

第一章 电路模型和基尔霍夫定律

电路理论是研究电路中所存在的普遍规律的理论。它在现代通信技术、电子学、自动控制技术等学科中是一门基础学科，占有重要地位。

电路理论可分为两大主干内容：一是电路分析，主要内容是在给定电路结构、元件参数的条件下，寻求电路输入信号与输出信号之间的关系；二是电路综合，主要研究在给定输入信号和输出信号即电路传输特性的条件下，寻求电路的结构和参数。很明显，必须首先学习电路分析，也可以说电路分析是电路理论的基础。

1.1 电路和电路模型

实际电路总是为了实现某种功能而设计和制作的。电路的一种重要功能就是伴随电流在电路中流动实现电能的传输、分配和储存并进行能量的转换。所以电路可看成由电源、负载、联接导线和控制四个部分组成。其中电源将化学能、机械能等非电能转换成电能为电路提供能量，负载吸收电能并储存起来或者转换成非电能，联接导线起着传输和分配能量的作用，控制部分则对电路的各个部分按人们的设计进行控制。例如最简单的手电筒电路如图 1-1(a) 中各部分是按实际元件画出的，图 (b) 则是按电路符号画出，称为电路模型。在这里电池作为电压源为电路提供能量，灯泡作为负载可以用电阻来表示，开关控制着电路工作与否，导线起着传输能量的作用。

在通信、自动控制以及计算机等电子设备中，为了对电信号进行处理，需要采用不同类型的电路来完成各种任务。在这些设备中，电路的一个重要功能就是将输入信号（也称为激励）经过变换处理成为所需要的输出信号（也称为响应）。

例如图 1-2 画出的是收音机的功能框图，由图可见，一台简单的收音机是由输入电路（包括天线及调谐电路）、检波电路、放大电路、扬声器以及电源电路组成。输入电路的功能

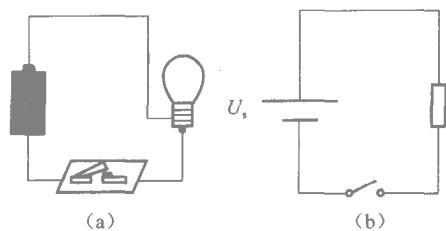


图 1-1 手电筒电路

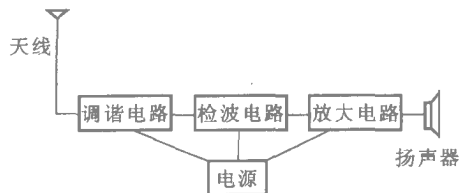


图 1-2 收音机功能框图

是接收由各个广播发射台发出的不同信号，并从中选择出所需要的信号；检波电路的功能是

将调谐电路选择出来的高频信号做适当的处理，从中取出广播台所传送的音频信号和除去其他不需要的信号；由于音频信号很微弱，因此在送入扬声器之前，还需要经过放大电路加以放大；扬声器则是将电能转换成声能；电源电路的功能是为各部分电路的工作提供能量。

从以上两个例子，可以对电路的功能有所了解。

图 1-1(b) 是手电筒电路的电路模型。在电路分析课程中一般都是用电路模型来表示电路在一定的条件下对实际元件加以近似理想化即用 一个表征其主要物理特性的理想元件模型来代替它。例如用电阻元件 (R) 表示某些部件将电能转化成其他形式的能量如光能、热能、机械能等的特征并统一表示为吸收电能的特征用电感元件 (L) 表示某些部件储存磁场能量的特征，称为理想电感；用电容元件 (C) 表示某些部件储存电场能量的特征，称为理想电容；用电压源 (u_s) 表示电池、发电机等为电路提供稳定电压的特性；用电流源 (i_s) 表示光电池等为电路提供稳定电流的特性。这几个理想元件的电路符号如图 1-3 所示。用理想元件构成的电路称电路模型。今后所提到的电路，除特别指明外，均指电路模型。

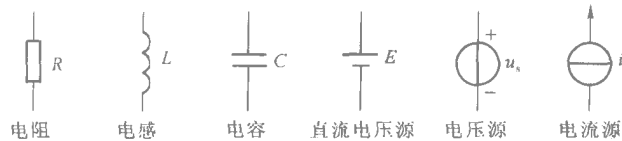


图 1-3 几个理想元件的电路符号

实际器件与理想电路模型是有区别的，例如在电路模型中，元件之间的连接线被认为是没有电阻的，而实际上导线总有一点电阻；在工作时两根导线之间还可能产生分布电容；一个实际电感除了储存磁场能量的特性外，它的消耗能量的特性也是不可忽略的。因此在必要时，也可以用几个理想元件的组合来表示一个实际元件。这些知识以后将逐步介绍。

这里假设的理想元件是抽象的模型，它们没有体积的大小，其特性集中在空间一点上，称为集总参数元件。由集总参数元件构成的电路称为集总参数电路。这种集总参数的假设是有条件的即电路的尺寸 l 远小于外加激励信号的波长 λ 即

$$l \ll \lambda$$

而波长与频率的关系为

$$\lambda = C/f$$

其中 $C = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ (光速)

例如日常供电系统输出交流电的正弦波频率 f 为 50Hz 其波长 λ 为 6000km 对于普通实验室的设备来说是符合集总参数条件的，而对于远距离的电力输电线则不满足集总参数的条件。又如若微波信号频率 f 为 2000MHz 其波长 λ 为 0.15m 显然对于普通实验设备也不满足集总参数的条件；这时就不能用集总参数的概念，而应当采用分布参数或电磁场理论等其他领域的理论来分析电路。

当满足集总参数假设的条件时，在外加信号发生变化瞬间，激励产生的效应已经到达整个电路。可以认为，电效应在电路的所有部分同时发生，因此集总参数假设又被称为同时性公设。集总参数电路的概念意味着电效应的传播速度为无限大。

电路分析是在集总假设前提下，讨论电路中的基本定律、定理及求解电路的分析方法。

在实际电路的分析中用到这些定律与分析方法时一定要注意它的工作条件。

在集总参数电路的前提下，还需要将电路加以分类。

当元件的参数与工作条件无关，即元件参数是常数时，称为线性元件。非线性元件的元件参数则随工作条件的变化而不同。例如电阻元件的电阻值不随其工作电压或电流的变化而改变，称为线性电阻。而晶体二极管是非线性电阻，它的电阻随着工作电压的变化而变化，称为非线性电阻。由线性元件组成的电路称为线性电路。电路中只要含有一个非线性元件，电路就属于非线性电路，对它的分析方法与线性电路有很大的区别，第十三章将简单介绍非线性电阻电路的基础知识。

当元件参数与时间无关时(电源除外)称为时不变元件，否则称为时变元件。由时不变元件组成的电路称为时不变电路。电路中只要含有一个时变元件，电路就属于时变电路。

附录 E 将简单介绍由时变元件组成的时变电路。

电路分析基础研究的主要是集总参数假设下的线性时不变电路。

此外，在电路理论中经常用到网络这个名称，在电路分析中，网络的含义与电路相同，都是指一些元件的相互连接。

1.2 电路分析的基本变量

电路由支路和节点构成。在电源激励下，支路中有电荷移动形成电流，节点之间有确定的电压。电路分析就是在给定电路结构、元件参数和激励的情况下计算电路中的电流、电压与功率，所以把支路电流和支路电压等称为电路分析的变量。

1.2.1 电流

电子和质子都是带电的粒子，电子带负电荷，质子带正电荷。电荷量(也称电量)的单位是库仑(简称库，用字母 C 表示)， 6.24×10^{18} 个电子所具有的电量等于 1 库仑，用 q (或 Q) 表示电量。带电粒子有规则的移动便形成电流。如图 1-4 所示。

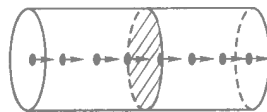


图 1-4 电荷的流动

1. 电流的定义

单位时间内通过导体横截面的电荷量定义为电流强度，简称为电流。用字母 i 表示，即

$$i = \frac{dq}{dt}$$

也可以说电流反映了电荷对于时间的变化率。

2. 电流的方向

正电荷移动的方向定义为电流的方向。实际上支路的电流是带有负电荷的电子流，但习惯上把正电荷移动的方向定义为电流的方向。

如果电流的大小和方向不随时间变化，则这种电流称为直流电流，可以用 I (或 i) 表示，这时电流与电荷的关系表示为 $I = Q/T$ 。如果电流的大小和方向都随时间变化，则这种电流称为交变电流(简称交流)用 $i(t)$ 表示，或简写为 i_0 。

3. 电流的参考方向

在单个电源作用于电路时，可以直接判断出电流的方向，但是当多个电源同时作用于较复杂的电路时，未经计算就难以直接判断出各电流的方向。如图 1-5 中，无法直接判断 R_2

支路电流的方向。所以在分析电路时首先假设支路电流的一个方向，这个任意假设的方向称为电流的参考方向，在支路中用箭头表示如图 1-6 所示。或用双下标表示如 a、b 端之间的电流可表示为 i_{ab} 表示从 a 端流向 b 端的电流并有 $i_{ba} = -i_{ab}$ 。

利用电流的参考方向来计算电路，计算结果若是正的，说明电流的参考方向与真实方向一致。计算结果若是负的，说明电流的参考方向与真实方向相反，但并不需要改变电流的参考方向，而是以标出的参考方向与电流的正负号结合起来表示电流的真实方向。所以参考方向一经设定，在计算过程中不再改变。这种表示方法对于交变电流同样是非常重要的和有效的。交变电流 $i(t)$ 是时间的函数，它的大小与方向随时间而变化，它的正值或负值都是相对于参考方向而言的。换言之，如果某支路电流未标明参考方向，则电流的正负值失去了参照方向，也就失去了实际意义。

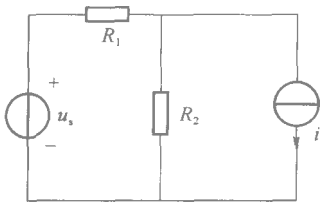


图 1-5 两个电源作用于电路



图 1-6 电流的参考方向

4. 电流的单位

电流的单位为安培 (简称安 用字母 A 表示) 常用单位还有毫安 (mA) 微安 (μA) 等。这时电荷的单位为库仑 时间的单位为秒 (用字母 s 表示)

$$1 \text{ 安培} = \frac{1 \text{ 库仑}}{1 \text{ 秒}}$$

1.2.2 电压

如果电荷通过某支路 支路两端存在电位差 电荷与支路之间会发生电能的交换 若支路的 a 端电位高于 b 端电位 单位正电荷从 a 端移到 b 端 电场力做功 电荷失去电位能 这部分能量被支路所吸收 例如图 1-7 所示右侧电阻支路) 当单位正电荷从 b 端移到 a 端即从低电位端移到高电位端 必然要由外力做功 而电荷获得电位能 (例如图 1-7 所示左侧电源支路)。

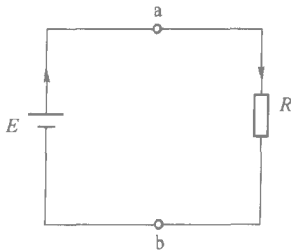


图 1-7 电压的概念

1. 电压的定义

电路中两点间的电压就是两点间的电位差，数值上等于单位正电荷从高电位点移动到低电位点时，电场力所做的功，用符号 u 表示：

$$u = \frac{dw}{dq}$$

上式表明 单位正电荷从 a 端移到 b 端由电场力做功时电压 u 为正值 若由外力做功则电压 u 为负值。由此可见，电压也是一个代数数量。

2. 电压的极性

电压的极性是高电位端到低电位端。如果电压的大小和方向不随时间变化，则这种电

压称为直流电压 可以用 U 或 u 表示。如果电压的大小和方向都随时间变化, 则这种电压称为交变电压 用 $u(t)$ 表示 或简称为 u 。

3. 电压的参考极性

与支路电流需要设定其参考方向一样, 对于支路电压, 也需要设定其参考极性。在电路图中‘+’表示高电位端, ‘-’表示低电位端 也可以用箭头表示 箭头指向电压 电位降 的方向 如图 1-8 所示 或用双下标表示 如 a, b 端之间的电压可表示为 u_{ab} 表示从 a 端至 b 端的电压 并有 $u_{ba} = -u_{ab}$ 。



用设定的参考极性去计算电压, 计算结果若是正的, 说明电压的参考极性与真实极性一致。计算结果若是负的, 说明电压的参考极性与真实极性相反。若没有设定参考极性, 则电压的正负值毫无意义。

图 1-8 电压的极性

4. 电压的单位

电压的单位为伏特 (简称伏, 用字母 V 表示) 常用单位还有毫伏 (mV), 千伏 kV 等。这时能量的单位为焦耳 (用字母 J 表示) 电荷的单位为库伦。

$$1 \text{ 伏特} = \frac{1 \text{ 焦耳}}{1 \text{ 库伦}}$$

5. 参考点、电位与电压

在分析电路时 为了方便 可以任意设置电路的参考点 参考点即电路的零电位点 但一个电路只能设置一个参考点。当设定电路中某一点为参考点, 则电路中各点的电压也就是该点到参考点的电位差。参考点、电位与电压有以下关系:

- (1) 各点的电位随参考点设定的不同而不同;
- (2) 两点间的电压与参考点的设置无关。

通过后面例 1-6 的学习将有助于进一步理解这些概念。

1.2.3 电流与电压的关联参考方向

前面谈到, 支路电流的参考方向与支路电压的参考极性是可以任意选定的, 元件上电压、电流参考方向设定的不同 会影响到计算公式的正负号。但为了分析上的便利 常常将同一支路的电流与电压的参考方向选为一致, 即电流的参考方向由电压参考极性的“+”端指向“-”端 如图 1-9(a) 所示, 这种方式称为电流与电压在关联参考方向下。这个概念非常重要, 在大多数情况下, 支路的电流与电压是否是关联参考方向将影响到支路的伏安特性 这一点以后会逐步介绍。当电压与电流为关联参考方向时 可以只标出一个变量的参考方向如图 1-9(b) 所示 非关联参考方向时必须全部标出 如图 1-9(c) 所示。

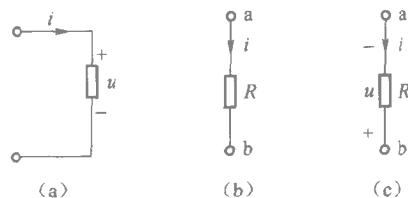


图 1-9 电压与电流的关系参考方向

例 1-1 请写出图 1-9(b)、(c) 所示电阻的电压与电流的关系 (简称伏安关系)

解 图 b) $u = Ri$ (电压与电流在关联方向下、欧姆定律);

图 c) $u = -Ri$ (电压与电流在非关联方向下)

1.2.4 功率与能量

在电路的分析与计算中,研究能量的分配和交换是重要内容之一,特别是功率可直接反映出支路的能量变化情况。用 w 表示能量 用 p 表示功率。

1. 功率的定义

单位时间内电路所吸收的电能,称作这部分电路吸收的功率。

$$p = \frac{dw}{dt}$$

上式可理解为功率是能量对时间的变化率,若随着时间的变化能量是增加的,则功率是正的 表示电路吸收 或消耗 能量 例如电阻支路 若随着时间的变化能量是减少的 则功率是负的 表示电路供出 或产生 能量 例如电源支路。

2. 功率的计算

由定义式可知

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = u \cdot i$$

从上式的结果我们发现,功率可以用电流与电压的乘积来计算,即当支路的电流与电压在关联参考方向下,电流与电压的乘积就是此支路吸收的功率。计算结果为正时,说明支路吸收功率;计算结果为负时,说明支路供出功率。这种讨论方式完全符合功率的定义,并且便于理解和记忆。需要说明的是,有的书上有不同的讨论方式,但其实质是一样的。当支路的电流与电压在非关联参考方向时,计算公式要加负号。

$$p = -ui$$

3. 功率的单位

功率的单位为瓦特(简称瓦 用字母 W 表示)常用单位还有毫瓦(mW)、千瓦(kW)等。这时能量的单位为焦耳,时间的单位为秒,电压的单位为伏特,电流单位为安培。

$$1 \text{ 瓦特} = \frac{1 \text{ 焦耳}}{1 \text{ 秒}}$$

例 1-2 已知图 1-10 中支路电流 $i = 1 \text{ A}$ 电压 $u = 3 \text{ V}$ 求吸收功率 p 。

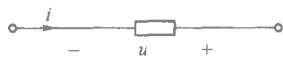


图 1-10 例 1-2 图

解 电压与电流在非关联参考方向下

$$p = -ui = -3 \text{ W}$$

吸收功率 (-3 W) 或供出功率 3 W 。

例 1-3 已知图 1-11 中电压源支路 电流 $i = -2 \text{ A}$ 电压 $u = 3 \text{ V}$ 求功率 p 并说明支路是否吸收功率。

解 电压电流在关联参考方向下,支路的吸收功率为

$$p = ui = 3 \times (-2) = -6 \text{ W}$$

所以支路不是吸收功率而是供出功率 6 W 。

例 1-4 已知支路电压电流参考方向如图 1-12 所示。若 $u = -200 \text{ V}$ 元件吸收功率 $p = 12 \text{ kW}$ 求支路电流 i 。

解 电压电流在关联参考方向下,已知元件吸收功率,利用公式

$$i = \frac{p}{u} = \frac{12 \times 10^3}{-200} = -60 \text{ A}$$

即支路电流 i 为 -60 A 。

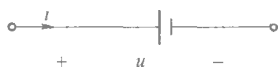


图 1-11 例 1-3 图

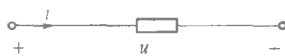


图 1-12 例 1-4 图

1.3 基尔霍夫定律

基尔霍夫（或译为克希荷夫）提出了集总参数电路的基本定律，称之为基尔霍夫电流定律和基尔霍夫电压定律，即基尔霍夫定律是集总参数假设下电路基本定律。

先介绍几个名词和术语。

1. 支路和节点

一般情况下电路中一个二端元件称为一条支路，元件的汇接点称为节点，如图 1-13 中点 a 、 b 、 c 、 d 。这里共有 5 条支路，4 个节点。

为了方便，也可以把支路定义为多个元件串联而成的一段电路，如图 1-13 中 1 和 3 元件的串联作为一条支路，2 和 5 元件的串联也作为一条支路，节点定义为 3 条或 3 条以上支路的汇接点，如 b 点和 d 点，而 a 点和 c 点就不再是节点。这样定义支路和节点，显然比前面的定义在支路和节点的数量上要减少，对分析电路和解题是方便的。

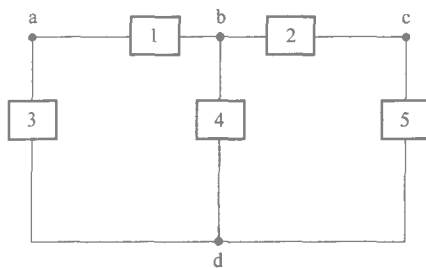


图 1-13 支路与节点

2. 回路

电路中任一闭合的路径称为回路，如图 1-13

中由 a - b - d 回到点 a 由 b - c - d 回到 b 由 a - b - c - d 回到 a 都是回路。

3. 网孔

网孔的定义是对平面电路而言的，图 1-13 是平面电路，其中内部不含支路的回路称为网孔。上面 3 个回路中前两个符合网孔定义，显然第 3 个不符合网孔定义，因为内部含有元件 4 的支路。

在集总参数电路中，任何时刻通过元件的电流和元件两端的电压都是可确定的物理量。通常把通过元件的电流称支路电流，元件的端电压称支路电压，它们是电路分析的对象，集总参数电路的基本规律也用它们来表示。

1.3.1 基尔霍夫电流定律 (KCL)

电流定律也叫基尔霍夫第一定律，它反映了电路的节点上各支路电流之间必须遵循的规律。

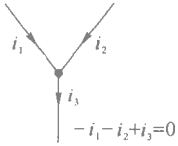
定律内容 在任一时刻，电路的任一节点，流出某节点的所有支路电流代数和为零。其数学表示式为

$$\sum_{k=1}^{m_0} i_k = 0$$

式中 i_k 为流出或流入节点的第 k 条支路电流, m_0 为与节点相联的支路数。

图 1-14 中画出的是电路中的某一节点, 连接了 3 条支路, 并标出了电流的参考方向。若以流出节点电流为正 则写出 KCL 方程

$$-i_1 - i_2 + i_3 = 0$$



将上式写为

$$i_3 = i_1 + i_2$$

上式左边是流出节点的电流, 右边是流入节点的电流。

电流定律也可表示为 在任一时刻 电路的任一节点 流入该节点的支路电流之和等于流出该节点的电流之和。

图 1-14 电流定律

$$\sum i_{入} = \sum i_{出}$$

电流定律的理论依据是电荷守恒原理, 即电荷既不能创造也不能消灭, 流进节点的电荷一定等于流出节点的电荷, 因为在集总参数假设中, 节点只是支路的汇接点, 不可能积累电荷。KCL 说明了电流的连续性。

在以上的讨论中 并没有涉及到支路的元件 这就是说 不论支路中是什么元件 只要联接在同一个节点上, 其支路电流就按 KCL 互相制约。换言之, KCL 与支路元件性质无关而与电路结构有关。

KCL 原是运用于节点的, 也可以把它推广运用于电路中的任一假设的封闭曲面。例如, 在图 1-15 中虚线所示封闭面, 流入或流出封闭面的电流有 i_1 、 i_2 、 i_3 根据标出的参考方向, 以流出封闭面的电流为正, 可列出 KCL 方程式

$$-i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

例 1-5 求图 1-16 所示电路中电流 i_1 和 i_3 的值。

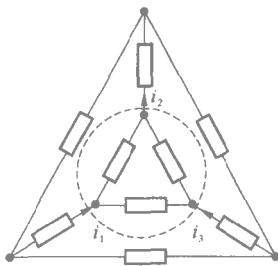


图 1-15 封闭面的 KCL

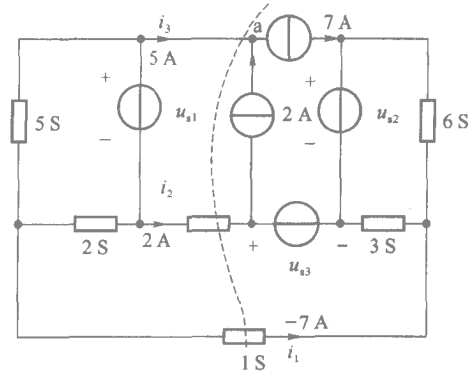


图 1-16 例 1-5 电路

解 (1) 由 a 节点的 KCL 列出方程

$$i_3 + 2 = 7$$

$$i_3 = 5A$$

(2) 作封闭面如图中虚线 可列出

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$i_1 = -7 \text{ A}$$

1.3.2 基尔霍夫电压定律 (KVL)

电压定律也叫基尔霍夫第二定律, 它表明电路的闭合回路中, 各支路电压之间的制约关系。

定律内容: 在任一时刻, 电路的任一回路, 沿该回路的所有支路电压的代数和为零。

$$\sum_{k=1}^{n_0} u_k = 0$$

式中 u_k 为该回路中第 k 条支路电压, n_0 为回路包含的支路数。

这一定律也可以表述为 在任一时刻 电路的任一回路 沿该回路的支路的电位升等于电位降。

$$\sum u_{\text{升}} = \sum u_{\text{降}}$$

图 1-17 中画出的是电路中的某一回路, 连接了 5 条支路 并标出了各支路电压的参考极性。任意选定回路的绕行方向 例如图画出的顺时针方向 支路电压的参考极性与回路绕行方向一致的取正号, 支路电压参考极性与回路绕行方向相反的取负号。可列写 KVL 方程

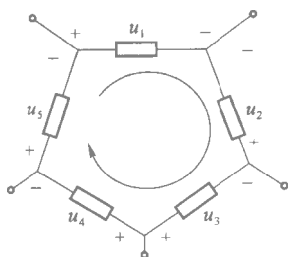


图 1-17 电压定律

$$u_1 - u_2 - u_3 + u_4 + u_5 = 0$$

或

$$u_1 + u_4 + u_5 = u_2 + u_3$$

上式左端为回路中电位降之和, 右端为回路中电位升之和。

基尔霍夫电压定律是能量守恒的体现。按照能量守恒定律, 单位正电荷沿回路绕行一周, 所获得的能量必须等于所失去的能量, 单位正电荷在从高电位向低电位移动过程中失去能量, 在从低电位向高电位移动过程中获得能量, 所以在闭合回路中

电位升必然等于电位降, 即一个闭合回路中各支路电压的代数和为零。

在以上的讨论中 并没有涉及到支路的元件 这就是说 不论支路中是什么元件 只要连接在同一个回路中, 其支路电压就按 KVL 互相制约。换言之, KVL 与支路元件性质无关而与电路结构有关。

总之, KCL、KVL 是电荷守恒原理和能量守恒原理在集总参数电路中的体现, KCL、KVL 只与电路的拓扑(结构)有关, 而与各支路连接的元件的性质无关。无论是电阻、电容、电感还是电源 甚至是非线性元件或时变元件等。

例 1-6 电路如图 1-18 所示 选 d 点为参考点 求 u_a, u_{ac} 的值。若选 b 点为参考点 求 u_a, u_{ac} 比较结果, 可得出什么结论?

解 (1) 选 d 点为参考点 即 $u_d = 0$ 因 cd 支路电流 $i_1 = 0, 1\Omega$ 电阻上没有电压 所以 $u_c = 20 \text{ V}$ 。

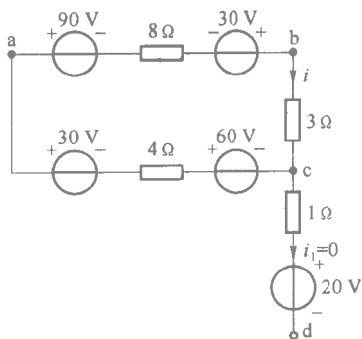


图 1-18 例 1-6 电路

设 a-b-c-a 回路电流 i 按顺时针方向流动 由 KVL 可求出电流 i :

$$i = \frac{30 + 60 + 30 - 90}{8 + 4 + 3} = 2 \text{ A}$$

此时电路中各支路电压都可以用欧姆定律求出。再计算 a 点的电压即 a 点至 d 点的电压。可任意选择一条路径 例如 a-b-c-d 求各支路电压代数和:

$$u_a = 90 + 8 \times 2 - 30 + 3 \times 2 + 20 = 102 \text{ V}$$

计算 u_{ac} 即 a 点至 c 点的电压

$$u_{ac} = 90 + 8 \times 2 - 30 + 3 \times 2 = 82 \text{ V}$$

$$(\text{或 } u_{ac} = u_a - u_c = 102 - 20 = 82 \text{ V})$$

(2) 选 b 点为参考点, $u_b = 0$ 电流 i 不变。再计算 a 点的电压即 a 点至 b 点的电压 以及求 u_{ac} 如下

$$u_a = 90 + 8 \times 2 - 30 = 76 \text{ V}$$

$$u_{ac} = u_a - u_c = 76 - (-6) = 82 \text{ V}$$

从本例题可验证一个结论, 当选择的参考点不同, 电路中各点电位不同, 但是两点之间的电压是不变的。

例 1-7 图 1-19 所示为某电路的部分电路 各已知的电流及元件值已标示在图中 分别求支路电流 I 、电阻 R 和电压源电压 u_b 的值。

解 在电路上设节点 a, b, c, d 封闭曲面 S 及 I_1, I_2, I_R 的参考方向。首先 对封闭曲面 S 图 1-19 中虚线所示 列写 KCL 方程。选取流出封闭曲面 S 的电流取正号 所以有

$$-6 + 5 + I = 0$$

则有

$$I = 6 - 5 = 1 \text{ A}$$

对图 1-20 节点 b 有 KCL 方程

$$-I_1 + I_2 + 15 = 0$$

所以

$$I_2 = I_1 - 15 = 18 - 15 = 3 \text{ A}$$

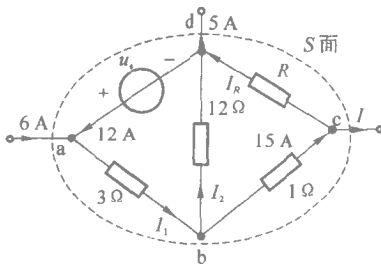


图 1-19 例 1-7 图 1

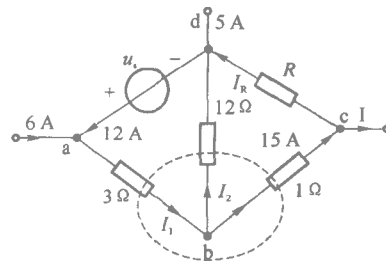


图 1-20 例 1-7 图 2

对图 1-21 中节点 c 有 KCL 方程

$$I + I_R - 15 = 0$$

所以

$$I_R = 15 - I = 14 \text{ A}$$

图 1-22 由 b-c-d-b 回路的 KVL 方程

$$15 \times 1 + u_{cd} - 12I_2 = 0$$

可得

$$u_{cd} = 12 \times 3 - 15 = 21 \text{ V}$$

应用欧姆定律 求得电阻

$$R = u_{cd} / I_R = 21 \div 14 = 1.5 \Omega$$

由 a-b-d-a 回路的 KVL 方程

$$3I_1 + 12I_2 - u_s = 0$$

所以

$$u_s = 3I_1 + 12I_2 = 3 \times 18 + 12 \times 3 = 90V$$

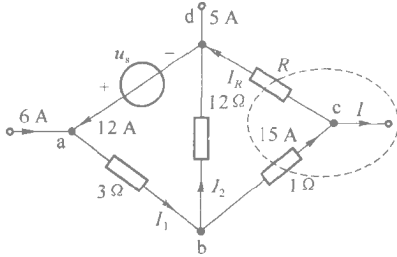


图 1-21 例 1-7 图 3

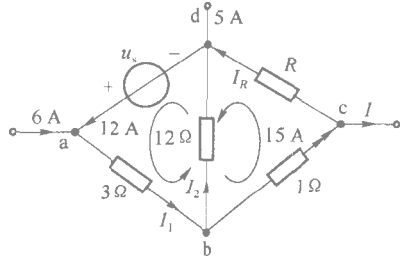


图 1-22 例 1-7 图 4

1.3.3 关于基尔霍夫定律的独立性

1. KCL 方程的独立性

如图 1-23 所示电路，设流出节点电流为正。列出全部节点的 KCL 方程

节点 a: $i_1 + i_2 + i_3 = 0$

节点 b: $-i_1 - i_6 + i_4 = 0$

节点 c: $-i_2 - i_4 + i_5 = 0$

节点 d: $-i_3 - i_5 + i_6 = 0$

将 4 个方程相加 结果是 $0=0$ 说明方程组不独立 实际上任意舍去一个方程 余下的方程组就是独立的。例如舍去第四个方程，节点 a 方程的 i_3 、节点 b 方程的 i_6 、节点 c 方程的 i_5 都是其他方程所没有的，说明方程组是独立的了。

2. KVL 方程的独立性

再如图 1-24 所示，设内网孔各按顺时针方向。外回路按逆时针方向列出 KVL 方程

回路 I $u_1 + u_3 - u_8 = 0$

回路 II $u_2 + u_5 - u_3 = 0$

回路 III $u_4 - u_2 - u_1 = 0$

外回路 $u_8 - u_5 - u_4 = 0$

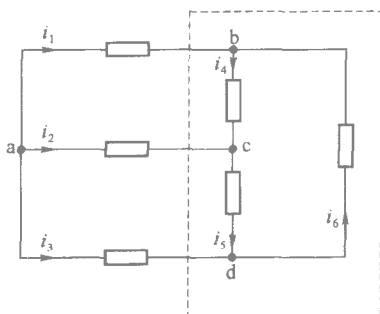


图 1-23 KCL 方程的独立性

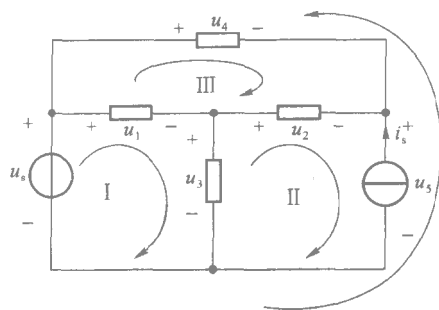


图 1-24 KVL 方程的独立性

将 4 个方程相加 结果也是 $0=0$ 说明方程组不独立 实际上任意舍去一个方程 余下的方程组就是独立的。一般舍去外回路方程,余下的 3 个方程 每个都含有一个别的方程所没有的变量 如回路 I 方程的 u_6 、回路 II 方程的 u_5 、回路 III 方程的 u_4 。这时各方程不能互相推出,说明方程组是独立的。

实际上 若电路的支路数是 b 节点数是 n 则独立节点数是 $(n-1)$ 即可列出 $(n-1)$ 个独立的 KCL 方程。设

$$L = b - (n - 1) = b - n + 1$$

则可列出 L 个独立的 KVL 方程 这个规律是符合实际情况的 可用数学归纳法证明 也可用图论来证明。图论的基础知识将在下一节介绍。

1.4 图的概念和定律方程的独立性

线图理论 简称图论 是一个数学分支 应用图论来讨论电路方程的独立性是很有效的,本节将介绍它的一些基础知识 并用来讨论基尔霍夫方程的独立性。称之为“网络图论”或“网络拓扑”,“拓扑”在这里泛指电路的结构或连接方式。

前面讲到基尔霍夫定律仅与元件的连接方式即电路的结构有关,而与元件性质无关。这里暂不考虑元件性质 将各支路用线段代替 而支路两端的节点仍然保留。

1.4.1 电路的图

图是一组节点和一组支路 也可称边 的集合 其中支路只在节点处相交 这种图叫线图 简称图。图 1-25(a) 表示的电路,画出对应的图就如图 (b) 所示 称它为图 G 。图 G 的支路和节点与图 (a) 一一对应 将图 (a) 电路的结构完全表达出来了 所以又称其为拓扑图 (即结构图)。

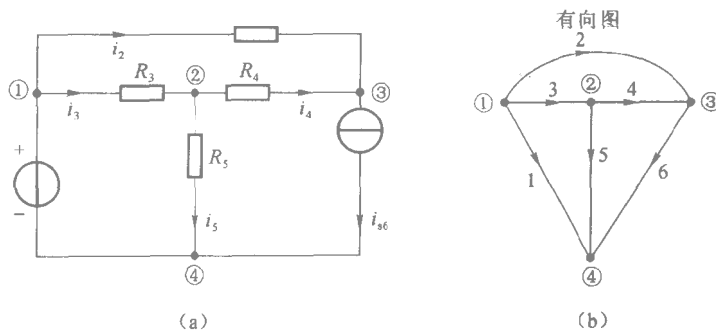


图 1-25 电路的图

1. 有向图和无向图

标明支路参考方向的图称有向图,不标出参考方向的图称无向图。图 1-25(b) 为有向图 而图 1-26(a) 为无向图。有向图每条支路所标的方向与原电路一致,箭头既表示电流的参考方向,又表示电压的参考极性,两者为关联参考方向。

2. 子图

如果图 G_1 的每个节点和支路也是图 G 的节点和支路 则 G_1 为 G 的子图 或者说从图 G

中删去某些节点或支路而得到子图 G_1 如图 1-26(b) 所示。

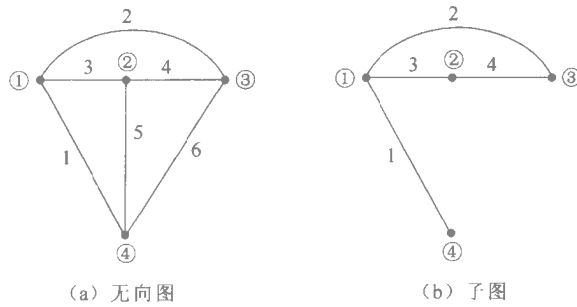


图 1-26 无向图和子图

3. 连通图和非连通图

在线图中任意节点间至少有一条由支路构成的路径相连通时，这个图就称连通图，否则称分离图或非连通图。如图 1-27(a) 为连通图 而图 1-27(b) 为非连通图 图 (b) 与图 (a) 相比少了一条支路，变成了两个分离的部分。非连通图可能有两个或多个分离部分。

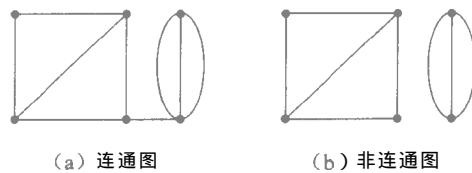


图 1-27 连通图和非连通图

4. 平面图和非平面图

如果图 G 能画在一个平面上 而任意两支路除端点外均不相交 则称图 G 为平面图 否则称 G 为非平面图。图 1-28(a) 为平面图，图中看似有交叉支路，实际上可以将中间交叉的两条支路之一画到外围如图 (b)。而图 1-28(c) 为非平面图。

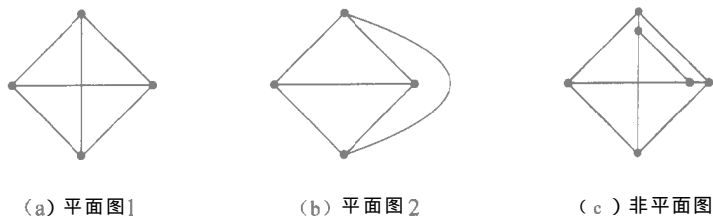


图 1-28 平面图和非平面图

5. 完全图

如果图中任意两点间有且仅有一条支路，则称该图为完全图。图 1-25(b) 和 1-26(a) 就是完全图。

电路分析课程主要研究的是连通的有向图。

1.4.2 树和余树

树和余树是图论中一个重要的概念。

1. 树和树枝

一个包含图 G 的所有节点而没有回路的连通子图，称为连通图的树。如图 1-29(b)和 (c) 它们都符合树的定义 它们是联接了图 (a) 所有的节点而没有形成回路的连通图。一个线图可以有多种种树，图 (a) 所示的完全图总共有 16 种树。*

构成树的各条支路称为树枝 树枝支路的集合称为树。如图 1-29(b) 中的 { 3,4,5 } 和图 (c) 中的 { 1,5,6 } 都包含 3 条树枝。即 在不同的树中 树枝数目是相同的。在这里 若设节点数为 n 树枝数目是 $n-1$ 。

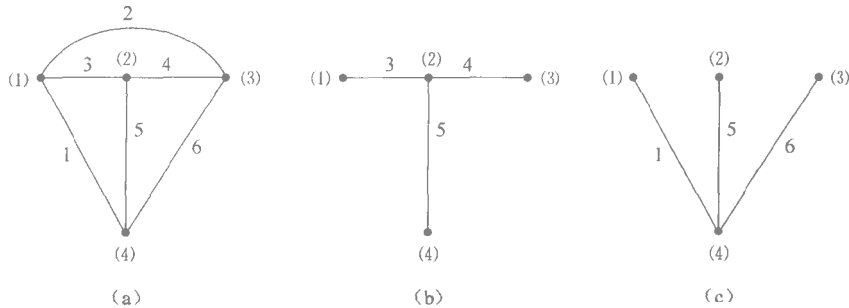


图 1-29 图 G 的树

可以这样来证明这个关系的存在，先画出图 G 的全部节点，然后用逐步添加支路的办法来生成图 G 的一棵树。第一个添加的支路必然连接两个节点，以这条支路为基础，以后每添加一条支路就多连接一个新节点，这样逐步添加支路，直至连接全部节点但不形成回路为止，这些所有添加的支路的集合就生成图 G 的一棵树。但支路数始终比节点数少 1 如图 (b) 中的 { 3,4,5 }，按数字顺序将节点连接起来就能说明这个结论。所以具有 n 个节点的连通图 树枝的数目为 $n-1$ 正好与独立节点数相同。

2. 余树和连支

对图 G 选定一种树 除了树以外的支路集合称为余树 余树的各支路称为连支 或曰连支的集合称为余树 (或补树) 设图 G 的支路数为 b 节点数为 n 则连支数 $L = b - (n-1) = b - n + 1$ 这是显而易见的。图 1-30(a) 和 (b) 中实线支路为树枝，虚线支路为连支。图 (a) 中选树 { 3,4,5 } 余树为 { 1,2,6 } 图 (b) 中选树 { 1,5,6 } 余树为 { 2,3,4 }。

1.4.3 割集和基本割集、基本回路

割集也是图论中的一个重要概念。割集一般用 C 表示， C 是连通图 G 中的一个支路集合。

1. 割集

用一个封闭面去切割连通图，被切割的支路的集合在符合以下两个条件时，称为割集。

- (1) 从连通图 G 中移去被切割的全部支路 则图 G 正好分成两个分离部分。
- (2) 只要少移去被切割的任一条支路 图 G 仍是连通的。

可见 割集是把图 G 分成两个分离部分的最少边集。

一个连通图有多少种树 T 呢？作为一个完全图可以按下面的公式计算，式中 n 为完全图的节点数。

$$\text{Num}[T] = n^{n-2}$$

在图 1-31(a) 所示的图 G 中 选定了三个切割 如图中虚线所示。

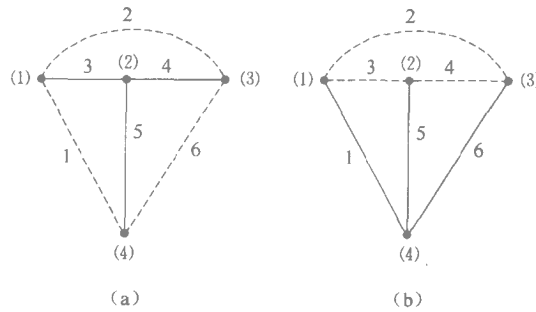


图 1-30 树和余树

割集 $C_1: \{2,3,5,6\}$ 将割集支路移去后留下的子图分为两部分 见图 (b)。

割集 $C_2: \{1,5,6\}$ 将割集支路移去后留下的子图分为两部分 见图 (c)。其中节点 4 也是图 G 的一部分。

显然其中支路集合 $C_1(2,3,5,6)$ 和 $C_2(1,5,6)$ 都满足割集的条件 所以 C_1 和 C_2 都是图 G 的割集。但支路集合 $1,5$ 则不是图 G 的割集 因为从连通图 G 中移去被切割的 $(1,5)$ 支路 图 G 仍是连通的，不符合判断割集的条件 1)。

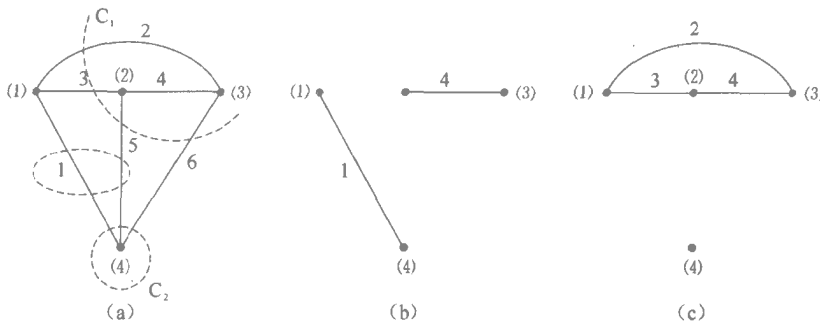


图 1-31 图的割集

2. 基本割集

在每一个割集中 包含且仅包含一条树支的割集 称基本割集 基本割集数与树支数相同 即同独立节点数相同 也即同独立的 KCL 方程数相同。

在图 1-32(a) 所示的图 G 中 首先选定一种树 $\{3,4,5\}$ 画出了 3 个割集如图中虚线所示 C_I 为 $\{3,1,2\}$, C_{II} 为 $\{4,2,6\}$, C_{III} 为 $\{5,6,1\}$ 。图 1-32(b) 所示的图 G 中 选定的树 $\{1,2,3\}$ 画出了 3 个割集如图中虚线所示 C_I 为 $\{3,4,5\}$, C_{II} 为 $\{2,4,6\}$, C_{III} 为 $\{1,5,6\}$ 。

以上两个图中所作的割集都符合基本割集的定义，即每个割集中有且仅有一条树支支路。可见，基本割集数与树支数相同。通常选择基本割集中树支的方向作为基本割集的方向，或者说是基本割集与封闭面的方向关系。对于一个封闭面，其方向不外乎向里或向外，用箭头标在切割弧线的端子上 如图 1-32(a) 所示。

基本割集与树密切相关 尽管一个图可以选取许多种树 但一种树只能有唯一的一组基本割集。

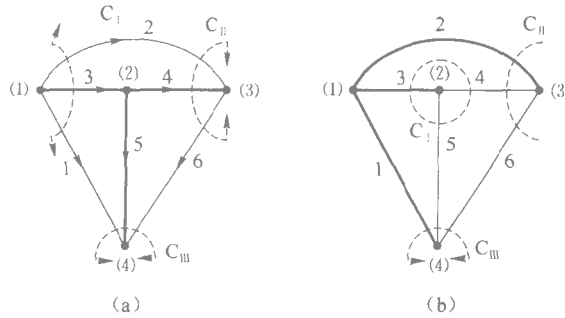


图 1-32 基本割集

3. 基本回路

在每一个回路中只包含一条连支的回路。在图 1-33(a)中若选树 { 3,4,5 } 则有

基本回路 I { 1,3,5 } 基本回路 II { 2,3,4 } 基本回路 III { 6,5,4 };

图 1-33(b)中若选树 { 3,4,1 } 则有

基本回路 I { 5,1,3 } 基本回路 II { 2,3,4 } 基本回路 III { 6,1,3,4 }。

需特别注意回路 III 的画法，回路中只有一条连支支路，所以属基本回路。这是由所选树唯一地决定了余树，同时决定了基本回路的画法，所以说对于一种树有一组唯一的基本回路。选择连支的方向作为基本回路的方向，如图 1-33(b) 中标出的基本回路的方向与连支的方向一致。

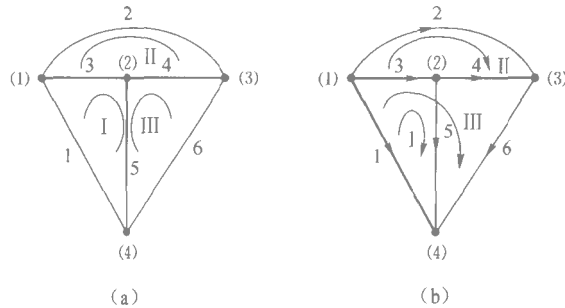


图 1-33 基本回路

1.4.4 基尔霍夫方程的独立性

1. KCL 方程的独立性

再看图 1-32(a)中有向图有 6 条支路 $b = 6$ ，4 个节点 $n = 4$ ，所以树支是 $n - 1 = 3$ 。选定树 { 3,4,5 }，并已画出基本割集如图，以树支方向作为基本割集的方向（方向向里或者向外），列出每个基本割集的 KCL 方程如下

$$\begin{aligned} C_I \quad i_1 + i_3 + i_2 &= 0 \\ C_{II} \quad i_2 + i_4 - i_6 &= 0 \\ C_{III} \quad i_1 + i_5 + i_6 &= 0 \end{aligned}$$

每个方程有一个树支支路电流是其他方程所没有的，各方程互相不能推出，可以保证是独立的。所以说按基本割集列出的 KCL 方程组是独立的 独立方程数是 $n - 1$ 。

2. KVL 方程的独立性

再看图 1-33(b) 选定树 $\{1, 3, 4\}$ 余树为 $\{2, 5, 6\}$ 连支数为 $L = b - n + 1 = 3$ 。图中画出了基本回路，并以连支方向作为回路绕行方向。写出各基本回路的 KVL 方程如下

$$\text{基本回路 I} \quad u_5 - u_1 + u_3 = 0$$

$$\text{基本回路 II} \quad u_2 - u_4 - u_3 = 0$$

$$\text{基本回路 III} \quad u_6 - u_1 + u_3 + u_4 = 0$$

三个方程各含有一个连支电压是其他方程所没有的，互相不能推出，保证是独立的。所以按基本回路列出的 KVL 方程互相是独立的 独立的 KVL 方程数等于连支数 $L = b - n + 1$ 这就证明了上一节的有关结论。

基尔霍夫定律是集总参数电路的基本定律，要保证列出的方程是互相独立的，这样才能有效地用方程组分析计算电路，这一点是至关重要的。

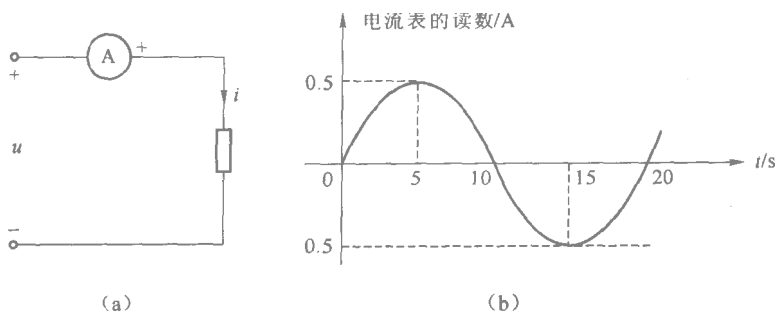
1.4.5 独立的变量与完备的变量

上面解决了如何列出全部独立的 KCL 方程和 KVL 方程 但是并不是在任何情况下都需要列出全部的定律方程，分析电路时选取变量的方式决定了所需定律方程的数量。图论介绍的树支电压就是一组独立完备的变量，根据它的定义，树支电压不能形成回路，因此树支电压是互相独立的；同时树支连接了全部的节点，一旦求出了树支电压，则可以求出所有支路电压，所以树支电压作为变量是完备的。同理，连支电流也是一组独立完备的变量。如何选取变量的问题将在第三章中详细介绍。

习题一

1-1 物理尺寸 1.2m 的电路，对于广播频率 500MHz 是什么电路？而对市电 50Hz 又是什么电路？

1-2 题图 1-2(a) 中若电流从电流表 A 的“+”端流入 表针正偏 从“+”端流出 表针反偏。同图 (b) 是表 A 的读数随时间变化的曲线。设电流 i 的参考方向如图 (a) 中箭头所示 试确定 $t = 5\text{s}, 10\text{s}$ 和 15s 时 i 的数值。



题图 1-2

1-3 题图 1-3 系存储于某二端元件中的电荷量 $q(t)$ 的波形图，试画出流过此二端元件的电流 $i(t)$ 的波形图。