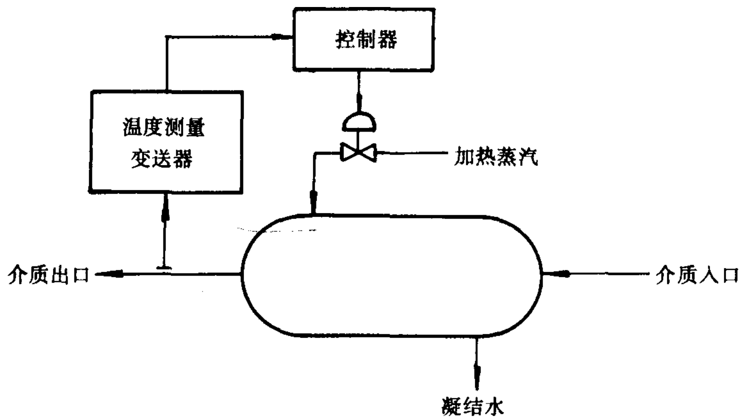

图 1.7 热交换器的控制原理图

例 3 图 1.8 是一个恒压自动供水系统的控制原理图。

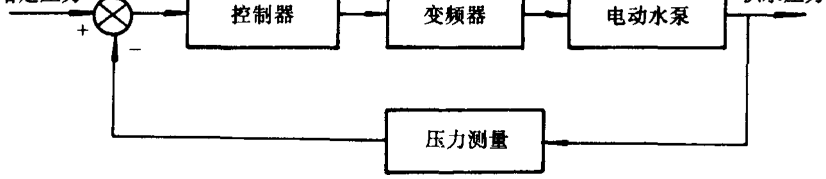

图 1.8 恒压自动供水系统的控制原理图

随着城市建设的发展和高层建筑的增多，传统的高位水箱（水塔）供水方式由于建筑成本高又存在二次污染而逐步被其他现代化供水方式取代。图 1.8 所示的系统，无论供水流量大小，供水系统都能自动维持供水管网的压力不变。压力测量变送仪表测出水泵出口压力并与设定压力比较，控制器根据偏差控制变频器的频率从而改变水泵转速，使水泵出口压力保持恒定。该系统使用了变频调速现代技术。变频器是集微电子、电力电子和控制技术于一体的高技术产品。它通过将固定频率的电网交流电转换成电压可调、频率可调的交流电，实现对交流电机的调速。

例 4　家用电冰箱的温度控制原理如图 1.9 所示。用户在温控器上设置自己需要的冰箱温度，即提供控制系统的给定值。安装在冰箱内的感温元件测出的温度与给定温度比较，控制器根据偏差，按冰箱温控特性曲线通过继电器控制压缩机停止或工作，从而使冰箱温度得到控制。

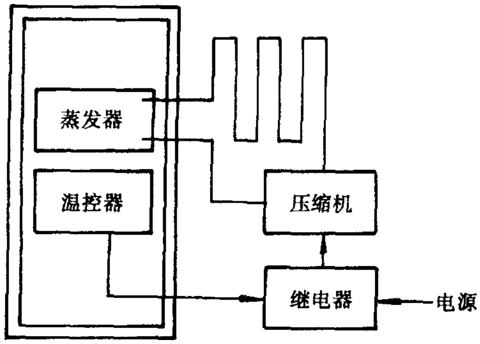

图 1.9　电冰箱的温度控制原理

思考讨论题

1.1　举出我们见到的自动控制的例子，说明其工作原理。

1.2　应用反馈控制的主要目的是什么？

1.3　1.4 节的例 3 中的恒压供水可否改为开环控制？和闭环控制相比有什么特点？

1.4　1.4 节的例 4 中冰箱温度能否与给定值保持一致？为什么要采用例 4 中的控制方法？你有什么其他控制方案？

第 2 章 控制系统的数学描述

2.1 控制系统的数学模型

在自然科学、社会科学及日常社会生活中，人们广泛地使用各种模型来表示现实事物。模型反映了实物某一方面的属性和特征，是对现实事物的一种表示形式。例如，地球仪是地球的一种模型，军事演习是实战的一种模型，实验室的某些装置是工厂大型设备的模型等。以上这些模型是以实物来表示实物，可以称为具体模型或物理模型。如果对现实事物进行简化、抽象,用方程、公式、图表、曲线等来描述客观事物的内在规律,揭示其运动的本质,我们则称这些数学表达式、图表、曲线等是现实事物的数学模型。数学模型舍弃了现实事物的具体特点而抽象出了它们的共同变化规律。因此，这类模型称为抽象模型。

为了对控制系统进行定性和定量的分析研究，深刻地揭示控制学科的内在规律，建立控制系统的数学模型成为一项必不可少的工作。

控制系统的数学模型主要是指描述控制系统及其各组成部分特性的微分方程、状态空间表达式、差分方程、传递函数、频率特性以及基于神经网络、模糊理论而建立的模型等。

建立控制系统的数学模型有两种基本方法：一种是根据控制系统内部的运动规律，分析各种变量间的因果关系而建立起来的系统的数学模型。这种方法称为机理建模或理论分析法；另一种方法则是根据实际测试的数据或计算数据，按一定的数学方法，归纳出系统的数学模型，这种方法称为系统辨识法或试验分析法。在对控制系统的运动机理、内部规律比较了解的情况下，适合应用机理建模法。用这种方法建立的数学模型，能科学地揭示系统内部及外部的客观规律，因而代表性强，适应面广。在系统运动机理复杂很难掌握其内在规律的情况下，往往需要按系统辨识的方法得到系统的数学模型。这种模型是根据具体对象而得出的，因而适应面较窄,通用性差。

建立控制系统的数学模型，是分析研究控制系统的基础。描述各种客观事物内在规律最基本的数学工具就是微分方程。下面，我们通过一些实例，来讨论建立控制系统微分方程的一般过程。

建立控制系统微分方程的主要步骤有：

(1)明确要解决问题的目的和要求，确定系统的输入变量和输出变量。

(2)全面深入细致地分析系统的工作原理、系统内部各变量间的关系。在多数情况下，所研究的系统比较复杂，涉及到的因素很多，不可能把所有复杂的因素都考虑到。因此，必须抓住能代表系统运动规律的主要特征，舍去一些次要因素，对问题进行适当的简化，必要时还必须进行一些合理的假设。

(3）如果把整个控制系统作为一个整体，组成控制系统的各元器件及装置则可以称为子系统。从输入端开始，依照各子系统所遵循的物理定律或其他规律，写出子系统的数学表达式。

(4)消去中间变量，最后得到描述输入变量与输出变量关系的微分方程式。

(5)写出微分方程的规范形式，即所有与输出变量有关的项应在方程左边，所有与输入变量有关的项应在方程右边，所有变量均按降阶排列。

系统微分方程的一般形式是

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = b_m \frac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}t^m} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + b_0 x \qquad (2.1)$$

式中：y为输出变量；

x 为输入变量；

a_n，a_{n-1}，$\cdots$，a_0 和 b_m，$\cdots$，b_1，b_0 为方程的系数。

本书只讨论线性定常系统，因此，这些系数均为常数。

由于控制系统的被控对象和控制元件都具有惯性，当输人量发生变化时，输出量不可能在瞬时完成对输入量的响应，而必须经历一个过渡过程即动态过程，所以我们把描述控制系统的微分方程又称为动态方程。

例 1　机械运动系统的数学模型。图 2.1 是一个由弹簧、质量块和阻尼器构成的机械运动系统。

弹簧的劲度系数为 k(N/m)

质量块的质量为 m(kg)

阻尼器的阻尼系数为 f(N·S/m)

阻尼器是吸收系统能量的一种装置，其产生的阻力与活塞运动的速度和阻尼系数成正比。我们现在来建立质量块在外力 $F(t)$ 作用下位移变化 $x(t)$ 的方程。很显然，这个系统的输入变量为 $F(t)$，输出变量为$x(t)$。为了使问题简化，我们忽略质量块重力的影响。

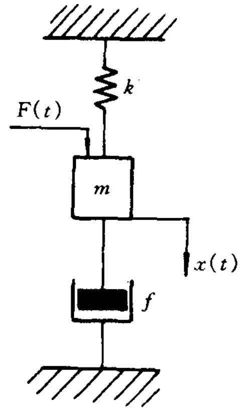

图 2.1　机械运动系统

作用于质量块的合力 P 为

$$P = F(t) - kx(t) - f\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \qquad (2.2)$$

根据牛顿定律

$$P = m\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t}$$

消去中间变量 P，写成规范形式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + f\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + kx(t) = F(t) \qquad (2.3)$$

这个二阶常微分方程就是我们要建立的机械运动系统的数学模型。

例 2　直流电动机的数学模型。直流电动机可以在较宽的速度范围和负载范围内得到连续和准确的控制，因此在控制工程中应用非常广泛。直流电动机产生的力矩与磁通和电枢电流成正比，通过改变电枢电流或改变激磁电流都可以对直流电机的力矩和转速进行控制。图 2.2 是一个电枢控制式直流电动机的原理图。在这种控制方式中，激磁电流恒定，控制电压加

在电枢上，这是一种普遍采用的控制方式。

设 $u(t)$为输入的控制电压（V）

i 为电枢电流(A)

M 为电机产生的主动力矩(N·m)

M_r 为负载力矩（N·m）

ω 为电机轴的角速度（rad/s）

L 为电机的电感(H)

R 为电枢导线的电阻（Ω）

$e(t)$为电枢转动中产生的反电势(V)

J 为电机和负载的转动惯量（kg·m²）

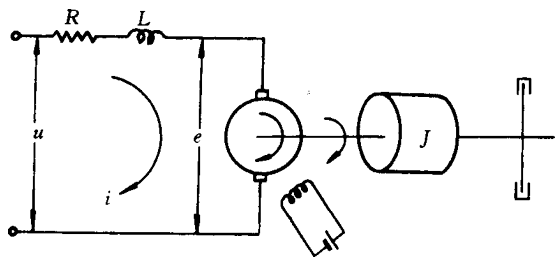

图 2.2 直流电动机

根据电路的克希霍夫定理

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+e_{(t)}=u_{(t)}$$

电机的主动转矩

$$M=\frac{K_m}{i_{(t)}}$$

其中 K_m为电机的力矩常数。

反电势

$$e_{(t)}=K_e\omega_{(t)}$$

式中 K_e 为电机反电势比例系数

力矩平衡方程

$$M-M_r=J\frac{\mathrm{d}\omega_{(t)}}{\mathrm{d}t}$$

消去中间变量 $M(t),e(t),i(t)$后得到

$$\frac{LJ}{K_m}\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2}+\frac{JR}{K_m}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+K_e\omega=u-\left(\frac{L}{K_m}\frac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{K_m}M_r\right)$$

整理后

$$T_eT_m\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2}+T_m\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\omega=K_1u-K_2\left(T_e\frac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{K_m}M_r\right)\tag{2.4}$$

式中：$T_e=\frac{L}{R}$ 称为直流电动机的电气时间常数

$T_m=\frac{JR}{K_eK_m}$ 称为直流电动机的机电时间常数；

$K_1=\frac{1}{K_e},K_2=\frac{R}{K_mK_e}$为比例系数。

直流电动机电枢绕组的电感比较小，一般情况下可以忽略不计，式（2.4)可简化为

$$T_m\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\omega=K_1u-K_2M_r\tag{2.5}$$

例 3 液位系统的数学模型。图 2.3是一个液位系统。

设液箱的横截面积为 $C(\mathrm{m}^2)$。在稳定状态下，流入液箱的水和流出液箱的水流量相同，均为 $Q_0(\mathrm{m}^3/\mathrm{s})$,此时液箱的水位为 $H_0(\mathrm{m})$。当流入液箱的流入量有一增量 $q_i(\mathrm{m}^3/\mathrm{s})$时，我们

来建立水位增量 h(m) 的微分方程。液箱水位的变化为

$$c\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = q_i - q_0$$

流出液箱的水的增量 q_0($\mathrm{m^3/s}$)与出口阀的阻力和液箱水位有关。一般情况下，h 和 q_0 是非线性关系。假设 q_0较小，可以近似认为 h 和 g_0 满足线性关系

$$q_0 = \frac{h}{R}$$

式中 R 为流出阀的液阻 ($\mathrm{s/m^2}$),是常量。

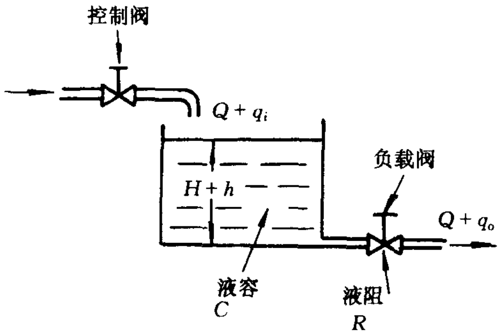

图 2.3　液位系统

消去中间变量 q_0 后可得到

$$RC\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + h = Rq_i \qquad (2.6)$$

若要研究流入量 q_i 变化对流出量 q_0 的影响，描述二者关系的微分方程为

$$RC\frac{\mathrm{d}q_0}{\mathrm{d}t} + q_0 = q_i \qquad (2.7)$$

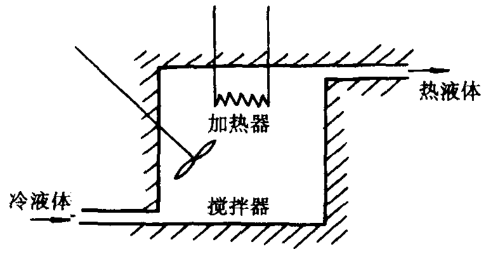

图 2.4　电热水器

这说明，对同一个物理系统，当研究的目的不同时，所得到的数学模型是不一样的。另外，微分方程中的输入变量和输出变量是指系统中具有因果关系的变量，必须和实际系统中具体物质的流入量与流出量区别开来。

例 4　热力系统的数学模型。图 2.4 是一个电加热热水器的示意图。我们现在来建立热水器出口水温受加热器加热量影响的微分方程。为了使问题简化，假设没有热量向周围环境散失，加热器容器中水的温度是均匀的，都具有和出口温度相同的温度。设热水器出口水温相对于稳定状态下的增量为 θ_0(K), M 为热水器中水的质量 (kg), C_p 为水的比热容 ($\mathrm{kJ/kg\cdot K}$), q_i 为电加热器传输给水的热流量的增量 ($\mathrm{kJ/s}$), G 为水的流量($\mathrm{kg/s}$),根据热量平衡关系

$$MC_p\frac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}t} = q_i - GC_p\theta_0$$

整理后为

$$MC_p\frac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}t} + GC_p\theta_0 = q_i \qquad (2.8)$$

若要考虑水入口温度的影响，设入口水温的变化量为 θ_i(K),则有

$$MC_p\frac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}t} + GCp\theta_0 = q_i + GC_p\theta_i \qquad (2.9)$$

若要考虑更多的因素，微分方程将变得更加复杂。

由此可以看出合理假设和简化在建立系统的数学模型中是很重要的。不同的简化和假设会得到不同的模型。假设的条件太多，过分简化，虽然数学模型简单，数学处理容易，但可能无法反映出事物的主要特征或达不到应有的准确性。若考虑的因素太多，数学模型将变得很复

杂，数学处理困难，增加了解决问题的难度，有时甚至会出现次要因素掩盖了事物主要特征的现象，得不出正确的结果。假设、简化到什么程度，并无统一的规定，主要根据具体问题和实际经验来决定。

系统的微分方程建立以后，还必须对其进行验证。要把根据数学模型进行理论分析的结果和实际结果或实验结果相比较，证明数学模型的合理性。若不符合要求，则必须进行修改。一个成熟的数学模型往往要经过多次修改和验证才能确定下来。

建立数学模型是一个培养综合应用各种知识，不断创新的过程。建立数学模型需要有综合分析和抓住问题本质的能力，需要有较高的抽象概括能力和较高的数学素养，也需要有科学的思维方法。数学模型不仅仅用来解释已发生的现象，更重要的是要预测事物的发展，为未来的决策提供指南。因此，建立数学模型的过程也是新观点、新方法产生的过程，是一种不断创新的过程。培养创新的意识、创新的能力，和掌握科学知识是同等重要的。

2.2 传递函数

描述线性定常系统特性的微分方程为

$$a_n \frac{d^n y}{dt} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \qquad (2.10)$$

方程的系数均为常数，设该系统的初始条件为零，即

$$y_{(0)} = \dot{y}_{(0)} = \ddot{y}_{(0)} = \cdots = y_{(0)}^{(n-1)} = 0$$

$$x_{(0)} = \dot{x}_{(0)} = \ddot{x}_{(0)} = \cdots = x_{(0)}^{(m-1)} = 0$$

对式(2.10)两边进行拉普拉斯变换,可以得到

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0) x(s)$$

令

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad (2.11)$$

式(2.11）即为线性定常系统传递函数的定义表达式。

传递函数的定义为：线性定常系统的传递函数是零初始条件下输出的拉普拉斯变换与输入的拉普拉斯变换之比。

在控制系统的微分方程中，输入变量、输出变量都是时间 t 的函数。所以，微分方程是对系统特性时间域的描述方法。传递函数是以复变量为自变量的。复变量 s 为

$$s = \sigma + j\omega$$

式中 σ 和 ω 都是实数,ω 称为角频率。所以,复变量 s 又称为复频率。传递函数是复变函数，因而具有复变函数的各种性质。

控制系统的输出为

$$Y(s) = G(s) X(s) \qquad (2.12)$$

从图 2.5和式(2.12)可以看出，输入信号 $X(s)$是经过 $G(s)$‘传递’到输出端的,所以称 $G(s)$为传递函数。

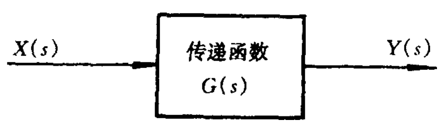

图2.5　传递函数

传递函数实现了时间域的微分方程到复频率域的转换，把复杂的微分方程问题转化为较简单的关于 s 的代数问题，因而，在经典控制理论中许多研究分析方法和重要结论都是以传递函数为基础的。这是一个十分重要的概念。

传递函数规范的表示方法一般有 3 种：

(1)标准定义形式

$$G(s)=\frac{b_m s^m+\cdots+b_1 s+b_2}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \tag{2.13}$$

在实际的物理系统中，由于能源有限、系统存在惯性等原因，总存在

$$n \geqslant m \tag{2.14}$$

所以，(2.13)式是一个关于 s 的真有理分式。

(2)典型环节形式

$$G(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)} \tag{2.15}$$

式中 K 称为放大系数或增益，T 和 τ 称为时间常数。

(3)零极点形式

把(2.13)式的分母多项式和分子多项式进行因式分解后可得到：

$$\begin{aligned}G(s)&=\frac{K(s+z_1)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_m)}\\&=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}\end{aligned} \tag{2.16}$$

式中 $-z_i$ 是分子多项式等于零所组成的方程的根，称为系统的零点或传递函数的零点。$-p_j$ 是分母多项式等于零时所组成的方程（称为系统的特征方程或传递函数的特征方程）的根，也称为系统的极点或传递函数的极点。传递函数的零极点对系统的性能有很大影响。K 称为放大系数或根轨迹增益。

传递函数包含了与微分方程相同的信息，它也是控制系统的一种数学模型，是控制系统复频率域的一种数学描述。传递函数表示的是系统本身的动态特性，与输入信号及相应的输出信号的形式无关。

传递函数的概念只适用于线性定常系统。二个变量间具有线性关系且在零初始条件下，才能求取其传递函数，对于非零初始条件，传递函数并不能完全描述系统的特性。

求取控制系统或系统部件的传递函数的方法有两种。一种是解析法，即通过建立系统的微分方程，按定义求取传递函数。另一种方法是实验法，即通过被研究的对象对输入信号的输出响应，求取其传递函数。

下面是用解析法求传递函数的例子。

例 5 图 2.6 是一个机械转动系统，求其在外力矩 M 的作用下，轴的角位移。

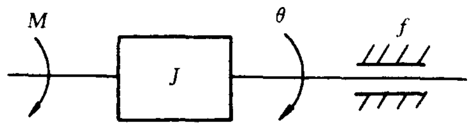

图 2.6 机械转动系统

解 根据机械转动的力矩方程和牛顿定律

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+f\frac{d\theta}{dt}=M \tag{2.17}$$

在零初始条件下对式（2.17）两边求取拉普拉斯变换

$$(Js^2+fs)\theta(s)=M(s)$$

根据传递函数的定义

$$G(s)=\frac{\Theta(s)}{M(s)}=\frac{1}{s(Js+f)}$$

写成典型环节形式

$$G(s)=\frac{K}{s(Ts+1)} \tag{2.18}$$

式中 $T=\frac{J}{f},K=\frac{1}{f}$。

例 6　求热电偶温度计的传递函数。

解　**图 2.7 是用热电偶测量流体温度的示意图。设被测介质温度为** θ_i **,热电偶输出电势为** E**，热电偶温度为** θ_0,R **为被测介质与热电偶间的放热热阻，** C **为热电偶的热容量，** K_e **为热电偶的比例系数。**

热电偶的热电势为

$$E=K_e\theta_0$$

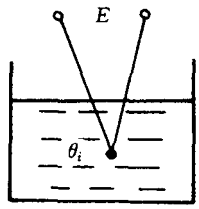

图 2.7　热电偶

被测介质流向热电偶的热流量

$$q=\frac{1}{R}(\theta_i-\theta_0)$$

热电偶接点温度

$$C\frac{d\theta_0}{dt}=q$$

可以得到微分方程

$$RC\frac{dE}{dt}+E=K_e\theta_i \tag{2.19}$$

按传递函数的定义

$$G(s)=\frac{E(s)}{\Theta_i(s)}=\frac{K_e}{RCs+1}$$

写成规范形式

$$G(s)=\frac{K}{Ts+1} \tag{2.20}$$

式中, $T=RC$ **，称为热电偶的时间常数,** $K=K_e$ **为热电偶的放大系数。**

例 7　求图 2.8所示的 RLC 电路电流与输入电压 u **之间的传递函数。**

解　根据电路元件的特性及电路定理得

$$u=Ri+\frac{1}{C}\int i\,dt+L\frac{di}{dt}$$

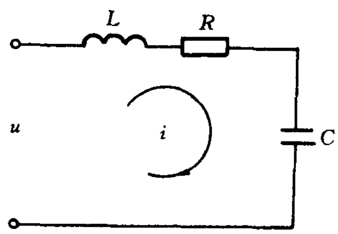

图 2.8　RLC电路

上式可变为

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{1}{c}i+R\frac{di}{dt}=\frac{du}{dt}$$

整理后得到以电流 i 为输出量以 u 为输入量的微分方程

$$LC\frac{d^2i}{dt^2}+RC\frac{di}{dt}+i=C\frac{du}{dt} \tag{2.21}$$

对(2.21)式按定义求取传递函数

$$G(s)=\frac{I(s)}{U(s)}=\frac{Cs}{LCs^2+RCs+1}$$

写成规范形式

$$G(s)=\frac{Ks}{T_1s^2+T_2s+1} \tag{2.22}$$

式中：

$T_1=LC, T_2=RC$,为电路的时间常数；

$K=C$,为放大系数。

在求取线性电路的传递函数时，应用“复阻抗”法，有时会更简便一些。若线性电路的电压与电流都用拉普拉斯变换式表示，则它们之间的关系为

$$U(s)=Z(s)I(s) \tag{2.23}$$

式中 $Z(s)$ 称为电路的复阻抗。对不同的电路元件，有不同的复阻抗。电阻的复阻抗为

$$Z(s)=R$$

电感的复阻抗为

$$Z(s)=Ls$$

式中 L 为电路的电感。电容的复阻抗为

$$Z(s)=\frac{1}{Cs}$$

式中 C 为电容量。在应用了复阻抗概念后，可以把电路按线性电阻电路的方法求解，直接得到电路的传递函数。

例 8 对例 7 的 RLC 电路应用复阻抗法，求传递函数。

解

$$U(s)=LsI(s)+\frac{1}{Cs}I(s)+RI(s)$$

$$G(s)=\frac{I(s)}{U(s)}=\frac{1}{Ls+\frac{1}{Cs}+R}$$

$$=\frac{Cs}{LCs^2+RCs+1}$$

$$=\frac{Ks}{T_1s^2+T_2s+1}$$

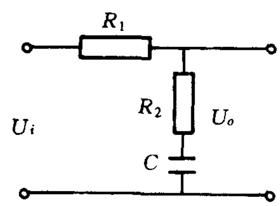

图 2.9 RC 电路

例 9 电路如图 2.9所示，求 U_0 在 U_i 作用下的传递函数。

电路的复阻抗为

$$Z(s) = R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}$$

电路电流为

$$I = \frac{U_i}{Z}$$

电路的输出电压 U_0

$$U_0 = (R_2 + \frac{1}{Cs})I$$

电路的传递函数

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{U_0(s)}{U_i(s)} &= \frac{(R_2 + \frac{1}{Cs})I}{U_i} \\ &= \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} \\ &= \frac{R_2Cs + 1}{R_1Cs + R_2Cs + 1} \\ &= \frac{T_2s + 1}{(T_1 + T_2)s + 1} \end{aligned}$$

式中 $T_1 = R_1C, T_2 = R_2C$,是电路的时间常数。

从以上两个例子可以看出,应用复阻抗法,避免了电感、电容电路中的微分积分运算,使解决问题的方法变得简便多了。

2.3 控制系统的典型环节

自动控制系统是由不同功能的元器件构成的。从物理结构上看，控制系统的类型很多，相互间差别很大，似乎没有共同之处。在对控制系统进行分析研究时，我们更强调系统的动态特性。具有相同动态特性或者说具有相同传递函数的所有不同物理结构，不同工作原理的元器件，我们都认为是同一个环节。所以，环节是按动态特性对控制系统各部分进行分类的。应用环节的概念，从物理结构上千差万别的控制系统中，我们就可以发现，它们都是由为数不多的某些类型的环节组成的。这些环节，称为典型环节或基本环节。经典控制理论中，常见的典型环节有以下 6种。

2.3.1 比例环节

比例环节是最常见、最简单的一种环节。

比例环节的输出变量 $y(t)$与输入变量 $x(t)$之间满足下列关系

$$y(t) = Kx(t) \tag{2.24}$$

比例环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K \tag{2.25}$$

式中 K 为放大系数或增益。

杠杆、齿轮变速器、电子放大器等在一定条件下都可以看做是比例环节。

例 10 图 2.10 是一个集成运算放大电路，输入电压为 u_i，输出电压为 u_0. R_i 为输入电阻，R_f 为反馈电阻。我们现在来求取这个电路的传递函数。

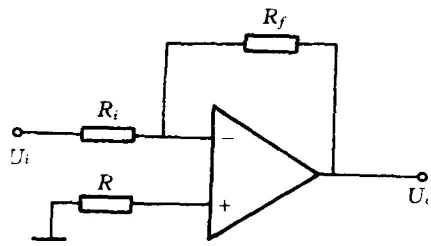

图 2.10 比例器

解 从电子线路的知识我们知道这是一个比例器，其输入电压与输出电压间的关系为

$$U_0 = -\frac{R_f}{R_i}U_i \tag{2.26}$$

按传递函数的定义，可以得到

$$G(s) = \frac{U_{0(s)}}{U_{i(s)}} = -\frac{R_f}{R_i} = K \tag{2.27}$$

式中 $K = -\frac{R_f}{R_i}$，可见这是一个比例环节。如果我们给比例环节输入一个阶跃 信号，它的输出同样也是一个阶跃信号。阶跃信号是这样一种函数

$$x_{(t)} = \begin{cases} x_0 & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

式中 x_0 为常量。当 $x_0 = 1$ 时，称阶跃信号为单位阶跃信号。阶跃输入下比例环节的输出如图 2.11 所示。比例环节将原信号放大了 K 倍。

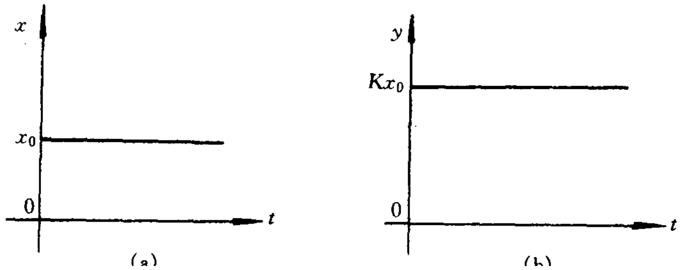

图 2.11 比例环节的阶跃输入响应

(a) 阶跃输入；(b) 阶跃输出

2.3.2 惯性环节

惯性环节的输入变量 $x(t)$ 与输出变量 $y(t)$之间的关系用下面的一阶微分方程描述

$$T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = Kx \tag{2.29}$$

惯性环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \tag{2.30}$$

式中，T 称为惯性环节的时间常数，K 称为惯性环节的放大系数。

惯性环节是具有代表性的一类环节。许多实际的被控对象或控制元件，都可以表示成或近似表示成惯性环节。如我们前面举过的液位系统、热力系统、热电偶等例子，它们的传递函