

动画模型的编辑算法及应用

雷开彬 著

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

内 容 提 要

计算机动画模型是动画制作过程中所使用的场景或角色物体的数字表示，动画模型的编辑是对模型按照某种需要进行的形状修改操作，其编辑技术与模型的表示有着紧密而内在的联系。本书针对计算机动画系统的造型子系统的典型编辑算法进行了论述，并对近年来出现的模型编辑新技术进行了分析与研究。内容主要包括参数样条及编辑技术、Bézier 曲线曲面编辑技术、NURBS 曲线曲面编辑技术、保刚性的形状插值技术、空间变形技术、Poisson 网格编辑技术和 Laplacian 曲面编辑技术。题材新颖，接触前沿，面向应用。

本书可作为计算机动画、计算机图形学、数字几何处理、工业产品造型等专业的研究生教材，也可作为相关领域高年级大学生和科研人员的参考书。

前言

计算机动画是通过连续播放一系列的画面，在视觉上造成一种图像连续变化的感觉，并实现赋予场景中的景物具有“生命”动感的效果。众所周知，传统的动画制作过程充满了大量繁琐而枯燥的中间帧绘画劳动。随着计算机软硬件系统的发展，特别是图形处理系统性能的快速提高，借用计算机来减轻绘画师的繁重劳动已成为现实。在计算机中要进行动画制作的自动化生产，必须要解决两个基本问题：一是如何构造故事情节中的角色和环境，二是如何产生符合自然或设计要求的动作序列。面对这两个问题的解决，无论是现在计算机的硬件或是软件算法都需要进一步的研究与提高。

首先，对于动画系统中的造型问题，它涉及模型的表示和模型的编辑。自然界中的万事万物、各形物体或场景，就目前而言，不存在统一的表示方法。在已有的各种数字化方法中，其表示法都是与具体的某类物体相关联。我们知道，物体的造型不是一次成功的，而是需要多次反复进行变形修改或编辑的。对三维物体而言，这种编辑尤其困难。事实上，对三维数字物体（角色）的编辑是模拟一个物体在自然界中的各种受力变形的过程、或是运动的姿态形状、或是想象中的形态外貌等。这种模拟是基于物理或自然的，因此具有多学科理论与知识的综合。本书首先对经典的曲线曲面模型表示方法进行介绍，重点讨论了参数样条、**Bézier** 曲线曲面、**NURBS** 曲线曲面表示的编辑技术和物体的约束变形技术，然后，研究了具有模拟自然特性的三维物体扫描模型（**Mesh**）的微分网格处理技术。

其次，计算机动画自动化生产过程中的中间帧插补问题，即产生符合自然或设计要求的动作序列仍是计算机动画制作中的难点问题。就现有的研究成果来看，对于该问题研究的关键点仍是集中在关键帧模型之间的顶点对应和路径插补问题上。目前的研究成果表

明，路径插补已有多种算法技术出现，其效果在一定程度上满足动画的要求。本书介绍的球面四元素插值、内在量插值、保刚性的形状插值、**Poisson** 网格处理等都是路径插补问题的解决。相对于路径插补问题，顶点对应问题就显得要困难得多，特别是人工干预很少的具有特征对齐的自动化对应就更难。但是，近年来也有不少的研究成果出现，读者可参考相关文献。

本书的特点是题材新颖、接触前沿、面向应用。选题大多是作者本人近年来的研究成果和该领域出现的热点技术，就是对传统方法的介绍也是重点突出在模型的控制与编辑算法的分析上。对所论述的主题始终秉持应用、实用和前沿这一宗旨。全书共分八章，第一章讨论了与计算机动画模型编辑相关的四个问题，即计算机动画发展史、计算机动画的研究内容、三维动画技术和计算机动画模型编辑算法的主要内容。第二章主要介绍了参数样条表示的基本特性，包括几何不变性、参数样条连续性和典型的 **Hermite** 参数样条的构造与编辑特性。第三章讨论了应用广泛、发展成熟的 **Bézier** 曲线曲面造型技术，它是造型方法的重要基础。这里主要从 **Bézier** 方法的几何直观定义及形状控制方法角度进行了研究。第四章论述了三个问题，即 **B** 样条曲线曲面的定义及编辑特性、均匀有理 **B** 样条的端点结构性质和 **BC** 均匀样条曲线曲面的构造。重点对进一步揭示 **B** 有理样条曲线的形状、权因子和控制顶点位置的内在关系的三次均匀有理 **B** 样条曲线的端点理论进行了研究，同时给出了 **BC** 均匀样条曲线曲面的构造的研究成果。第五章对近年来角色动画中模型插值研究的热点之一的保刚性的形状插值技术作了较深入的讨论：首先是较深入地研究了 **2D** 形状的内在量插值算法；其次，根据内在量插值思想，将其推广到坐标优化的插值算法，得到了适合空间开闭曲线插值的简单统一算法。第六章讨论了的空空间变形技术，包括由 **Barr** 的整体与局部变形、**Sederberg** 的 **FFD** 方法、弧长轴变形方法、**Scodef** 变形方法和保刚性的变形技术。该章还介绍了自由变形技术的三个步骤，即用户交互设定代理模型，用户通过操纵代理模型来表达特定的编辑意图和根据变形后的代理模型以及原始模型的

参数化信息恢复出编辑后的原始模型，同时也研究了值得关注的局部刚性变换和整体优化重构的算法思想。第七、八两章讨论了最近几年发展起来的泊松网格模型编辑技术和拉普拉斯曲面编辑技术，重点讨论了基于泊松网格模型的编辑框架和分段线性曲线的泊松编辑框架与应用。对拉普拉斯曲面编辑技术讨论了三角网格模型的坐标表示和拉普拉斯坐标求解,模型的局部 **Morphing** 框架和曲面编辑算法，这些技术近年来受到众多该领域学者的关注。

本书得到四川省应用基础研究项目、国家民委科研项目、校级重点项目的资助，在此表示感谢。

由于时间仓促，水平有限，对某些文献理解不透，书中难免会出现错误和不足之处，敬请读者不吝指正。

作 者
2008 年 3 月

.....
图书在版编目（C I P）数据

动画模型的编辑算法及应用 / 雷开彬著. —成都：西南交通大学出版社，2008.7
ISBN 978-7-81104-547-5

I. 动… II. 雷… III. 动画—图形软件—软件设计
IV. TP391.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 095758 号
.....

动画模型的编辑算法及应用
雷开彬 著

责 任 编 辑	张宝华
封 面 设 计	翼虎书装
出 版 发 行	西南交通大学出版社 (成都二环路北一段 111 号)
发行部电话	028-87600564 87600533
邮 编	610031
网 址	http://press.swjtu.edu.cn
印 刷	四川森林印务有限责任公司
成 品 尺 寸	146 mm×208 mm
印 张	7.687 5
字 数	212 千字
版 次	2008 年 7 月第 1 版
印 次	2008 年 7 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-81104-547-5
定 价	18.00 元

图书如有印装问题 本社负责退换
版权所有 盗版必究 举报电话：028-87600562

第 1 章

绪 论

1.1 计算机动画及发展简史

计算机动画是指通过连续播放一系列的画而，在视觉上造成一种图像连续变化的感觉，使场景中的景物具有“生命”动感效果。其基本原理是利用人类“视觉暂留”的特性，潜意识地将连续出现的序列画面组合起来，形成一种具有连续、无闪烁和运动感的视觉效果。也就是说，人的眼睛在看到一副画面或一个物体后，由于视网膜表面分布着大量的光接受细胞，它们可接受光的能量并形成视觉图案，而这种图案在 $1/24$ 秒内不会消失，从而形成视觉暂留。人们利用这一原理，在一副画面还未消失之前，播出下一副画面，只要这种播放的频率不低于每秒 24 副画面，视觉上就会出现不停顿的连续动感的运动图像。如果播放频率更高(比如每秒 48 帧或 72 帧)，动画就会达到更加自然稳定的运动画面。在我国，电视采用 PAL 制式每秒 25 帧，或 NSTC 制式每秒 30 帧，电影是每秒 24 帧。

计算机动画技术是综合利用了计算机科学、艺术、数学、物理学、生命科学和其他相关学科的知识来生成绚丽多彩的连续逼真画面，给人类提供了一个充分发挥个人想象和艺术创造才能的无限空间。在《魔鬼终结者》、《侏罗纪公园》、《玩具总动员》、《泰坦尼克号》、《恐龙》等优秀电影中，我们可以充分领略到计算机动画的高

超魅力和图形学新技术所带来的艺术享受及动画产业的发展。在传统动画的制作过程中，导演首先要将剧本分成一个个分镜头；然后由高级动画师确定各分镜头的角色造型，并绘制出一些关键时刻各角色的造型；最后，由助理动画师根据这些关键形状绘制出从一个关键帧形状到下一个关键帧形状的自然过渡，并完成填色及合成工作，再依次拍摄这一帧帧连续画面，从而得到一段动画片段。在这些过程中，由于大量枯燥的工作集中在助理动画师身上，而且要求动画师有丰富的生活经验和高超的绘画技艺，因而，一个自然的想法就是借助计算机来减轻助理动画师的工作，从而提高动画的制作效率。因此，可以说计算机动画技术的产生是水到渠成。

1946 年，世界上第一台真正意义上的电子计算机 ENLAC 诞生后，不但改变了人们的传统计算方式，把人们从烦琐的计算中解脱出来，而且实现了人类理论上可以计算而实际无法完成的计算工作。1950 年，在美国麻省理工学院 (MIT) 诞生的旋风 I 号 (Whirlwind I) 计算机及其显示器，开辟了用以满足人们视觉并需要研究和应用的计算机新时代。而计算机动画也得益于新型显示设备和快速图形处理器的发展而成为当今 IT 业的佼佼者，其发展阶段可分为初创期、发展期、成熟期和生产期[ZHEN07]。

20 世纪 60 年代是计算机动画发展的初创时期，第一个开始这一领域研究的是，1962 年麻省理工学院的物理博士 Ivan Sutherland 编写的一个名为“写生簿”的程序。他提出了人机交互图形系统的概念，从而奠定了现代计算机图形学的基础，同时也表明用数字来描绘图像这一新技术时代的到来。1964 年，贝尔实验室的肯克劳尔顿 (Knowlton. K) 第一次用 IBM7094 开发了 BEELIF 语言。该语言可以直接处理 8 个灰度等级、 252×184 像素的矩阵，它通过发射电子信号波导致图像畸变，并使用正弦曲线、平行或垂直变形来完成计算机动画。1969 年，同样是在麻省理工学院，Ronld Baecker 博士发表了图形驱动的动画系统 GENESYS，该系统能对动态行为进行描述。然而，这一时期的计算机动画比较粗糙，但理论发展却十分迅速，并为下一阶段的发展奠定了坚实的基础。

20 世纪 70 年代是计算机动画的发展期。在这一时期,动画创作工具,如跟踪球、数字化仪的出现为人机交互提供了方便快捷的手段,特别是个人计算机的出现,使更多的艺术家投入到电脑动画的创作中来。一些图形算法,如分形、真实感图形等也从理论上发展成为具体的产品,特别是图形系统在电器、机械和建筑等工业 CAD 的大量应用,极大地推动了计算机动画的发展,并确立了三维图形的算法基础。1971 年,宾夕法尼亚大学开发了一个 2D 交互动画系统 (Animator)。同年,加拿大国家研究院的 Burtnyk 和 Wein 发表了有关主图动画系统的模型论文,首次用计算机实现主图(关键帧)之间的中间帧图形的计算原理,即中间线性帧插值算法。1978 年,卢卡斯的《星球大战》的出现,致使逼真的宇宙飞船模型能在太空遨游,从而极大地冲击了传统的电影制作技术。

20 世纪 80 年代是计算机动画的成熟期。这一时期,图形图像技术进入普及阶段,此时的个人电脑已能担当起图形图像的处理任务。1983 年,Edwin Catmull 开发了 3D 主图动画控制系统 BBOP,此系统包含了反混淆技术、光照模型和纹理等功能。在这一时期,具有代表性的动画影视较多,如《小克鲁索》(1986),《Don't Touch》(1989)等,而具有代表性的算法技术有光照模型的辐射度方法、运动动态技术、样条模型开发、人物分级动画与逆向运动学等多种现代计算机动画技术,此时,也出现了三维动画软件系统。

20 世纪 90 年代至今是计算机动画的生产期,这一时期也是计算机动画制作走向规模化的时期。就计算机动画制作本身而言,制作过程的自动化程度越来越高,而且艺术家也完全参与其中。另一方面,场景中物体、角色的运动或变形技术在现代各学科理论的支撑下现得自然逼真。该时期的动画系统已能制作出以假乱真的影视特技,如在《侏罗纪公园》、《终结者 II》等电影中都得到了淋漓尽致的展现,观众已难以区分哪些是计算机生成的画面,哪些是模型制作的结果。如今计算机动画已极大地满足了人们的视觉冲击和享受,同时也极大地推动了计算机动画的蓬勃发展和市场需求。

1.2 计算机动画的研究内容

从技术的角度讲,计算机动画主要研究运动控制以及与动画有关的造型、绘制、合成等技术。计算机动画技术是计算机图形学发展的重要成果,它是传统静态图形技术向实时图形技术过渡的桥梁,其研究内容涉及计算机图形学的各个领域。一般来说,一个完整的计算机动画系统应包含以下五个模块系统[BAO00]:

- (1) 文件及系统管理模块;
- (2) 造型模块;
- (3) 动画模块;
- (4) 绘制模块;
- (5) 后期合成模块。

从动画研制的技术来说,后四个模块是计算机动画研究的主要内容。当然,首先应该是计算机动画技术本身,即如何生成物体的各种运动和变化。计算机动画技术的研究在近 20 年得到了迅速发展,各种具有代表性的软件系统得到了广泛应用。例如,在 20 世纪 80 年代中期,wavefront 和 explore 等专用动画软件的推出使得艺术家们能够方便地进行动画制作。但是由于计算速度的影响,这些软件都必须运行在工作站上。其中值得一提的是加拿大多伦多 Alias 公司开发的 alias 和蒙特利尔 Softimage 公司开发的 softimage 动画软件系统,它们分别以其强大的造型功能和方便的控制手段成为其中的佼佼者。随着微机技术的不断发展,90 年代初,美国 Autodesk 公司推出了三维动画软件 3Dstudio。它具有三维建模、真实感绘制、动画处理和后期制作等功能,由于其硬件配置要求较低,因此比较适合我国国情。90 年代中后期,Autodesk 公司在 3DStudio 的基础上推出了 3DMAX, Alias 公司合并 Wavefront 后推出了 MAYA (SGI 版和 NT 版),它们与 softimage 一起成为目前使用最广泛的动画制作软件。在这些动画软件的造型模块、动画模块和绘制模块中都集成了计算机图形学和动画技术的最新发展成果。

计算机动画技术研究的内容,从不同的角度有着不同的分类。从计算机动画速度来分,可分为逐帧动画与实时动画。实时动画是指计算机对输入的数据进行快速处理,并随即将画面显示出来,两幅画面间的时间间隔至少应在 0.05 秒之内,以使人产生连续变动的感觉。实时动画主要用于在操纵飞行模拟、计算机游戏中的某些器件时,计算机能实时地反映出画面的变动。逐帧动画是指以一定的时间间隔逐帧生成画面,并将其存放于磁盘等介质中,以生成 AVI 或 MPEG 等动画文件,然后连续地播放出来产生动画效果。目前,对复杂场景一般采用逐帧生成画面的方法,有时生成一帧仍要十几分钟乃至几个小时。从计算机动画对象来分,动画可分为图形动画和图像动画。图形动画是指对象在计算机中以算法形式表示的图形动画(包括二维图形动画和三维图形动画),图像动画是指对象为位图图像的动画。从计算机动画实现方法来看,它有着许多具有代表性的技术,其中主要有关键帧技术、过程动画技术、物体变形技术、关节连接动画技术、粒子系统动画技术、动作捕捉动画技术、运动控制技术、脚本驱动动画技术和行为动画技术等,而这些技术的混合使用保证了动画系统能够生成各种各样的复杂运动和动画效果。

后期合成技术是指影片后期制作的编辑技术。从理论上来说,它不属于计算机动画的范畴,但对于制作来说,它又是必不可少的,特别是视频技术的数字化趋势,使得该技术日益受到人们的重视。目前,已有许多优秀的后期合成软件,用户可以方便地进行特技效果的处理和运动跟踪、深度合成等复杂操作。

1.3 三维动画技术

从目前计算机动画发展趋势来看,计算机动画技术按照对象空间来分,可分为二维动画和三维动画(3D 动画)。二维动画主要以二维图像处理为操作核心,如精灵动画、图像变形等。三维动画或三维模型动画,是指通过计算机模拟三维空间中的场景及形体随时

间变化的动画技术,在计算机二维屏幕显示对三维模型、虚拟摄像机、虚拟光源运动的控制描述,由计算机自动产生一系列具有真实感的连续动态图像的过程。三维模型动画主要包括三维虚拟场景、三维模型(物体)和动画人物的建模,以及它们之间相互运动关系的指定与绘制等。建模的任务是描述场景中的每一元素,主要由动画系统的造型模块来实现;运动关系的指定是表明三维动画人物或物体如何在三维场景中进行运动,由动画系统的动画模块完成;绘制则是将三维场景和运动关系的描述转化为一个图像序列,由动画系统的绘制模块实现。目前,计算机三维模型动画技术主要包括关键帧动画(单一网格模型动画)、物体变形动画、关节动画(骨架驱动动画)等形式。

关键帧动画也称单一网格模型动画,是在动画序列的关键帧中记录下组成网格的各个顶点的新位置或者是相对于原位置的改变量,并通过在相邻关键帧之间插值来直接改变该网格模型中各个顶点的位置以实现动画效果。关键帧动画技术的核心是关键帧的选取和插补算法,关键帧物体的选取包括物体的位置和朝向的指定。关键帧的插补可归结为参数插值问题,但又与纯数学的插值不同,有其特殊性。一个好的关键帧插值方法必须能够产生逼真的运动效果,同时又能给用户方便有效的控制手段。图 1.1 采用了两种不同网格表示的关键帧插值技术[LIPM05]。



(a) 基于刚体运动不变的离散网 (b) 基于网格笛卡儿坐标表示的
格表示的线性路径插值 线性路径插值

图 1.1 两种不同参数路径插值效果

物体变形动画也称基于形状变化的动画,主要用于处理那些在形状上没有明确定义关节点结构,但结构又有一定复杂度,又不能

化为粒子系统来处理的物体。这类动画适用范围很广，其变形物体可以是弹性质点网格、体素模型和表面表示模型。基于物体变形动画的技术，涉及三维模型的和变形算法。模型的表示方法主要有显函数表示、隐函数表示、参数连续模型、网格模型（三角网格模型）和点模型等表示方法。变形技术包括简单的几何变换（对物体的局部或整体进行平移、旋转和缩放变形）、自由变形技术、约束变形技术、**Morphing** 技术、网格融合技术、多分辨率技术等模拟自然界物体变形的技术。下文中将对该方法做详细论述，这里不再赘述。图 1.2 是利用信息迁移和拉普拉斯坐标曲面变形技术产生的动画序列[ZHOU05]，实际上是利用二维动画驱动的三维动画技术。

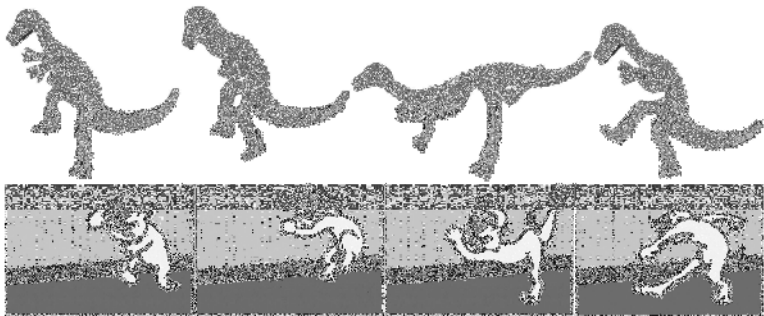


图 1.2 从猫的提腿运动迁移到恐龙的提腿变形动画

关节动画的模型表达为一组物体的集合，各物体之间通过树状的、层次式关节节点结构进行连接。每个物体的位置一般由其在层次式关节节点结构的父节点位置来确定。这种动画多用于人物动画或四足动物动画类型。关节动画主要涉及两个关键问题，即如何有效地描述链结构和有效地控制链结构的运动。

在关节动画技术中，人体和动物动画仍有许多问题未得到很好的解决。人体具有 200 个以上的自由度和非常复杂的运动，人体的形状不规则，其肌肉随着人体的运动而变形，人的个性、表情等千变万化。另外，由于人类对自身的运动非常熟悉，不协调的运动很容易被观察者所察觉。可以说，人体动画是计算机动画中最富挑战性的课题之一。

图 1.3 是人体骨架模型及其对应的关节节点结构树[GENG06]。

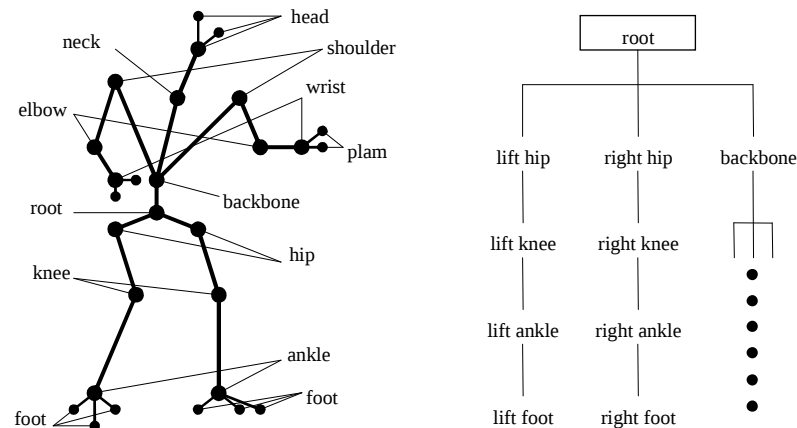


图 1.3 人体骨架及其树结构

驱动关节链结构方式有两种，一种是运动学模型，另一种是动力学模型。运动学模型是一种设置关节动画的有效方法，通过对关节旋转角设置关键帧，可得到相关链的各个肢体的位置，这种方法一般称为正向运动学方法。逆向运动学方法是指用户指定脚的世界坐标系位置，然后用伪逆 Jacobian 矩阵求出从脚到臀部关节的旋转角，亦称目标驱动方法。动画软件 Maya, Softimage 和 Alias|Wavefront 都提供正向运动学和逆向运动学动画设置方法。动力学方法也能生成更复杂和逼真的动画运动，并且需要指定的参数相对较少。但动力学方法的计算量相当大，且很难控制。

在计算机动画中，建立有趣且逼真的虚拟实体并能同时保持对它们的控制是相当困难的，通常在复杂度和控制的有效性之间取其折中方案。对一固定的关节结构，常用优化方法来自动生成动力学控制系统。对于非固定的三维动物，可采用三维虚拟动物的方法，该方法无需用户提供繁琐的设计指定工作，动物形态学和控制肌肉的神经系统由算法自动产生。有关关节动画技术有专门文献论述[BAO00]。

1.4 动画模型的数字几何处理

计算机动画制作是一种高技术、高智力和高艺术的创造性工作。目前,计算机动画已经发展成一个多学科和技术的综合领域,它以计算机图形学,特别是实体造型和真实感显示技术(消隐、光照模型、表面质感等)为基础,涉及图像处理技术、运动控制原理、视频技术和艺术,甚至于视觉心理学、生物学、机器人学、人工智能学等领域,正以其独特的形式逐步成为一门独立的科学。随着计算机图形学与硬件技术的高速发展,利用计算机进行三维动画设计的能力日益提高,通过三维动画设计软件平台,可生动地生成人或动物角色的运动与表情,可制作各种逼真的虚拟场景。近年来,随着多部三维动画大片的上映,充分展现了三维计算机动画的魅力和活力,以及它的发展动向。因此,三维动画相关的理论与算法的研究近年来已成为计算机图形学领域中的研究热点,在全球的图形学盛会 SIGGRAPH 上,每年都为三维动画技术的若干问题专辟研讨区,成为 SIGGRAPH 年会学术研讨的重要组成部分。

从计算机动画研究的内容和变形动画技术来看,造型模块是计算机动画系统进行角色构造、场景设计的基本核心模块。尽管造型技术在 CAD 和 CAGD 中得到了深入的研究,但计算机动画对传统的实体、曲面造型等又提出了一些新的要求:一方面,计算机动画中场景造型的精度不必像工业设计那样高;另一方面,对造型工具的灵活性及景物运动的可控性提出了更高的要求。这就导致了許多针对动画应用而设计的造型技术的产生。目前,三维动画角色模型的几何造型手段主要有 UNRBS 曲面、子分曲面及多边形网格模型,多边形网格模型由于其简单性和兼容性,使其在计算机动画系统中占有绝对优势的造型与编辑技术。

近年来,随着三维成像技术的发展,动画师可直接通过三维成像设备快速获取真实物体或角色原型的多边形网格模型,这些大大简化了动画角色建模过程。因此,针对多边形网格模型,特别是来

源于真实物体的高密度网格模型进行参数化、网格简化、多分辨率分析、约束变形、形状插值与动画生成、光影计算及渲染处理的算法研究已成为近年来计算机图形学领域的热点,这一类问题统称为数字几何处理问题(DGP)。

动画模型的数字几何处理所涉及的关键问题是三维网格模型编辑问题,它是指对动画角色的三维网格模型进行可编辑的表述、简化、插值、变形、Morphing、融合、滤波、信号处理、几何压缩和多分辨率等操作的算法研究。数字几何处理的主要困难在于 3D 网格模型表面通常是任意弯曲、复杂和缺乏连续参数化的,并且定义在模型表面各种属性(包括顶点位置坐标、法向量和颜色等)都是非规则采样的,这使得经典的欧氏几何空间正交分析工具无法直接用来处理 3D 网格模型,那么,如何把传统欧氏几何空间中的模型处理技术推广到 3D 几何便成为 DGP 的最大难题。利用网格模型编辑算法,动画师可方便地将角色网格模型调整为预想姿态,形成动画关键帧,这些有效地提高了动画界通用的关键帧动画制作模式的灵活性与时效性。此外,通过网格模型编辑算法还能进行网格模型的夸张特效制作,为发挥动画师的创造力与想象力提供了有力的工具。

1.5 计算机动画模型简介

计算机动画模型是指在计算机动画制作过程中所使用的场景或角色物体的数字表示。动画模型的编辑是对动画模型按照某种需要进行形状修改的操作。模型的编辑方法与模型的表示有着紧密而内在的联系。动画模型的表达,即几何建模是制作计算机动画的第一步,其基本任务是根据创意完成对场景及有关角色的造型。由于这一步直接影响最终画面的效果,因此,模型构造在计算机动画中起着非常重要的作用,是动画系统造型模块功能之所在,同时,也是模型动画的技术体现。目前,在计算机动画中所使用的模型表示主要有曲线曲面的参数表示、体素构造表示(CSG 树)、多边形网格

表示、曲线曲面的细分表示、粒子系统和点模型等几何建模方法。

1.5.1 参数样条模型

参数样条曲线曲面几何造型是基于汽车、飞机和造船业的需求而发展起来的 CAD 技术，随后该方法又成为计算机动画模型构造的主要方法之一。造型技术首先始于多项式逼近、曲线曲面插值，最终出现了以参数形式的 Hermite, Bézier, NURBS 样条等为代表的曲线曲面造型技术，我们将该方法表示的模型统称为参数样条模型。参数样条模型的理论和应用研究相对成熟，并广泛应用于各种工业设计、娱乐动画造型系统。其主要优点是：

(1) 简洁性。参数曲面表示法通过采用少量的控制顶点及形状参数来描述模型的形状，而多边形网格表示法需要大量的多边形来描述表面形状。这一点在曲率较大的区域，表现得尤为明显。

(2) 灵活的局部修改性。参数样条模型表示法具有良好的局部可控性。这是由于其基函数具有局部支撑区域，因而其中的每一控制顶点的改变均只影响表面的一个局部区域，而且在大部分情况下，这种修改始终保持曲面的光滑性不变。

(3) 方便的精度控制。对于参数曲面，可以通过剖分误差来动态控制曲面的绘制精度，它可方便地生成多分辨率模型。这对复杂的场景来说，是非常重要的。

(4) 光滑拼接性。任何复杂的形体模型，都不是仅仅用单张参数曲面构成的，通常是由多张简单面片拼接而成，而且其拼接模型能达到一定光滑度的要求。其实，这也是样条分段表示的含义。

1.5.2 体素构造表示法

在许多情况下，一个复杂物体可由一些简单、规则的物体通过布尔运算而得到。这个复杂物体的生成过程可描述为一棵树，这棵树的终端结点为基本体素，如立方体、棱锥、圆柱、圆锥、球体和

某些使用样条曲面的实体，而中间结点为正则集合运算结点，我们称这棵树为 CSG 树。这里，集合的并、交、差运算要通过适当限制，以使所生成的新物体是正则的，从而避免产生孤立的点、线、面。

图 1.4 是物体的 CSG 树表示，每一结点由操作码、坐标变换域、基本体素指针、左子树、右子树等五个域组成。除操作码外，其余域均以指针的形式存储。操作码按约定方式取值。当操作码为零时，它表示该结点为一基本体素结点，相应地，左子树、右子树指针取 NULL。对于非终结点，其操作码取约定整数，代表左子树结点和右子树结点进行集合运算，其基本体素为 NULL。每一结点的坐标变换域存储该结点所表示的物体在进行新的集合运算前所作的坐标变换的信息。CSG 树提供的信息，足以判断空间任一点是在它所在的内部、体外，还是在体的表面上，又由于基本体素的有效性和运算的正则性，因此这些信息可唯一地定义一个物体，并支持对这个物体的一切几何性质的计算，包括它与其他物体的关联性、体积、面积、重心等。

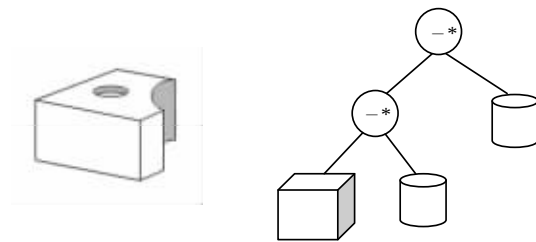


图 1.4 物体的 CSG 树表示

1.5.3 多边形网格模型

多边形网格模型是目前最通用的物体形状的代表方法。在计算机图形学中，场景中的对象一般用一组多边形面片来描述，而对每一个对象的描述包括指定多边形面片的几何信息和其他表面参数。这些多边形数据可分成两组，即几何数据表和属性数据表：几何数

据包含顶点坐标和表示多边形面片的方向参数；属性数据包含指定对象的透明度及表面的反射性和纹理特征。

场景中对象的几何数据可简单地组成三张表：顶点表、边表和面表。对象的顶点坐标存储在顶点表中，边表包含指向顶点表的指针并用以确定每一多边形的边的端点，面表包含指向边表的指针并用以确定每个多边形的面的边。另一种表示则是只用两张表，即顶点表和面表。在这种表示法中，顶点表按顶点编号存储顶点坐标位置，而面表按顺时针或逆时针方向存储构成该面的顶点索引。有关模型的其他属性可以通过算法进行计算，例如法向量、光照等。多边形网格模型具有以下优点：

- (1) 多边形形状简单，便于计算和处理；
- (2) 多边形网格可以以任意精度逼近任一曲面物体，并可以表示拓扑非常复杂的物体；
- (3) 只需存储各多边形顶点的位置坐标及属性即可表示物体的几何信息，在计算多边形内任一可见点的光亮度时，所需的信息可由顶点的信息插值得到，这使得对多边形网格的绘制可采用硬件加速技术来实现。

多边形网格模型可以由各种商用动画软件，如 Alias, Wavefront, Softimage, Maya 和 3DMAX 生成，或者通过三维激光扫描仪在物体表面测得一系列离散点后由表面重构算法生成，或者由参数样条曲面模型离散得到。

目前，多边形网格中应用最广的是三角网格模型（Mesh）。对三角网格模型已有一些成功的网格参数化和较丰富的网格编辑处理算法，这些均形成了它的广泛应用，特别是在计算机动画中，该模型的表达占据了绝对的优势，它是继声音、图像和视频之后的第四种媒体数据，也称为数字几何模型。在后面的章节中有严格的定义和应用。

1.5.4 细分网格模型

细分技术是构造曲线曲面相对较新的技术，它在非连续（离散）

曲面和连续曲面之间架起了一座桥梁。细分方法可从任意形状网格出发构造光滑曲面而无需考虑几何连通性问题。

在给定一个初始网格后，细分过程就是按一定的几何规则和拓扑规则计算一个细化的网格序列，此序列收敛于一张极限曲面，通过插入新点，并按一定的规则与已有的网格点相连，得到一个新的细化网格，新点的位置由上一层网格点按一定的几何规则计算得到最终细分曲面的表示。

在细分曲线的发展历史中，出现了各种不同的细分方法，它们都有各自的应用范围。细分规则通常由两部分组成，一个是拓扑分裂规则，另一个是几何规则。拓扑规则用于描述网格细分一次后的所有顶点之间的连接关系，而几何规则用于计算细分后产生的新点的几何位置信息。根据几何规则与细分层次的关系分类，若几何规则在细分过程中保持不变，则称为静态细分方法；反之，称为动态细分方法。

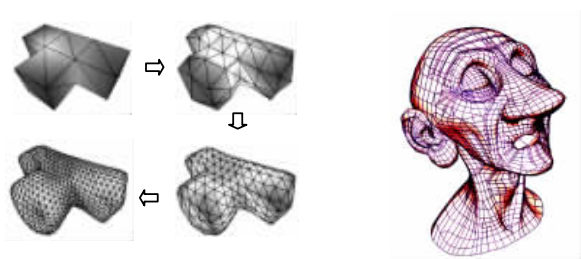
根据网格类型分类，已有的细分方法多是由传统的样条方法推广而来，如 B 样条和箱样条。B 样条用于由四边形组成的网格，箱样条用于由三角形组成的网格。因此，细分方法还可根据其拓扑规则分为基于四边形网格和三角形网格的细分方法。

根据拓扑分裂类型分类，生成细化后网格的拓扑分裂主要有两种方式，一个是面分裂，一个是点分裂。使用第一种方式的细分方法称为基本型，使用第二种的称为对偶型。对于第一种类型，在细分过程中，组成网格的每一个面被分裂为四个，旧点的拓扑位置保持不变，自每条网格边上插入一个新点，而对四边形网格，每一个网格面中也要插入一个新点。对于第二种类型，对应于每一个旧点，可产生多个新点，每个点对应一个与这个旧点相邻的网格面；对应于每一条网格边，可生成一个新面，而旧的网格面保持不变。

根据细分极限曲面与初始控制网格的位置关系分类，已有的细分方法可分为逼近型细分方法和插值型细分方法。面分裂类型可以是插值的，也可以是逼近的。对于初始网格中的任一个控制顶点，

在不同的细分层次上均有一个控制点与其对应。如果这些点均相同,则这种细分方法称为插值型的;否则,称为逼近型的。对于插值型细分方法,定义曲面的初始控制点也是极限曲面上的点,这使得我们可以更加直观地控制曲面。但是这类曲面的光顺度不如逼近型细分的极限曲面,收敛速度也比逼近型细分方法慢。

根据规则,网格情形下极限曲面的连续性分类,可分为 C^1 连续和 C^2 连续的细分模型。图 1.5 是细分曲面表示,图 1.5(a)是 Butterfly 细分方法产生的最终网格模型,图 1.5(b)是[DERO98]细分的动画角色模型。



(a) Butterfly 细分模型 (b) 衰老头的细分模型

图 1.5 细分曲面模型

1.5.5 粒子系统

粒子系统是最实用的过程动画技术之一。1983 年,Reevrs 成功地提出了一种模拟不规则自然景物生成动画的系统,即粒子系统。粒子系统采用了一套完全不同于以往的造型、绘制方法来构造、绘制景物,造型和动画巧妙地连成一体。粒子系统并不是一个简单的静态系统,随着时间的推移,系统中已有粒子不仅不断地改变形状和运动,而且不断有新的粒子加入,并有旧的粒子消失。为模拟生长和死亡过程,每个粒子均被赋予一定的生命周期,它将经历出生、成长、衰老和死亡的过程。

在一般应用中,粒子系统在某个空间区域定义,然后应用随机

过程随时间而改变系统参数。这些参数包括单个粒子的运动路径及它们的颜色和形状。微粒形状可以是小球、椭球、立方体或其他形状,微粒的大小和形状随时间变化,而其他性质如微粒透明度、颜色和移动都将随机地变化。在某些应用中,微粒运动路径可以按照运动学方式描述或由重力场等给定的力进行定义。粒子系统的这一特征,使得它充分体现了不规则模糊物体的动态性和随机性,很好地模拟了火、云、水、森林和原野等自然景物。生成粒子系统某瞬间画面的基本步骤是:

- (1) 生成新的粒子并加入到系统中;
- (2) 赋予每一新粒子以一定的属性;
- (3) 删除那些已经超过其生命周期的粒子;
- (4) 根据粒子的动态属性对粒子进行移动和变换;
- (5) 绘制并显示由有生命的粒子组成的图形。

1.5.6 点模型

近年来的研究表明,基于点的建模、处理和绘制在计算机图形学领域内正受到越来越多的关注。基于点的模型表示,即采用离散的采样点的集合表示连续的模型外表面,也就是在连续的模型外表面上,按一定的规则(如:均匀采样、基于曲率变化的采样等)进行采样,产生一系列称之为表面采样点的三维点坐标,其采样点可以带有法向、表面特性及材料属性等,从而把连续的模型外表面表示成这些离散的三维采样点的集合。我们称这样的集合为表面点集,表示的模型称为点模型。点模型的表示与处理可分成三个主要部分,即数据获取、模型处理以及绘制[YANG04]。

(1) 数据获取:点模型数据获取的主要来源是 3D 扫描仪通过扫描生成的点云原始数据,三维点云再配合光学照片可以得到带颜色或纹理色彩的三维实物模型。点模型数据的另外一个来源是现存的几何模型。所有几何模型(多边形网格模型、参数样条模型、隐式曲面、CSG 树、粒子系统等)均能方便地转化成点模型,不同的

采样精度能得到不同分辨率的点模型。

(2) 数据处理：点模型的数据处理分前期处理和后期处理。通过扫描得到的原始数据具有噪声、拼接错位、空洞、不确定性和过度采样等问题，需要经过前期处理才能使用。前期处理的目标是从原始点云数据中构造出一个连续的表面模型，而后期处理是在前期处理的结果上再作进磨光、多分辨率简化、编辑、变形、布尔运算等操作，得到各种各样的点模型。对点模型的数字几何处理 (DGP) 也在后期处理阶段进行，其目标是在点模型的流形表面领域内拓展基本的信号处理概念。

(3) 模型绘制：点绘制的目标是在屏幕上输出点采样后直接重建三维空间的连续信号，再对连续信号进行滤波后重新采样并投影至二维屏幕进行光照计算。由于点模型没有拓扑关系，因此，利用重新采样和投影计算，可以加快速绘制的大规模数据构成场景的绘制过程。点模型的绘制同样需要解决面绘制所遇到的基本问题，如光照计算、可见性计算、阴影计算、纹理映射、反走样等。另一方面，点模型的离散性使得在视点靠近物体的时候，需要考虑点模型和面模型的混合绘制。基于点的绘制技术的一个特点是离散点集映射到屏幕后需要在图像空间内作图像重构处理来填补空洞并重构物体表面。

对于由离散采样点表示的模型，为了绘制出视觉上连续的图像，Zwicker 等在 2001 年首先提出了面向绘制的表面 Splats[ZWIC01]，对每个采样点坐标、法向和半径定义了物体空间中的圆盘，这种表面 Splats 是为了在相邻采样点之间架起一座模型表示的桥梁。近几年来，研究人员提出了许多基于点的绘制技术和方法，这些技术和方法大体上可作如下形式的分类：

(1) 从绘制时空中的数据流向进行分类，可以分为正向绘制方法和逆向绘制方法。正向绘制方法是一种采样点元由景物空间向图像空间进行投影的绘制方法，如，Z-BUFFER 方法；而逆向绘制方法是一种从屏幕图像空间中的显示单元出发，搜索景物空间中相关单元的绘制方法，如，光线跟踪绘制方法：该方法计算出由视点出

发穿过屏幕每一个像素的视线与景物空间中的点模型表面的交点几何及其属性，再将其显示在屏幕上。

(2) 从对面元的处理方式进行分类：一类是在图像空间中直接将每一个采样点解释为具有一定大小的无方向的圆盘（或正方形），采用这类处理方式的采样点模型往往采用正向绘制方法进行绘制；另一类则在物体空间中将纯几何采样点的表达方式转换成基于面元的表达方式，再将这些面元绘制到屏幕上，采用该处理方式的采样点模型可以采用正向绘制方法，也可采用逆向绘制方法。

相对于传统的基于多边形的绘制体系，基于点的绘制具有以下优势：① 基于点的绘制可避免传统多边形模型绘制时的大量时间开销；② 点能非常快速地绘制，无需进行复杂的多边形裁剪、扫描转换等中间处理过程；③ 正因为点模型拓扑结构简单，因此能更方便地进行视点相关的表面重采样。只要根据硬件条件控制绘制点的数目，点绘制可以很容易地实现固定的绘制速率。基于点的造型与绘制特别适合于表面几何高度复杂或具有复杂表面光照细节的模型，如雕塑与石刻，也能用于火焰、流云、落叶、草地、树木等自然场景的模拟。此外，基于点的绘制能很方便地与传统的几何模型（多边形模型、样条面片模型等）混合绘制。

1.6 计算机动画模型编辑技术

计算机动画模型编辑技术与模型造型技术的发展紧密相关，不同的造型方法有着不同的编辑技术特征，不同的模型数据表示同样有着不同的编辑方法。例如，参数连续模型与离散网格模型的编辑方法有着截然不同的处理风格。在参数模型表示中，其表示方法本身就具有编辑能力。Bézier 和 UNRBS 曲线曲面可以通过控制顶点、节点向量和有理表示的权因子进行模型的形状控制，或是通过引进具有形状控制的其他参数对曲线曲面达到编辑的目的。然而，对于

离散网格模型的表示,则不能从本身的顶点集和简单的拓扑连接关系中直接找到处理和编辑的方法,而是必须将这些关系中简单的数据集合绑定或约束到另一种表示该模型的关系上,以求获得模型处理或编辑技术的更新,这就是数字几何处理问题。

自由变形 (FFD) 技术,发源于 1999 年 Sederberg 和 Parry 的开创性工作。目前,自由变形技术的研究已相当成熟,并派生出了许多扩展 (EFFD) 方法。它是一种适合柔性物体动画的空间自由变形算法,并为商业造型软件所广泛采用。该方法将三维模型嵌入到由 Bézier 超曲面构成的 FFD 块中,当设法使 FFD 块发生形变时,被嵌入其中的三维模型也随之变形。这类算法的共同特点是需要根据原始模型的几何形状以及用户的编辑意图来构造原始模型的简化版本的代理模型,用户通过操纵代理模型间接地完成对原始模型的编辑。按照代理模型类型的不同,自由变形技术可以分为三大类:基于控制网格 (Lattice) 的方法、基于控制曲线 (Curve) 的方法和基于控制点 (Point) 的方法。用 FFD 进行模型编辑一般包括三个步骤:首先,用户交互设定代理模型,并将原始模型嵌入 (参数化) 到代理模型所表示的空间之中;然后,用户通过操纵代理模型来表达特定的编辑意图;最后,根据变形后的代理模型以及原始模型的参数化信息恢复出编辑后的原始模型。

Morphing 技术,是指将原始网格模型光滑连续地过渡为目标网格模型的过程,在计算机动画和特效制作中有着广泛的应用。实现 Morphing 效果的关键在于建立原始模型与目标模型之间的顶点位置与拓扑结构的对应关系,再通过光滑路径插值算法得到自然连续的过渡效果。Morphing 技术分为图像渐变和网格模型渐变。网格 Morphing 技术分为平面分段线性模型和三维网格曲面模型。目前,有多种算法可建立两个模型之间的拓扑关系和特征对应,它们主要包括参数化拓扑合并,以及扩展的参数化拓扑合并,例如,基于特征分解的参数化对应、星型物体的特征对应、网格多分辨率表示的特征对应、几何信号处理的特征对应等。图 1.6 是多分辨率 Morphing 变形动画 [LEE99]。



图 1.6 多分辨率 Morphing 变形动画

多分辨率编辑技术,基于三维网格模型多分辨率 (Multireslutino) 表示的多分辨率网格模型编辑算法是目前研究和讨论较为广泛的一类网格模型编辑算法。其主要思想是对原始网格模型进行网格重构,将原始网格模型的几何信息分解为若干频带,获取一组由基网格及若干层细化网格组成的多分辨率网格表示,其中基网格反映了原始网格模型的基本轮廓,而细化网格模型由粗至精逐层包含了原始网格模型的局部几何细节。利用多分辨率网格表示进行网格编辑时,操作者首先将分解后的简单的基网格手工调整为预想姿态,再通过细化算子将各层细化网格的几何细节成分自动恢复到变形后基网格上而获得网格模型的最终的变形效果。多分辨率表示使得原始网格模型在不同频带上的细节在变形过程中得到了有效地保持,因此可以获得自然而合理的变形结果。

普通三维网格模型并不具有多分辨率的表示形式,需要对网格模型进行重构与改造方能获得多分辨率表示。实现网格多分辨率表示的方法有两类:第一类方法是基于网格子分算法,在多分辨率分解过程中将原始网格模型简化为基网格,并在简化过程中建立原始网格模型到基网格的参数化映射,而在多分辨率重构过程中,利用子分算法逐层获取细化网格,再根据参数化信息记录各层细化网格模型中网格顶点位置的预测误差,并将之作为多分辨率表示中的细节信息。该方法可用较少的层级表示原始网格模型,基网格与各层细化网格模型之间存在固定的子分拓扑连接关系,易于分层编辑与合成。第二类方法是基于累进网格模型,在每一层分解过程中进行一次“边坍塌”操作,即删除一个顶点,再根据“边坍塌”操作后的邻接顶点预测删除顶点的位置,记录此预测误差,并将之作为本层分解中的细节信息。这类算法的优点是在多分辨率的分解与合成过

程中不改变原始网格模型的拓扑连接关系，对具有复杂拓扑结构的网格模型更具普遍性；缺点是分解层级过多。

该类算法的优点在于可以根据网格模型多分辨率表示提供的分层信息，对模型的大致轮廓与多尺度细节分别进行编辑，进而得到丰富的编辑效果，但在将普通多面体网格模型转化为多分辨率表示的过程中，本身实现困难、运算较慢，且编辑操作较为复杂，致使该类算法在动画制作中的应用受到限制。

微分网格处理技术，是指将网格的几何属性（如法向、曲率等）隐含地表示在网格的另一种形式中，即微分表示，我们通过求解线性系统（操作这些隐含的几何属性）以达到编辑网格的目的。微分网格处理技术包括网格拉普拉斯表示的微分域方法和网格泊松表示的梯度域方法。微分域方法是将网格的顶点坐标用其一环邻域重心与原坐标之差来表示，即拉普拉斯坐标。这种表示反映了曲面在该顶点处的法向和平均曲率，也就是隐含了曲面在该点的几何细节，通过实施局部的保细节变换，再求解整体线性系统进而恢复原网格的几何重建。网格泊松表示的梯度域方法是被编辑网格视为二维流形域，再在此域上定义线性基函数、梯度和散度，并根据变分原理建立泊松重构线性系统。模型的编辑是通过对隐含在方程中的梯度进行局部变换实现的，由于在泊松重构过程中不改变已定义的梯度微分量，因此具有保持曲面细节的功能。微分网格处理技术是近几年发展起来的模型编辑方法，目前还处在进一步的研究阶段。不过，在这一技术中，已出现了较多的研究成果，且是模型编辑算法研究的热点之一。最近几年，在 SIGGRAPH 会议上，每年都有网格微分处理的新技术。

1.7 小结

本章讨论了与计算机动画模型编辑相关的四个问题，即计算机动画发展史、计算机动画的研究内容、三维动画技术和计算机动画

模型编辑算法。在计算机动画发展史中，给出了计算机动画的一般性概念，及其发展的四个阶段。在计算机动画研究内容方面，主要从计算机动画系统的功能模块和实现技术方面进行了介绍。三维动画是目前动画发展的主流技术，也是计算机动画技术的难点，目前还有许多问题需要进一步的研究。数字几何处理与模型的表示和编辑是同一几何问题，这里值得关注的是近几年出现的几个新的研究热点，如多分辨率编辑技术、微分网格处理技术等，以及点模型的表示与绘制技术在计算机动画角色造型中的特殊艺术效果之功效。

第 2 章

参数样条及编辑技术

计算机动画系统中的参数样条是用具有一定连续阶的参数方程表示的曲线曲面模型，目前在主流计算机辅助设计系统（CAD）和计算机动画系统中仍然作为主要建模方法之一，特别是运动路径的编辑。参数样条模型主要包括三次多项式样条、曲线曲面的 Hermite 样条表示及其扩展样条、Bézier 表示和 NURBS 模型。这些方法不但在构造自由曲线曲面模型方面具有光滑连续特性，而且在局部造型与编辑方面也有很好的可控性和灵活性，容易实现复杂角色和动画路径的编辑与构造。本章主要讨论参数样条编辑算法的基本问题。

2.1 参数样条表示的特性

样条源于工业设计中的“模线”细木条，是通过一组指定点集而生成的平滑曲线。样条可用于设计曲线曲面的形状，也可将绘制的图形数字化或指定场景中对象的动画路径、相机位置等。样条典型的应用包括：汽车外形设计，满足动力学的飞机、航天飞机和船体的表面设计，场景物体和角色造型。样条的表示采用满足一定连续条件的分段曲线拼接而成，具有整体的数据插值和局部的形状调整。

2.1.1 参数表示的几何不变性

当用有限的信息决定一个形状时，曲线曲面可以用标量的显函数

$$y = f(x), \quad z = f(x, y)$$

与隐方程

$$F(x, y) = 0, \quad F(x, y, z) = 0$$

表示，也可用参数形式

$$\mathbf{p}(u), \quad \mathbf{p}(u, v)$$

表示。曲线曲面表示的几何不变性是指它们的形状不依赖于坐标系的选择，或者说在旋转与平移变换下保持不变的性质。

假设所给三个数据点 $(0, 0)$ ， $(2, 1)$ ， $(3, 0)$ ，已经知道，这三个点唯一决定一条抛物线，因此，我们要求当数据点确定之后，其形状随之固定，即抛物线不随坐标系选取的不同而发生改变。

但事实上，该曲线的显示函数为

$$y = -0.5x^2 + 1.5x$$

曲线形状如图 2.1 (a) 所示。下面将上述三点绕原点逆时针旋转 45° 后，其坐标为 $(0, 0)$ ， $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ ， $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ ，所确定的抛物线显函数为

$$y = -\sqrt{2}x^2 + 4x$$

曲线形状如图 2.1 (b) 所示。

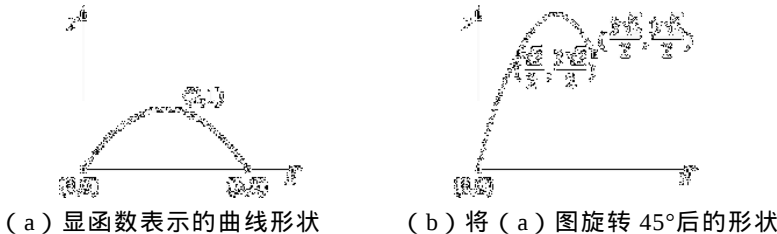


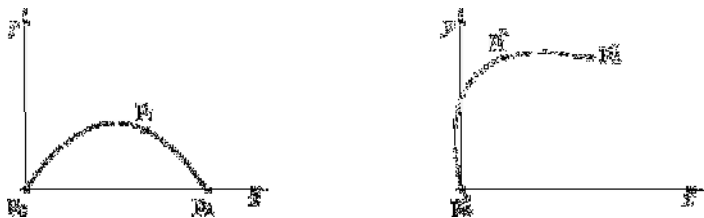
图 2.1 显函数表示不具有几何不变性

由此可以看出, 图 2.1 (a) 与图 2.1 (b) 在形状上有很大的不同, 或者标量函数不具有几何不变性。当然, 也可采取将原曲线逐点作相同的旋转以得到新的曲线的方法, 以使该曲线与原曲线具有相同的形状。但实际上并非如此, 因为曲线上有无穷多点。那么, 我们怎样仅通过三个信息点的旋转就可以获得形状不变的新曲线呢? 下面给出参数表示的形式。

对上述三个数据点确定的曲线可表示为

$$\mathbf{p}(u) = \frac{3}{2}\left(u - \frac{2}{3}\right)(u-1)\mathbf{p}_0 - \frac{9}{2}u(u-1)\mathbf{p}_1 + 3u\left(u - \frac{2}{3}\right)\mathbf{p}_2, \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (2.1)$$

当 $u=0, 0.75, 1$ 时, 参数曲线分别到达 $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 这三个数据点。图 2.2 (a) 是参数曲线 (2.1) 的形状; 图 2.2 (b) 是对三个数据点绕原点逆时针旋转 45° 后, 对应点 $\mathbf{p}_0^*, \mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*$ 所确定的参数曲线形状。



(a) 参数方程表示的曲线形状 (b) 将 (a) 图旋转 45° 后的形状

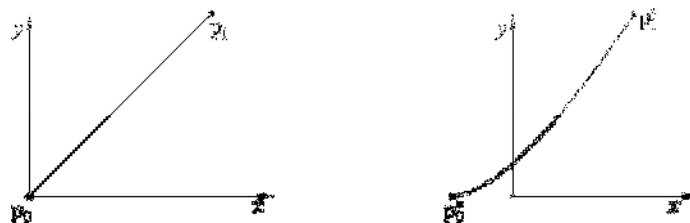
图 2.2 具有几何不变性的曲线参数表示

显然, 这两条曲线的形状是完全一致的。事实上, 旋转任意角度也是如此。因此, 曲线的该种参数表示是满足几何不变性质的, 即保持曲线形状的旋转不变性。但也不是所有的参数表示都具有几何不变性。例如, 参数曲线

$$\mathbf{p}(u) = (1-u)^2\mathbf{p}_0 + u^2\mathbf{p}_1, \quad 0 \leq u \leq 1$$

取 $\mathbf{p}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{p}_1 = (3, 3)$ 时, 曲线形状如图 2.3 (a) 所示。将该两点平移 $(-1, 0)$ 后, 得 $\mathbf{p}_0^*, \mathbf{p}_1^*$ 两点, 用相同的参数表示, 结果如图 2.3 (b) 所示。显然与图 2.3 (a) 相比, 形状有本质的差异, 即对

平移变换无不变性。



(a)

(b)

图 2.3 不具有几何不变性的参数曲线表示

这说明并不是所有的参数表示都具有几何不变性。但我们必须明白, 什么情况下才具有几何不变性? 这对于曲线曲面 (模型) 的编辑非常重要。

一般而言, 在 CAGD 中, 曲线曲面表示可以由一组基函数及与数据点相联系的系数矢量来给出, 并写为

$$\mathbf{p} = \sum_{i=0}^n \varphi_i \mathbf{p}_i$$

其中, $\mathbf{p}$ 为参数函数, $\varphi_i, \mathbf{p}_i$ 为对应的基函数和系数矢量, 称为曲线曲面的基表示。当 $\sum_{i=0}^n \varphi_i \equiv 1$ 时, 称为规范基表示。因此, 当 $\mathbf{p}_i$ 为数据点的位置矢量时, 可称为绝对矢量, 此时, 规范基表示皆为绝对矢量表示; 当 $\mathbf{p}_i$ 为表示相互关系的边矢或各阶导矢时, 可称为相对矢量。若 $\sum_{i=0}^k \varphi_i \equiv 1$, 且 $0 \leq k < n$ 时成立, 可称为部分规范基表示。对用规范基表示的参数曲线曲面来讲, 其整体具有旋转平移不变性。设旋转矩阵为 $\mathbf{R}$, 平移矩阵为 $\mathbf{T}$, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^* &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{T} = \left(\sum_{i=0}^n \varphi_i \mathbf{p}_i \right) \cdot \mathbf{R} + \mathbf{T} \\ &= \sum_{i=0}^n \varphi_i (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{R}) + \sum_{i=0}^n \varphi_i \mathbf{T} = \sum_{i=0}^n \varphi_i (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{R} + \mathbf{T}) \end{aligned}$$

于是

$$\mathbf{p}^* = \sum_{i=0}^n \varphi_i \mathbf{p}_i^*$$

其中, $\mathbf{p}_i^* = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{R} + \mathbf{T}$ 。由此可见, 规范基表示具有几何不变性。事实上, 不难证明部分规范基表示也具有几何不变性, 只是对其中的相对矢量只作旋转变换不作平移变换即可。

2.1.2 连续性条件

为了保证参数曲线段从一段到另一段有平滑的过渡, 可以在连接点处要求满足各种连续条件, 其曲线的光滑度可用对其变量的可微性来度量。曲线的连续性条件根据应用的要求可分为参数连续性和几何连续性。若所给两曲线段为

$$\mathbf{p}_0(u), \quad u_0 \leq u \leq u_1 \quad \text{和} \quad \mathbf{p}_1(u), \quad u_1 \leq u \leq u_2$$

且在 $u = u_1$ 处均有定义。若两曲线段在 $u = u_1$ 处是简单相连接的, 则称为 0 阶参数连续性或 C^0 连续, 即有

$$\mathbf{p}_0(u_1) = \mathbf{p}_1(u_1)$$

如图 2.4 (a) 所示。若两曲线段在 $u = u_1$ 处有相同的连续一阶导数, 即有相同的切线方向, 则称为一阶参数连续性或 C^1 连续, 即有

$$\mathbf{p}_0'(u_1) = \mathbf{p}_1'(u_1) \quad \text{和} \quad \mathbf{p}_0''(u_1) = \mathbf{p}_1''(u_1)$$

如图 2.4 (b) 所示。一阶连续性说明曲线在连接点附近, 切线的变化率可能不连续, 形状会有突变, 相机沿该曲线运动时会出现不连续的场景。但对于动画模型的构造与编辑或数字化绘图是可以满足要求的, 对于精密 CAD 却有更高要求的连续阶。若两曲线段在 $u = u_1$ 处有相同的连续一、二阶导数, 即有相同的切线变化率, 则称为二阶参数连续性或 C^2 连续, 即有

$$\mathbf{p}_0^{(k)}(u_1) = \mathbf{p}_1^{(k)}(u_1), \quad (k = 0, 1, 2)$$

成立, 如图 2.4 (c) 所示。曲线在拼接点附近的变化更加平滑, 该种连续性条件在工业设计中应要求满足, 若将它作为动画路径选择则更加平稳。

类似地, 可以定义 C^n 阶参数连续性。



(a) 0 阶连续性 (b) 一阶连续性 (c) 二阶连续性

图 2.4 分段曲线参数连续阶的构造, 图中圆点为拼接点

参数曲线的参数连续性实际上沿用了函数曲线的可微性, 它与参数的选择有关。在参数曲线上出现零切矢处虽然仍是可微的, 但却可能是不光滑的; 反之, 光滑的曲线有可能是不可微的。事实上, 从经验直觉中就发现, 两曲线段相连接, 只要在连接点有相同的切线方向就可以认为是光滑的, 并不要求有相同的切矢模长。其实, 几何连续性条件正是对这一光滑度的可微性描述。对正则参数曲线的几何连续性条件, 只要求两条曲线段在拼接点处的参数导数成比例, 在拼接点处有相同的切矢方向或反向切矢即可, 它们的模长度可以不同。零阶几何连续 G^0 与零阶参数连续 C^0 是一致的。一阶几何连续是指在两相邻曲线段的交点处一阶导数成比例, 记为 G^1 。二阶几何连续是指在两相邻曲线段的交点处一阶导数和二阶导数均成比例, 或者具有相同的曲率, 记为 G^2 。对于几何连续的定义有多种, 而且对不同类的曲线可有实用判别条件。

一般地, 可将 G^n 连续定义为: 当且仅当两曲线段的相应弧长参数化在公共连接点处有直到 C^n 连续, 或者有

$$\dot{\mathbf{p}}_0(u_1) = \dot{\mathbf{p}}_1(u_1) \neq \mathbf{0}$$

其中, $\dot{\mathbf{p}}$ 是曲线对弧长参数的导数。

由于几何连续性摆脱了对参数的依赖, 刻画了形状内在的几何特征性质, 进而获得了对形状控制的更大灵活性。这一性质无疑给