

# 1

## 电路基本方程

电工设备和电子设备应用之广泛，已经人尽皆知，而且愈来愈复杂，愈来愈精巧。人们正在努力，要制造出和人一样聪明、比人更加能干的机电设备。所有这类设备的核心是其中的电路系统，由种类繁多的元件和器件组成，诸如电阻、电容器、电感线圈、晶体管、集成电路、电动机、开关、仪表、电声器件和光电器件等。电路系统完成电流电压的放大和波形变换以及功率输送，以实现信息传递以至模拟人类思维对事物进行识别、判断、记忆和操作。

不论电路系统是复杂的还是简单的，总是以数学为工具才能对其作精确的分析。为此，电路系统中种类繁多的元件和器件都必须按其物理特性进行数学模型化，归结为若干基本的理想元件。例如，一个白炽灯泡可以用一个电阻为模型。一个干电池可以用一个电压源和一个电阻相串联的电路作为模型。一个晶体管，物理功能复杂，可以用若干个电阻、电感、电容和受控电源按一定方式联接成电路作为模型。

本书讨论的对象不是由商品元件和器件组成的电路系统，而是模型化之后由基本元件组成的模型电路。基本元件种类有限，主要是电阻、电感、电容、电源等。本书限于讨论集总元件的电路，假定元件导体的几何尺寸与工作波长相比可以忽略。

在这一章，讨论电阻和电源的理想模型（电容和电感留待后文讨论），进而根据其联接方式讨论电路的数学描述，即建立电路的基本方程。所谓电路分析，是在给定电路及其元件的条件下，分析电路的电压和电流，即建立以电流电压为未知变量的数学方程并进行求解。

### 1.1 电阻支路电流电压约束方程

一个电阻单独存在时，是一个元件。把它接到电路中便有电流流过并在其上产生电压，此时称为电阻支路。电阻支路的符号如图 1-1 所示。带有两根引线的  $3:10$  矩形表示电阻元件，其上标以字母  $R$ 。其中一根引线上标有箭头，并注有字母  $i$  表示有一个电流  $i$  按箭头方向流经电阻。电阻两端标  $+$  和  $-$  符号以及其间的字母  $u$ ，表示电阻两端有一个电压  $u$ ， $+$  为正极， $-$  为负极。

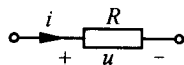


图 1-1 电阻支路

如图 1-1 所示，描述一条电阻支路要用到三个物理量，即电阻  $R$ 、电流  $i$  和电压  $u$ 。如何描述这三个物理量之间的关系，下面分三种情况来讨论。

#### 1.1.1 线性电阻

电阻的电学特性可以用  $i-u$  平面上的曲线来描述。线性电阻的  $i-u$  特性曲线是通过原点的一条直线，如图 1-2 所示。 $i-u$  特性也称为伏安特性。

线性电阻的电学特性也可以用数学解析式来描述。图 1-2 的直线可用方程表示为

$$i = \frac{1}{R}u \quad (1-1)$$

式中,  $\frac{1}{R}$  为直线的斜率。式 (1-1) 是我们已经熟悉的欧姆定律。它也是电阻支路的电流电压约束方程, 是电路的基本方程之一。当电流  $i$  的单位为安 (A), 电压  $u$  的单位为伏 (V) 则电阻  $R$  的单位为欧姆, 简称欧, 以符号  $\Omega$  表示。

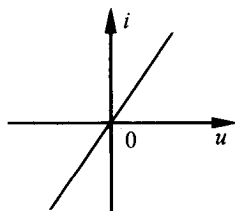


图 1-2 线性电阻的伏安特性

再回头观察一下图 1-2 的  $i-u$  特性。线性电阻具有双向导电特性。在第一象限, 电阻支路工作在  $i > 0$  和  $u > 0$  的情况, 其电流方向和电压极性如图 1-1 所示, 即电流从电压的正端流入从负端流出。电阻上消耗的功率为

$$p = ui > 0 \quad (1-2)$$

当电压  $u$  的单位为 V, 电流  $i$  的单位为 A, 则功率  $p$  的单位为 W (瓦)。 $p > 0$  表示消耗功率或吸收功率。在第三象限, 电阻支路工作在  $i < 0$  和  $u < 0$  的情况, 即其电流方向、电压极性均与图 1-1 的标示相反。例如,  $i = -2\text{A}, u = -4\text{V}$ 。这里的“ $-$ ”指实际的电流方向、电压极性与图中设定相反。但电阻上消耗的功率按式 (1-2) 计, 仍然是正的。所以, 不管电阻的电流方向如何, 它两端的电压极性相应地在电流流入端为正、电流流出端为负。电阻总是消耗功率的。这是电阻的一个重要的电学特性。

接在电路中的电阻支路在整个电路的分析结束以前往往无法确定其电流的真实流向和电压的真实极性。在图 1-1 中设定电流  $i$  的方向和  $u$  的极性时, 不能保证它们与真实情况相符, 因此, 称之为电流电压的参考标示。但有一点是肯定的,  $u$  和  $i$  最终必须满足式 (1-2) 即  $p > 0$ , 电阻总是消耗功率。习惯上, 任意设定  $i$  的参考方向, 设定电压极性与之相关联, 即在  $i$  的流入端设定  $u$  的正极,  $i$  的流出端为负极。如图 1-1 所示, 这称为电流电压的标准参考标示。

有时因受其他条件的限制, 无法采用电流电压的标准参考标示。在此情况下,  $u$  和  $i$  仍要满足正功率的要求。例如, 对于图 1-3 的标示, 式 (1-2) 变为  $p = -ui > 0$ 。将有两种可能: 设  $i = 1\text{A}$ , 则  $u = -5i = -5\text{V}$ 。② 设  $u = 5\text{V}$ ,

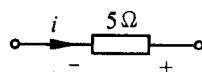


图 1-3  $u$  和  $i$  的非标准标示

则  $i = -\frac{5}{5} = -1\text{A}$ 。

电阻的倒数定义为电导

$$G = \frac{1}{R} \quad (1-3)$$

电导  $G$  的单位为西门子 (Siemens), 简称西, 以符号 S 表示。

### 1.1.2 非线性电阻

非线性电阻的  $i-u$  特性是一条曲线。图 1-4 所示为一例。许多非线性电阻的  $i-u$  特性不能用数学式子表示, 只给出  $i-u$  特性的曲线。对于非线性电阻, 欧姆定律不再适用。

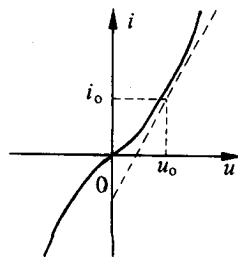


图 1-4 非线性电阻伏安特性

### 1.1.3 时变电阻与非时变电阻

$i-u$  特性随时间而变化的电阻为时变电阻，反之， $i-u$  特性不随时间而变化的电阻为非时变电阻。

## 1.2 电源支路电流电压约束方程

电源有电压源和电流源。内部没有损耗的电源称理想电源。我们讨论的电压源和电流源都是理想电源。

电压源支路的符号如图 1-5 所示。图 1-5a 是国际标准符号，外有“+”、“-”号表示电压极性且与两根引线贯通的小圆为电压源，其上标以  $u_s$ 。图 1-5b 是通用的非国际标准符号，内有“+”、“-”号表示电压极性且与两根引线不贯通的小圆为电压源，其上标以  $u_s$ 。图 1-5c 是直流电压源的专用符号。三种表示中，支路电流  $i$  从电压源正极流入、负极流出，支路电压  $u$  的极性与电压源极性一致。这样的标示为电压源支路的标准参考标示。这里规定支路电流从电压源正极流入，初时不易接受，后文将逐渐释疑。

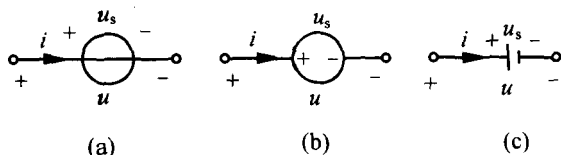


图 1-5 电压源支路

电压源的电学特性是它两端的电压始终保持给定值，与流过它的电流无关。电压源支路的  $i-u$  特性是横截距为  $u_s$  与  $i$  轴平行的直线，如图 1-6 所示。

电压源支路自身不能约束流经它的电流，支路电流  $i$  完全由外电路来确定。因此，电压源支路的电流电压约束方程取如下形式

$$u = u_s \quad (1-4)$$

它虽然简单，仍然是电路的基本方程之一。

在  $i-u$  特性的第一象限， $i > 0, u = u_s > 0$  电压源支路的功率  $p = ui > 0$ ，吸收功率。在  $i-u$  特性的第四象限， $i < 0, u = u_s > 0$  电压源支路的功率  $p = ui < 0$ ，提供功率。可见，电压源有两种可能的工作状态：吸收功率和提供功率。在吸收功率的情况下，支路电流  $i$  是从电压源正极流入，在提供功率的情况下，支路电流是从电压源正极流出。例如，一个蓄电池在充电时是吸收功率，在供电时是提供功率。

当电压源电压  $u_s$  不随时间变化，保持一个恒定值，称这一电源为直流电压源。 $u_s = 1.5\text{V}$  的干电池就是一例。

当电压  $u_s$  随时间变化，常记作  $u_s(t)$ ，称为时变电压源。例如，电力供应电压  $u_s(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t)\text{V}$ ，是人所共知的正弦交流电压。对于时变电压源， $i-u$  特性仍如图 1-6 所示平行于  $i$  轴的直线，只是  $u$  轴截距随时间变化。

由于电压源支路电流不受约束，流经直流电压源的电流可以是直流，也可以是交流，流经交流电压源的电流可以是交流，也可以是直流。

当  $u_s = 0$  时，电压源支路呈现短路状态。

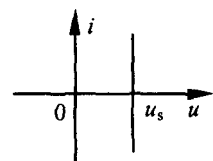


图 1-6 电压源伏安特性

另一种电源支路是电流源支路，它的电路符号如图 1-7 所示。图 1-7a 是国际标准符号，圆外箭头表示电流源电流方向。图 1-7b 是通用的非标准符号，圆内箭头表示电流源电流方向。这两种表示中， $i_s$  是电流源， $i$  是电流源支路电流，流向与  $i_s$  同， $u$  是电流源支路电压，正极性在电流  $i$  的流入端，负极性在  $i$  的流出端。这是电流源支路电流电压的标准参考标示。

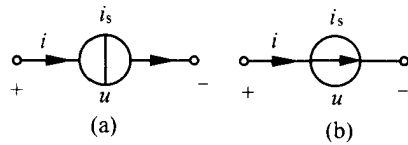


图 1-7 电流源支路

电流源的电学特性是它提供的电流  $i_s$  与它两端的电压无关而始终保持给定值。电流源支路的  $i-u$  特性是纵截距为  $i_s$  且与  $u$  轴平行的直线，如图 1-8 所示。

电流源支路电压不能自行约束，其支路电流电压约束方程为

$$i = i_s \quad (1-5)$$

电流源支路工作在  $i-u$  特性第一象限时吸收功率，工作在第二象限时提供功率。

当  $i_s = 0$  时，电流源支路呈现开路状态。

电流源电流  $i_s$  可以是直流电流，也可以是交流电流。

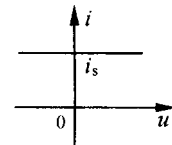


图 1-8 电流源伏安特性

### 1.3 b 条支路电流电压约束方程

设一个电路由  $b$  条支路联接而成，每条支路有一个元件。图 1-9a 是一个有 5 条支路的电路， $b=5$ 。图中电流源  $i_{s1}$ 、电压源  $u_{s4}$  和三个电阻  $R_2$ 、 $R_3$ 、 $R_5$  的数值都是给定的，各支路电流和支路电压都是未知变量。

电路分析一开始，就要标出未知的各支路电流的参考方向和各支路电压的参考极性。现在按前述的支路电流参考方向和支路电压参考极性的标准标示规则来完成这一步骤。在电流源  $i_{s1}$  支路，标上支路电流  $i_1$  参考方向使其与  $i_{s1}$  的流向一致，用关联方式标上支路电压  $u_1$  的参考极性 ( $i_1$  的流入端为  $u_1$  的正极性)。在电压源  $u_{s4}$  支路，标上支路电压  $u_4$  的参考极性使其与  $u_{s4}$  的极性相同，用关联方式标上支路电流  $i_4$  的参考方向 ( $u_4$  的正极端为  $i_4$  的流入端)。对这两条电源支路，都有原始指引。对于三个电阻  $R_2$ 、 $R_3$  和  $R_5$  所在的三条支路，则任意标定各支路电流  $i_2$ 、 $i_3$  和  $i_5$  的参考方向，再用关联方式标定各支路相应的电压  $u_2$ 、 $u_3$  和  $u_5$  的参考极性如图 1-9b 所示。

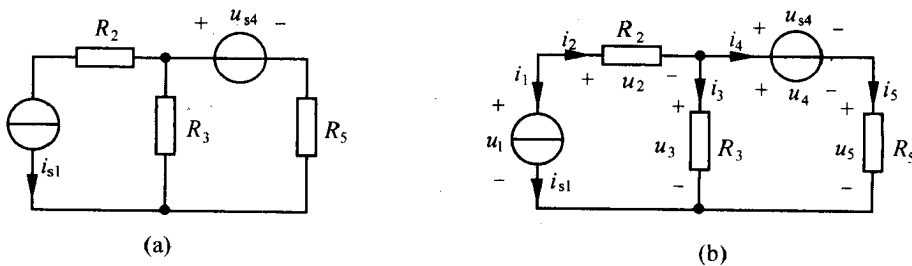


图 1-9 支路电流电压的标定

电路分析的第二步是写出  $b$  条支路的电流电压约束方程。根据图 1-9b 的标定,可写出

$$\begin{aligned} i_1 &= i_{s1} \\ u_2 &= R_2 i_2 \\ u_3 &= R_3 i_3 \\ u_4 &= u_{s4} \\ u_5 &= R_5 i_5 \end{aligned}$$

在此  $b=5$  条支路方程中,元件参数是给定的,即  $i_{s1}$ 、 $R_2$ 、 $R_3$ 、 $u_{s4}$ 、 $R_5$  是已知量。5 条支路电压  $u_1$ 、 $u_2$ 、 $u_3$ 、 $u_4$ 、 $u_5$  是未知变量,还有 5 条支路的电流  $i_1$ 、 $i_2$ 、 $i_3$ 、 $i_4$ 、 $i_5$  也是未知变量,即共有  $2b=10$  个电流电压变量。为要求解  $2b$  个变量 必须有  $2b$  个方程。现在我们只有  $b$  个方程。

另外  $b$  个方程是根据电路中支路的联接方式来建立的。从下一节开始,将讨论有关电路联接问题。

## 1.4 电路的拓扑图

在一个电路中,一个元件作为一条支路。两条支路或多于两条支路的联接点,称为节点。图 1-10a 是一个具有五条支路四个节点的电路。如果五条支路分别以五根有向线段来代表,并以四个节点按原来的方式联接,则构成图 1-10b 所示的连通的有向拓扑图。拓扑图中,每条支路不再受元件特性约束,只标有与原来电流相应的方向。因此,拓扑图突出显示了各支路的联接关系。下面介绍几个重要而又枯燥的概念。

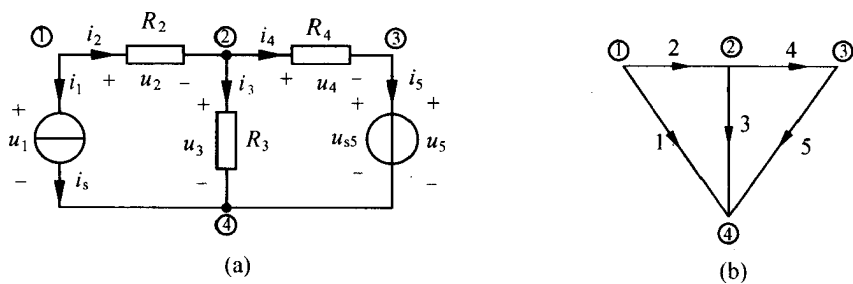


图 1-10 电路及其拓扑图

拓扑图中,从某一节点出发,沿着一些支路连续移动,从而到达另一指定节点,所经过的路径称为通路。一个闭合的且其中每个节点只经过一次的通路称为回路。图 1-10b 的拓扑图具有三个这样的通路,它们都是回路,分别重画于图 1-11 中。图 1-11a 所示的回路是由支路 1、2、3 和节点 、 、 构成的闭合通路。图 1-11b 所示的回路是由支路 3、4、5 和节点 、 、 构成的闭合通路。图 1-11c 所示的回路是由支路 1、2、4、5 和节点 、 、 、 构成的闭合通路。

观察图 1-10b 图 1-11a 和图 1-11b 这两个回路都不包围任何其他回路。这样的回路又称为网孔。但是,图 1-11c 却包围了两个回路,所以图 1-11c 不是网孔。

拓扑图中有一种称为割集的支路集合。如将此集合的全部支路移去,则连通的拓扑图被

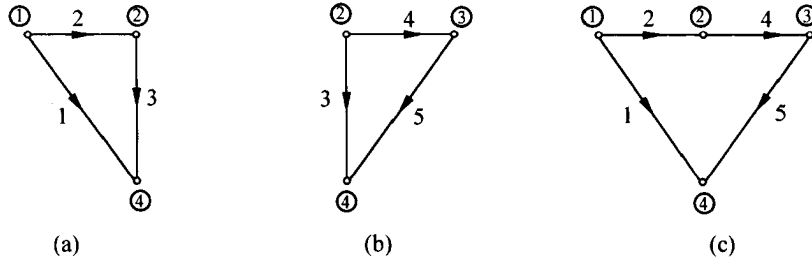


图 1-11 回路

分割成两个分离的部分；如将其中任一条支路放回它原来位置，两个分离的部分又被连通。

图 1-12 中，用虚线链结的支路集都是割集的例子。支路 1、3 和 4 是一个割集。将其全部移去后，连通图分成了两个分离的部分，一部分包括支路 2 和节点 ①、②，另一部分包括支路 5 和节点 ③、④；只要将支路 1 或 3 或 4 任一条放回原处，被分离的两部分又被连通。支路 1 和 2 也是一个割集。将其移去后，割开的一个分离部分包括支路 3、4、5 和节点 ③、④，另一个分离部分只有一个节点 ①，称为孤点。不论支路 1 还是 2 放回原处，割开的两部分又连通。支路 1、3、5 又是一个割集。图 1-12 中，还存在其他割集，未用虚线链结表示出来。

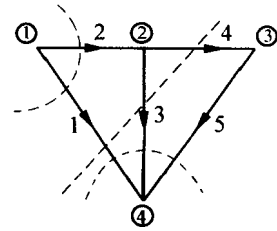


图 1-12 割集

当连通拓扑图的一个子图包含了全部节点且是连通的而又没有回路，则这个子图称为生成树，它包括的支路称为树枝。在图 1-10b 的拓扑图中，可以找到树的若干例子，如图 1-13 中实线所示。树 a 由树枝 2、3、4 构成，树 b 由树枝 2、4、5 构成，树 c 由树枝 1、2、5 构成。这些树各自还包含了全部节点 ①、②、③、④，但没有回路。

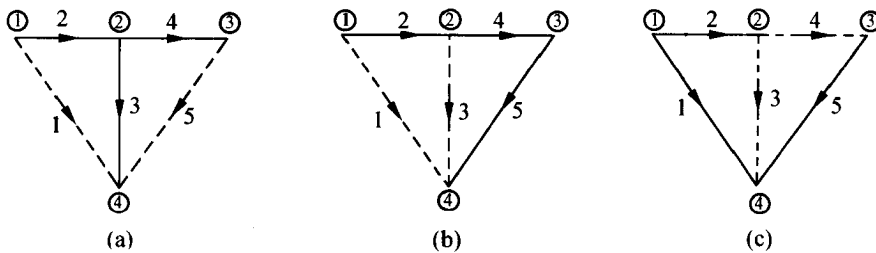


图 1-13 树

由于一个树拥有全部节点且连通又无回路，使以上所述的树都有三条树枝。一个具有  $n$  个节点的连通拓扑图的树枝数目为

$$T = n - 1 \quad (1-6)$$

对于一个指定的树，不属于树的支路称为连支。例如图 1-13 中连支均用虚线表示。对于指定的树 a，1 和 5 为连支，对树 b 而言，1 和 3 为连支，对树 c 而言，3 和 4 为连支。

一个具有  $n$  个节点和  $b$  条支路的连通拓扑图，连支的数目为

$$L = b - (n - 1) \quad (1-7)$$

在讨论的例子中，连支的数目  $L = 2$ 。

下面再引入与树有关的基本割集和基本回路的概念。

所谓基本割集，是指只有一条树支其余为连支的割集，而且树支的方向定为基本割集的方向。

设指定一个树如图 1-14 所示，树枝 1、3、4 以实线描出，连支 2、5 以虚线描出。支路 1、2 组成一个基本割集  $a$ ，以点线链结。树枝 1 的方向为割集方向，即朝点线以右的方向。同理，支路 2、3、5 组成基本割集  $b$ ，支路 4、5 组成基本割集  $c$ 。连支 2 为割集  $a$  和  $b$  的公共支路，对  $a$  而言，连支 2 的方向与割集方向相同，为正；对  $b$  而言，其方向与割集方向相反，为负。连支 5 是割集  $b$  和  $c$  的公共支路，对  $b$  而言，连支 5 为正向；对  $c$  而言，连支 5 为负向。

基本割集的数目与树枝的数目相同。对于一个具有  $n$  个节点的拓扑图，基本割集的数目为  $(n - 1)$ 。

所谓基本回路，是指只有一条连支其余为树枝的回路，而且连支的方向定为基本回路的环行方向。

设指定一个树由支路 1、2、4 组成，如图 1-15 所示。支路 1、2、3 组成一个基本回路，连支 3 的方向为回路环行方向。支路 1、2、4、5 组成另一个基本回路，连支 5 为回路环行方向。共有两个基本回路。

基本回路的数目与连支的数目相同。对于一个具有  $n$  个节点和  $b$  条支路的拓扑图，基本回路的数目为  $b - (n - 1)$ 。

若指定另一个树由支路 1、3、5 组成，如图 1-16 所示。两个基本回路分别由支路 1、2、3 和 3、4、5 组成。这两个基本回路都是网孔。一个连通的平面拓扑图有  $b - (n - 1)$  个网孔。但是， $b - (n - 1)$  个网孔未必都是基本回路。

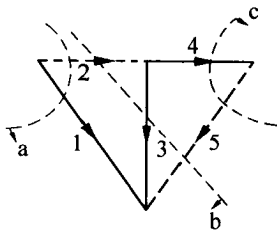


图 1-14 基本割集

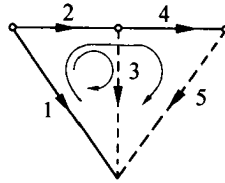


图 1-15 基本回路

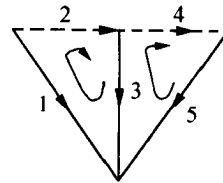


图 1-16 网孔

## 1.5 $(n - 1)$ 个 KCL 方程

设某电路的拓扑图如图 1-17 所示。假定对于某一个节点，流出节点的支路电流取正值，流入节点的电流取负值。在一个节点，电荷不能积累，即流进节点的电流必须等于流出节点的电流。基尔霍夫 (Gustav Kirchhoff) 在 1848 年提出了如下的电流定律：在集总电路中，与一个节点相接的所有支路电流的代数和在任何时候都为零。即

$$\sum_{k=1}^m i_k = 0 \quad (1-8)$$

式中,  $m$  是与该节点相接的支路数目,  $i_k$  分别是各支路电流。

基尔霍夫电流定律的英文为 Kirchhoff's Current Law, 取首字母 KCL 成为通用的简称。

对于图 1-17 的所有节点, 分别写出 KCL 方程如下:

$$\text{在节点 ①} \quad +i_1 + i_2 = 0$$

$$\text{在节点 ②} \quad -i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

$$\text{在节点 ③} \quad -i_4 + i_5 = 0$$

$$\text{在节点 ④} \quad -i_1 - i_3 - i_5 = 0$$

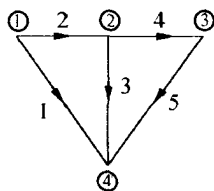


图 1-17 节点 KCL

两个相邻节点之间的一条支路, 其电流对其中一个节点为正, 对另一个节点则为负。在上述四个方程中, 每一支路电流总是正负值先后出现。将四个方程相加, 结果为零。在物理上, 电荷总得在一个电路中平衡, 因此不会有电流流出电路以外的世界。在数学上, 这四个方程是不独立的, 或称线性相关。任何一个节点的 KCL 方程都可以通过其余三个节点的 KCL 方程线性组合而得到。例如, 前三个节点 KCL 方程相加再乘以  $(-1)$  便得到节点 ④ 的 KCL 方程。所以其中有一个方程是多余的。不独立的方程组的解不是唯一的。为了使方程有唯一解, 可从 4 个方程中任取 3 个方程。

对于有  $n$  个节点的电路, 任何一组  $(n-1)$  个节点的 KCL 方程都是独立的。电路的  $(n-1)$  个 KCL 方程属于拓扑约束方程, 是电路的基本方程。

例 1-1 求图 1-18 电路中的电流  $i_1, i_2, i_3$ 。

解 电路共有 4 个节点 前 3 个节点 KCL 方程为

$$\text{节点 ①} \quad -2 + i_1 + i_2 = 0$$

$$\text{节点 ②} \quad -i_1 + 1 - 3 = 0$$

$$\text{节点 ③} \quad -i_2 + i_3 - 1 = 0$$

由节点 ② KCL 方程得

$$i_1 = -2 \text{ A}$$

代入节点 ① KCL 方程得

$$i_2 = 2 - i_1 = 2 - (-2) = 4 \text{ A}$$

代入节点 ③ KCL 方程又得

$$i_3 = 1 + i_2 = 1 + 4 = 5 \text{ A}$$

例 1-2 求图 1-19 电路中, 2V 电压源的功率。

解 节点 ① 的 KCL 方程为

$$i + 12 - 10 = 0$$

$$i = -2 \text{ A}$$

负号表明  $i$  的实际流向与图中标示相反。

$$P = 2 \times (-2) = -4 \text{ W}$$

电压源对电路提供 4W 的功率。

当一个节点只有两条支路相接, 这两条支路称为串联支

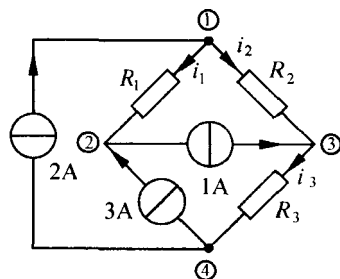


图 1-18 节点 KCL

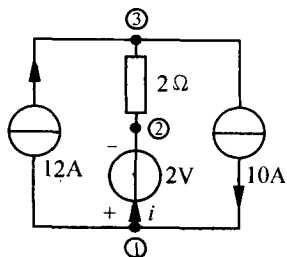


图 1-19 节点 KCL

路。图 1-20a 是串联的两条支路。用节点 ① 的 KCL 方程立即可证明， $i_1 = i_2 = 2\text{A}$  即串联支路流过的电流相同。图 1-20b 是三条支路串联，同样可证明，流经  $R$  和  $u_s$  的电流为  $2\text{A}$  即  $i_1 = i_2 = i_3 = 2\text{A}$ 。

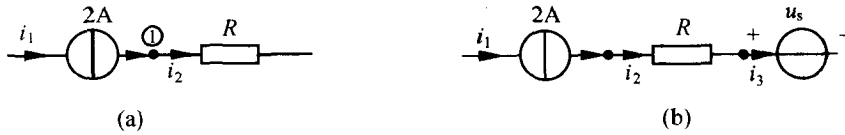


图 1-20 串联支路

例 1-3 求图 1-21 中流过  $12\text{V}$  电压源的电流  $i_2$ 。

解 电路中  $1\Omega$  电阻、 $5\text{A}$  电流源、 $5\text{V}$  电压源串联，流经这三条支路的电流为  $i_3 = 5\text{A}$ 。在节点 ① 的 KCL 方程为

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

式中， $i_1 = 10\text{A}$ ，故

$$i_2 = -i_1 - i_3 = -10 - 5 = -15\text{A}$$

电流  $i_2$  的流向与图中标示相反，实际电流

是从它的正端流出的。这个电压源对电路提供功率。电路中还有另外一个  $5\text{V}$  电压源，流过它的电流是  $i_3 = 5\text{A}$ ，从正端流入。这个  $5\text{V}$  电压源是从电路吸收功率的。

对于一个割集，基尔霍夫电流定律也是成立的。割集把电路割开成两个分离的部分。流进一个分离部分的电流必须等于流出该部分的电流，因为电荷不能在一个分离部分堆积。于是，对于一个割集，所有支路电流的代数和等于零。

在图 1-22 的拓扑图中，选支路 2、3、5 组成一个树。相应地存在三个基本割集  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，分别以三条点线链结。在一个割集中，树支电流的方向定为割集方向，树支电流总是为正。进出割集的连支电流其方向凡是与树支电流方向相同的取正，其方向与树支电流相反的取负。于是可得基本割集的 KCL 方程如下：

在割集  $a$   $i_2 + i_1 = 0$

在割集  $b$   $i_3 + i_1 + i_4 = 0$

在割集  $c$   $i_5 - i_4 = 0$

上述在割集  $a$  与  $c$  的 KCL 方程分别与前述的（见图 1-18）在节点 ① 和 ③ 的 KCL 方程相同。在割集  $b$  的 KCL 方程则是在节点 ①、③ 两个 KCL 方程之和。 $(n-1)$  个基本割集 KCL 方程是独立的，但它们与  $(n-1)$  个节点 KCL 方程是线性相关的。所以对于一个电路，只能有  $(n-1)$  个 KCL 方程是独立的。

例 1-4 对图 1-23a 所示的电路求  $i_4$ 。

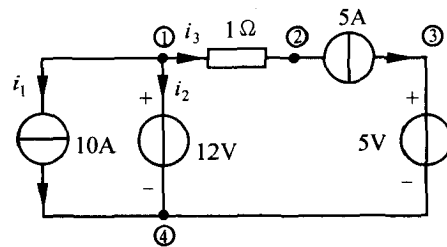


图 1-21 KCL

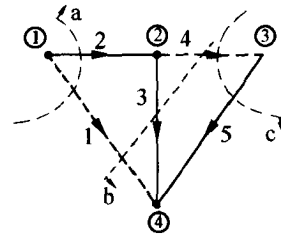


图 1-22 割集 KCL

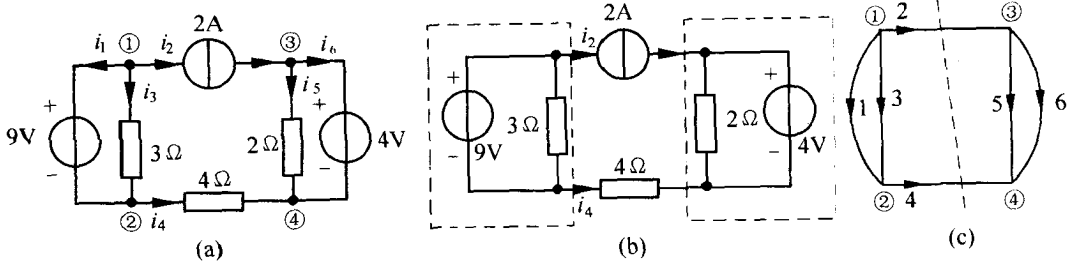


图 1-23 割集 KCL

解 分别在节点③和 写出 KCL 方程：

$$-i_2 + i_5 + i_6 = 0$$

$$-i_4 - i_5 - i_6 = 0$$

两式相加后得

$$i_4 = -i_2 = 2 \text{ A}$$

其实 2A 电流源支路和 4Ω 电阻支路形成一个割集，见图 1-23c，可把电路割成两个分离的部分，分别如图 1-23b 两个虚线框所包围。其 KCL 方程为

$$i_2 + i_4 = 0 \quad i_4 = -i_2 = -2 \text{ A}$$

显然，用割集 KCL 方程比用节点 KCL 方程更容易求得  $i_4$ ，几乎一望而知。

例 1-5 对图 1-24a 所示的电路求  $i_6$ 。

解 据节点 KCL 方程，

$$-i_4 - i_7 + i_8 = 0$$

$$i_4 = -i_7 + i_8 = -2 + 7 = 5 \text{ A}$$

据节点⑥KCL 方程有

$$-i_5 + i_7 + i_9 = 0$$

$$i_9 = i_5 - i_7 = 3 - 2 = 1 \text{ A}$$

又据节点⑦的 KCL 方程，

$$-i_6 - i_8 - i_9 = 0$$

$$i_6 = -i_8 - i_9 = -7 - 1 = -8 \text{ A}$$

如果将 7A 电流源支路、2A 电流源支路、3A 电流源支路和 1Ω 电阻支路作为一个割集，如图 1-24b、c 所示，则立即可得

$$i_8 - i_7 + i_5 + i_6 = 0$$

$$i_6 = -i_8 + i_7 - i_5$$

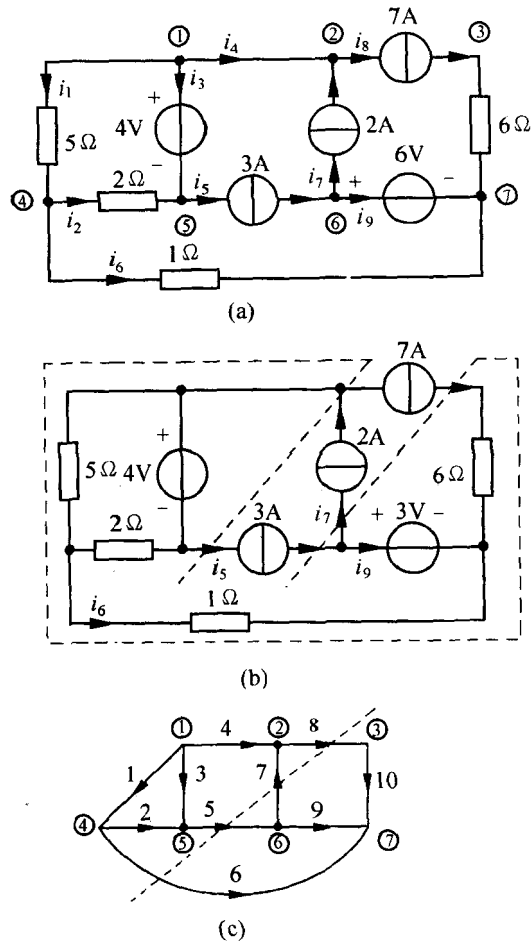


图 1-24 割集 KCL

$$= -7 + 2 - 3 = -8 \text{ A}$$

虽然割集 KCL 方程在许多场合会带来方便，但是，如果要全部写出  $(n - 1)$  个 KCL 方程，节点 KCL 比割集 KCL 更省事。因此，可根据具体情况加以选择。

基尔霍夫电流定律提供了独立的  $(n - 1)$  个拓扑约束方程，加上  $b$  条支路电流电压约束方程，便可以解答部分的支路电流或电压问题。在这一节列举的例子中，还有不能解答的电流电压。由于  $n \leq b$ ，至此，我们掌握的电路基本方程还不足  $2b$ 。下一节我们来讨论其余的  $b - (n - 1)$  个基本方程。

## 1.6 $b - (n - 1)$ 个 KVL 方程

对于电路中的一个回路，任意选定一个方向环行回路一周，假定其极性与环行方向相同的支路电压取正，与环行方向相反的支路电压取负。

基尔霍夫电压定律：在集总电路中，环绕一个回路所有支路的电压代数和在任何时候都为零即

$$\sum_{k=1}^l u_k = 0 \quad (1-9)$$

式中  $l$  是该回路的支路数目， $u_k$  分别是这些支路的电压。

基尔霍夫电压定律的英文为 Kirchhoff's Voltage Law 取首字母 KVL 作为通用的简称。

一个电路可以取许多回路，从每一个回路可写出一个 KVL 方程，所有回路的 KVL 方程彼此未必线性无关。但基本回路只有  $b - (n - 1)$  个。 $b - (n - 1)$  个基本回路 KVL 方程是独立的。

图 1-25 的拓扑图中， $n = 4, b = 5$ 。支路 1、4、5 为树支，支路 2、3 为连支。基本回路数目  $L = b - (n - 1) = 2$ 。包括连支 2 的基本回路 ① 由支路 1、2、4、5 组成，以连支 2 的方向作为环行回路的方向。

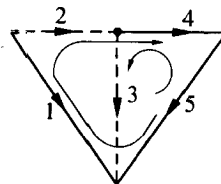


图 1-25 KVL

包括连支 3 的基本回路 ② 由支路 3、4、5 组成，以连支 3 的方向作为环行回路的方向。于是可写出独立的  $b - (n - 1)$  个 KVL 方程如下：

环绕回路  $u_2 + u_4 + u_5 - u_1 = 0$

环绕回路  $u_3 - u_5 - u_4 = 0$

对于一个平面拓扑图，可以选取  $b - (n - 1)$  个网孔。 $b - (n - 1)$  个网孔 KVL 方程也是独立的。

例 1-6 求图 1-26 所示电路中三个电流源两端的工作电压  $u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}$ 。

解 取三个网孔，任意定其环行方向如图。根据欧姆定律确定两个电阻上的电压分别为

$$u_{r1} = 1 \times 4 = 4 \text{ V} \quad u_{r2} = 2 \times 4 = 8 \text{ V}$$

环绕网孔  $u_{i1} - u_s + u_{r1} = 0$

$$u_{i1} = u_s - u_{r1} = 5 - 4 = 1 \text{ V}$$

环绕网孔  $u_{i2} + u_{r2} - u_s = 0$

$$u_{i2} = -u_{r2} + u_s = -8 + 5 = -3 \text{ V}$$

环绕网孔 ③

$$-u_{i3} - u_{r1} + u_{i2} = 0$$

$$u_{i3} = -u_{r1} + u_{i2} = -4 - 3 = -7 \text{ V}$$

对于一个电流源支路，支路电压受拓扑约束。在此例中，同是 2A 的三个电流源，工作电压却不一样。在图 1-27 中分别画出了它们的  $i-u$  特性并标出了各自的工作点 Q。

在分析电路建立 KVL 方程时，若电路简单，基本回路数目不多，为了方便，往往直接在电路中选择回路，不再描出拓扑图。这样，也不再事先确定树支和连支。当要建立全部基本回路

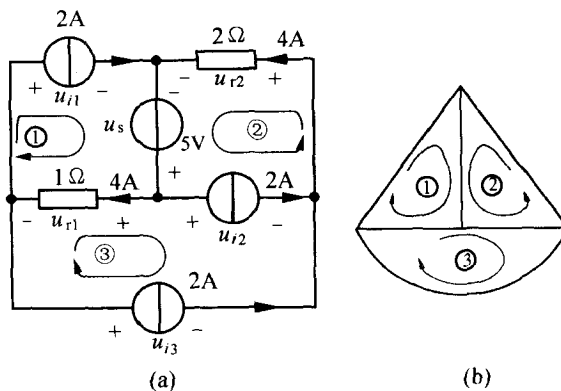


图 1-26 网孔 KVL

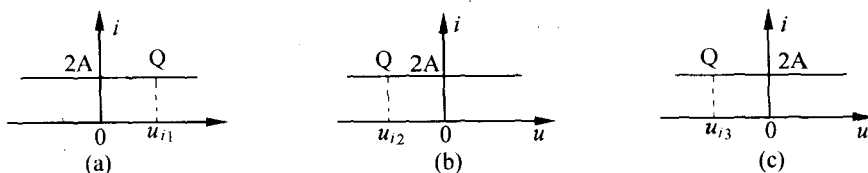


图 1-27 电流源工作点

KVL 方程时，遵循两个原则：回路的数目不得超过  $b - (n - 1)$  个。② 每个回路必有一支路不与其余回路所公共。只有这样，才能使所建立的 KVL 方程彼此线性无关。在一般情况下，全部选择网孔比较省事，有时可以不满足后一个原则。但在某些情况下，选择基本回路而不是选择网孔又可把问题简化。如上例图 1-26 所示的电路中， $u_{i1}$ 、 $u_{i2}$ 、 $u_{i3}$  都是未知数。假如只需要求出  $u_{i3}$  不必求出  $u_{i1}$ 、 $u_{i2}$  为了避开  $u_{i2}$ ，不宜选择网孔，可选择由  $u_{i3}$ 、 $2\Omega$ 、 $u_s$ 、 $1\Omega$  四条支路构成的回路，建立如下的 KVL 方程：

$$u_{i3} + u_{r2} - u_s + u_{r1} = 0$$

$$u_{i3} = -u_{r2} + u_s - u_{r1} = -8 + 5 - 4 = -7 \text{ V}$$

当一个回路只由两条支路组成，这两条支路称为并联支路。图 1-28a 是并联的两条支路。用 KVL 方程立即可以证明  $u_1 = u_2 = 2\text{V}$ ，即并联支路两端电压相同。图 1-28b 是三条支路并联，同样有  $u_1 = u_2 = u_3 = 2\text{V}$ 。

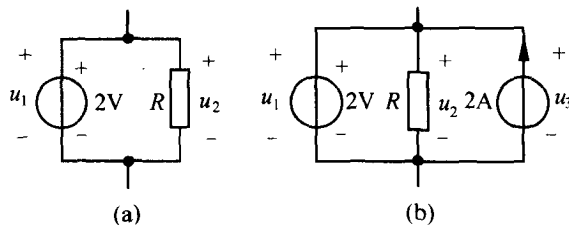


图 1-28 并联支路

这一节建立的  $b - (n - 1)$  个 KVL 方程以及上一节建立的  $(n - 1)$

个 KCL 方程都属于拓扑约束方程。这  $b$  条拓扑约束方程描述了电路中各支路的联接关系，与支路元件的性质和数值均无关。除外加电源外，其余支路元件全部都是线性非时变的，为线性非时变电路。同理，除外加电源外，当电路包含有线性时变元件，称之为线性时变电路。

非线性电路则是因为其中至少有一个非线性元件。电路的这种分类，取决于元件的性质，没有涉及到支路连接问题。只要元件是集总参数的，不论是线性的还是非线性的、时变的还是非时变的电路，KCL 和 KVL 两类拓扑约束方程都是适用的。

## 1.7 2b 条基本方程

电路分析的基本问题，是给定通过  $n$  个节点由  $b$  条支路联成的电路以及各支路元件参数，求解  $b$  条支路电流和电压。为了求解这  $2b$  个变量，必须建立  $2b$  条方程：

- (1)  $b$  条支路的电流电压约束方程，
- (2)  $(n - 1)$  个 KCL 拓扑约束方程，
- (3)  $b - (n - 1)$  个 KVL 拓扑约束方程。

建立和求解  $2b$  条电路方程是本书讨论的全部内容。这一章为此而提供一个基础，初步为电路分析描述了一个概貌。

例 1-7 电路如图 1-29 所示。 $u_s = 3 \text{ V}$ ,  $i_s = 2\cos 2t \text{ A}$ ,  $R = 2 \Omega$ 。求各支路电流和电压。

解  $b = 3$ ，支路约束方程为

$$\begin{aligned} u_1 &= u_s = 3 \text{ V} \\ u_2 &= Ri_2 = 2i_2 \\ i_3 &= i_s = 2\cos 2t \text{ A} \end{aligned}$$

拓扑约束方程： $n - 1 = 2$ ，KCL 方程：

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 &= 0 \\ -i_2 + i_3 &= 0 \end{aligned}$$

由此求得  $i_2 = i_3 = 2\cos 2t \text{ A}$

$$i_1 = -i_2 = -2\cos 2t \text{ A}$$

$$u_2 = 2i_2 = 4\cos 2t \text{ V}$$

由  $b - (n - 1) = 1$ ，KVL 约束方程：

$$u_3 = u_1 - u_2 = 3 - 4\cos 2t \text{ V}$$

通用  $2b = 6$  个方程解毕此题。

这个电路中， $u_s$  是直流电压源， $i_s$  是随时间  $t$  按余弦变化的时变电流源，俗称交流电流源。在此交直流电路中，各元件的功率也是时变的，

$$P_1 = u_1 i_1 = -6\cos 2t \text{ W}$$

$$P_2 = u_2 i_2 = 8\cos^2 2t = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 4t \text{ W}$$

$$P_3 = u_3 i_3 = 6\cos 2t - 8\cos^2 2t = 6\cos 2t - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 4t \text{ W}$$

由于余弦函数的变化在  $(+1)$  与  $(-1)$  之间，直流电压源在不同的时间里交替地提供功率和吸收功率。交流电流源也是如此。电阻除了在  $i_2 = 0$  的时刻以外，总是吸收功率。在任何时刻总有

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0$$

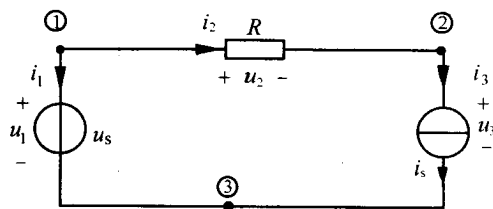


图 1-29 交直流电路

整个电路在任何时刻都遵守能量守恒定律。

图 1-30 画出了各支路的电流和电压波形。对电压源支路，见图 1-30a 虽然电压  $u_1$  是恒定的直流电压，但流经电压源  $u_s$  的电流是时变电流，电压波形和电流波形不一致。电流  $i_1$  有时为正，有时为负。即电流有时从正极流入，有时又从正极流出。当本书规定电压源电流从正极流入作为标准的参考方向时，与在中学学习物理课时形成的电压源电流是从正极流出的概念相抵触，因而不放心。至此理应前疑尽释。图 1-30b 画的是电阻支路电压  $u_2$  和电流  $i_2$  它们的波形是相同的。当  $i_2$  改变方向时， $u_2$  随之改变极性，反之亦然。图 1-30c 表示的是电流源支路电压  $u_3$  和电流  $i_3$ 。它是交变电流源。但它两端的电压既有交变电压，也有直流电压， $u_3$  是两者叠加。 $u_3$  和  $i_3$  的波形也是不同的。由于电压源支路的  $i-u$  特性是电流不受自身约束，电流源支路的  $i-u$  特性是电压不受自身约束，因而电压源支路和电流源支路的电流波形和电压波形可以不一致，完全取决于拓扑约束。

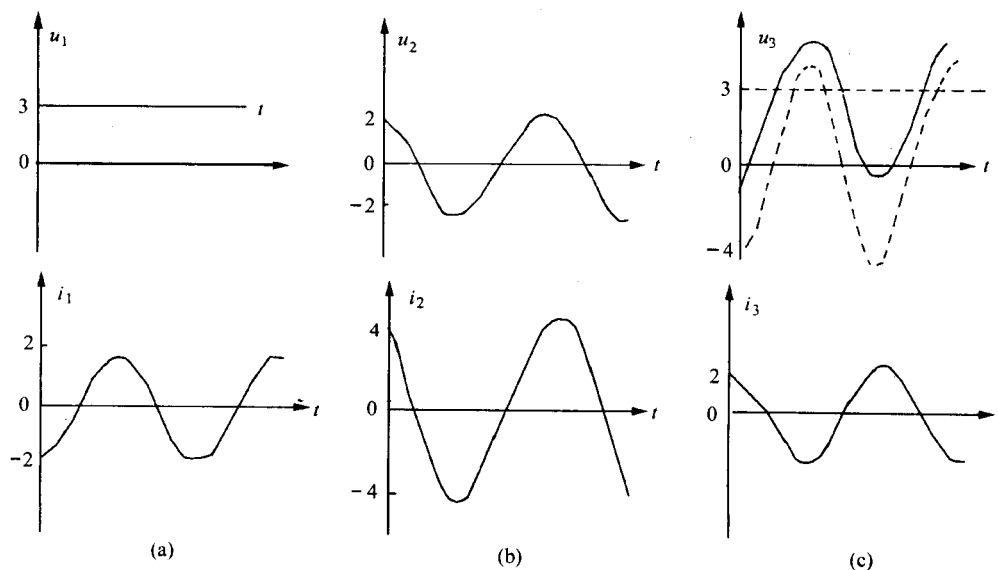


图 1-30 支路电流和电压波形

下一例回首重看图 1-19 所示的未被求解的电路。

**例 1-8** 在图 1-31 重画了图 1-19 所示的电路及其拓扑图，设定了节点编号和两个网孔的环行方向。设  $i_{s1} = 3\text{A}$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $R_3 = 5\Omega$ ,  $u_{s4} = 7\text{V}$ ,  $R_5 = 3\Omega$ 。求各支路功率。

解 在节点 ① 可得 KCL 方程：

$$i_2 = i_1 = i_{s1} = 3\text{A}$$

于是

$$u_2 = R_2 i_2 = 2 \times 3 = 6\text{V}$$

节点 ②、KCL

$$-i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

$$i_4 = i_5$$

后式代入前式，得

$$i_3 + i_5 = i_2 = 3\text{A}$$

(1)

网孔 b KVL

$$-u_3 + u_5 + u_4 = 0$$

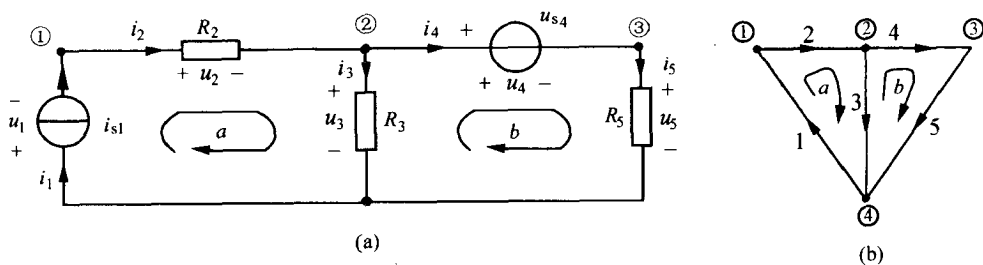


图 1-31 功率

$$R_3 i_3 - R_5 i_5 = u_{s4}$$

$$5i_3 - 3i_5 = 7$$

将式(1)代入

$$5i_3 - 3(3 - i_3) = 7$$

$$5i_3 + 3i_3 = 9 + 7 = 16$$

$$i_3 = 2\text{A}$$

$$u_3 = R_3 i_3 = 5 \times 2 = 10\text{V}$$

$$i_5 = 3 - i_3 = 3 - 2 = 1\text{A}, \quad i_4 = i_5 = 1\text{A}$$

$$u_5 = R_5 i_5 = 3 \times 1 = 3\text{V}$$

网孔  $a$  KVL,

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

$$u_1 = -u_2 - u_3 = -6 - 10 = -16\text{V}$$

以上用了全部  $2b = 10$  个方程求得各支路电流和电压。各支路的功率为

$$P_1 = u_1 i_1 = -16 \times 3 = -48\text{W}$$

$$P_2 = u_2 i_2 = 6 \times 3 = 18\text{W}$$

$$P_3 = u_3 i_3 = 10 \times 2 = 20\text{W}$$

$$P_4 = u_4 i_4 = 7 \times 1 = 7\text{W}$$

$$P_5 = u_5 i_5 = 3 \times 1 = 3\text{W}$$

所有支路功率之和

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = -48 + 18 + 20 + 7 + 3 = 0$$

总功率为零是能量守恒定律的必然结果。对这一事实作如下进一步考察。

$$\sum_{k=1}^5 P_k = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 + u_4 i_4 + u_5 i_5 = 0$$

考虑  $(n - 1) = 3$  个 KCL 方程, 上式变为

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 P_k &= u_1 i_2 + u_2 i_2 + u_3 (i_2 - i_4) + u_4 i_4 + u_5 i_4 \\ &= i_2 (u_1 + u_2 + u_3) + i_4 (-u_3 + u_4 + u_5) = 0 \end{aligned}$$

显然  $i_2 \neq 0, i_4 \neq 0$ , 为使上式成立必须有

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

$$-u_3 + u_4 + u_5 = 0$$

此两式正是网孔  $a, b$  独立的  $b - (n - 1) = 2$  个 KVL 方程。

若考虑  $b - (n - 1) = 2$  个 KVL 方程 则

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 P_k &= u_1 i_1 + (-u_1 - u_3) i_2 + u_3 i_3 + (u_3 - u_5) i_4 + u_5 i_5 \\ &= -u_1(-i_1 + i_2) + u_3(-i_2 + i_3 + i_4) + u_5(-i_4 + i_5) = 0 \end{aligned}$$

因为  $u_2 \neq 0, u_3 \neq 0, u_5 \neq 0$  故有

$$\begin{aligned} -i_1 + i_2 &= 0 \\ -i_2 + i_3 + i_4 &= 0 \\ -i_4 + i_5 &= 0 \end{aligned}$$

此三式正好又是节点 ①、 的  $(n - 1) = 3$  个 KCL 方程。

在初次介绍基尔霍夫电流定律和电压定律之时，还无法说明其根据。从能量守恒定律的角度考察以上事实之后，可以认识到 KCL 和 KVL 原来就是表述能量守恒定律的一种形式。 $b$  个拓扑约束方程，即  $(n - 1)$  个 KCL 方程和  $b - (n - 1)$  个 KVL 方程，描述了电路中各支路在某一时刻的能量关系。能量守恒定律是自然界的十分重要的规律，对电路表述为  $(n - 1)$  个 KCL 方程和  $b - (n - 1)$  个 KVL 方程，成了电路分析的基本方程和理论基础。

我们已经看到，一个电路的工作情况可用  $2b$  个方程进行全面的描述，称之为电路的数学模型化。此后，还将陆续引入其他元件的支路模型，只要给出元件支路的电流电压约束方程，都可以按照这一节讨论的方法，列写出  $2b$  个电路基本方程并进行求解。

## 1.8 受控电源支路电流电压约束方程

双极型晶体管的集电极电流受其基极电流控制，场效应晶体管的漏极电流受其栅极电压控制。此类器件的模型化电路含有受控电源。受控电源与以前介绍的电流源和电压源不同，它们是独立电源。受控电源是不独立电源，其电压值或电流值受到别的电压或电流控制，共有四种类型；即电压控制电流源、电流控制电流源和电压控制电压源、电流控制电压源。

### 1.8.1 电压控制电流源的支路电流电压约束方程

电压控制电流源的通用简称为 VCCS，取自英文 The Voltage Controlled Current Source 的首字母。VCCS 由控制支路和受控支路组成，电路符号如图 1-32a 所示。控制支路是一条开路支路，受控支路的受控电流源用菱形表示，以区别于圆形表示的独立电流源。

受控电源是四端元件，用两条支路来表示。对于电压控制电流源，控制支路是开路的，支路电流有约束， $i_c = 0$  支路电压  $u_c$  没有自身约束。在受控支路，支路电流  $i_g = g_m u_c$ ， $g_m$  称为控制参数，有电导的量纲。受控支路电压  $u_g$  没有自身约束。

电压控制电流源支路的电流电压约束方程为

$$\left. \begin{aligned} i_c &= 0 \\ i_g &= g_m u_c \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

### 1.8.2 电流控制电流源的支路电流电压约束方程

电流控制电流源的通用简称为 CCCS，取自英文 The Current Controlled Current

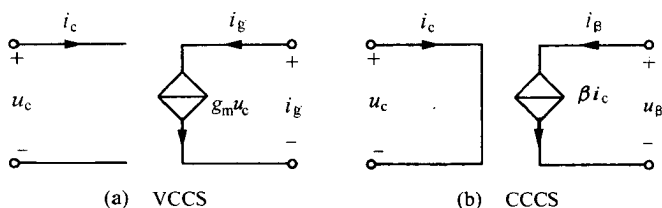


图 1-32 受控电流源

Source 的首字母。CCCS 的电路符号如图 1-32b 所示。控制支路是短路的， $u_c = 0$  作为支路约束。而受控支路电流  $i_\beta = \beta i_c$ ， $\beta$  是无量纲的控制参数，支路电压  $u_\beta$  无自身约束。

电流控制电流源支路的电流电压约束方程为

$$\left. \begin{aligned} u_c &= 0 \\ i_\beta &= \beta i_c \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

例 1-9 图 1-33 所示的是一个含有电压控制电流源的电路，试求电压  $u$ 。

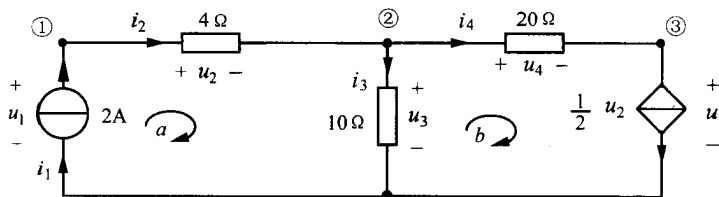


图 1-33 VCCS 电路

解 VCCS 的控制支路电流  $i_c = 0$  是开路支路，对  $(n-1)$  个 KCL 拓扑约束方程没有贡献。在电路中，VCCS 的受控支路  $\frac{1}{2}u_2$  的控制电压为  $4\Omega$  电阻支路电压  $u_2$ 。它就是开路的控制支路电压。作为控制电压而言，它对  $b-(n-1)$  个 KCL 拓扑约束方程的贡献已经由  $4\Omega$  电阻支路电压所代替。因此，VCCS 的开路控制支路在电路中退化了，统计电路  $b$  条支路时不再计入。虽然在电路中已不再特别画出开路的控制支路，但受控支路  $\frac{1}{2}u_2$  的控制电压  $u_2$  则一定要标明其所在和极性。

求解 VCCS 电路仍根据  $2b$  个基本方程。在此只要求回答电压  $u$  未必用到全部  $2b$  个方程。可先建立有关  $u$  的方程，然后回头追踪。为此，从回路  $b$  列出 KVL 方程：

$$u = u_3 - u_4$$

考虑各有关支路电流电压约束，

$$u_4 = 20i_4 = 20 \times \frac{1}{2}u_2 = 10(4i_2) = 10 \times 4 \times 2 = 80 \text{ V}$$

$$u_3 = 10i_3$$

由节点 KCL 及有关支路约束，