

大学数学学习辅导丛书

工 程 数 学

积分变换习题全解指南

东南大学数学系 张元林 编



高等教育出版社

策划编辑 李艳馥

责任编辑 胡乃

封面设计 于 涛

责任绘图 郝 林

版式设计 张 岚

责任校对 杨雪莲

责任印制

## 内容简介

本书是高等教育出版社出版的《工程数学—积分变换》(第四版)教材的配套参考书,不仅对教材中所有习题作了详尽解答,而且在每章开始列出了“内容要点”,给出了“例题分析”。书中各章节习题的题号均与教材相一致,书后附有与教材相同的 Fourier 变换简表和 Laplace 变换简表,以方便查用。因此,本书具有相对独立性。

本书可作为“积分变换”课程的教学参考书,除可供高等院校非数学专业的师生参考使用外,也可供广大工程技术人员及自学积分变换的读者参考使用。

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010 - 82028899		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>

经 销 新华书店北京发行所  
印 刷

开 本	850× 1168 1/32	版 次	年 月第 版
印 张	6.75	印 次	年 月第 次印刷
字 数	160 000	定 价	9.80 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

# 前 言

本书是高等教育出版社出版的《工程数学—积分变换》(第四版,东南大学数学系 张元林编)教材的配套参考书。为了方便读者使用,对教材中所有习题作了详尽的解答。

本书也具有相对的独立性,每章开始列出“内容要点”,简述本章的基本概念、主要定理、性质及计算公式,使读者能尽快地掌握其主要内容,也可起到复习、小结的效果;在习题解答前,选出一些有代表性的题目给出“例题分析”,不仅给出其详细的解答过程,更着重于解题思路的分析,并尽可能地提供解题的多种方法,从而提高读者的分析问题和解决问题的能力;最后,对该教材的所有习题作出“习题全解”,这里,将按习题所在的章节,提供与教材内容的次序相适应的一种解题方法,并给出解答的全过程,对于有些习题可能遇到的难点或一题多解的情形,尽可能地加以注明,以期读者达到解题方法的多样性与灵活性。另外,教材中带有星号\*内容的习题也同样作出了解答,以供需要此内容的读者及学有余力的学生参考。书中各章节习题的题号均与教材相一致。书后附有与教材相同的 Fourier 变换简表与 Laplace 变换简表,以方便查用。

必须指出,学好数学离不开自己做习题。如果用“阅读题解”代替“自己做题”,必将会影响自己解题能力的提高。但若是自己做了,再参考本书并作一些分析和比较,那将会收到触类旁通、举一反三的效果。这也是编者所期望的。

本书的编写力求层次分明,步骤清楚,书写格式规范化,使读者通过本书的学习,能对《积分变换》的理论与方法有更加深入的理解。

## 前 言

---

由于编者水平所限, 本书给出的解题方法未必都是最好的, 难免有误、不妥之处, 敬请指正。

编 者

2003 年 8 月于南京

# 目 录

第	<b>Fourier</b> 变换	1
一	内容要点	1
二	例题分析	10
三	习题全解	25
	习题一解答	25
	习题二解答	31
	习题三解答	47
	习题四解答	56
	习题五解答	67
第二章	<b>Laplace</b> 变换	85
一	内容要点	85
二	例题分析	92
三	习题全解	107
	习题一解答	107
	习题二解答	115
	习题三解答	133
	习题四解答	145
	习题五解答	152
附录	<b>Fourier</b> 变换简表	193
附录	<b>Laplace</b> 变换简表	201

# 第一章 Fourier 变换

## 一 内容要点

本章从讨论周期函数的 Fourier 级数的展开式出发,进而讨论非周期函数的 Fourier 积分公式及其收敛定理,并在此基础上引出 Fourier 变换的定义、性质、一些计算公式及某些应用.

本章的重点是求函数的 Fourier 变换及 Fourier 变换的某些应用. 函数的 Fourier 变换也是本章的一个难点,要解决好这个难点,必须掌握好 Fourier 变换的基本性质及一些常用函数(如单位脉冲函数,单位阶跃函数,正、余弦函数等)的 Fourier 变换及其逆变换的求法.从而才能较好地运用 Fourier 变换进行频谱分析,解某些微分、积分方程和偏微分方程的定解问题.

### 1. Fourier 积分

#### (1) Fourier 级数的展开式

设  $f_T(t)$  以  $T$  为周期且在  $-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}$  上满足 Dirichlet 条件(即在  $-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}$  上满足:1°连续或只有有限个第一类间断点;2°只有有限个极值点).则  $f_T(t)$  在  $-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}$  上可以展成 Fourier 级数.在  $f_T(t)$  的连续点处,有

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t) \quad (\text{三角形式})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t}, \quad (\text{复数形式或称复指数形式})$$

其中

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

在  $f_T(t)$  的间断点  $t$  处, 上面的展开式左边  $f_T(t)$  应以  $\frac{1}{2}[f_T(t+0) + f_T(t-0)]$  代替.

### (2) Fourier 积分定理

对于  $(-\infty, +\infty)$  上的任何一个非周期函数  $f(t)$  都可以看成是由某个周期函数  $f_T(t)$  当  $T \rightarrow +\infty$  时转化而来的. 由此, 从  $f_T(t)$  的 Fourier 级数的复数形式出发, 能够得到一个非周期函数  $f(t)$  的 Fourier 积分公式, 其条件为:

若  $f(t)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上满足下列条件:

1.  $f(t)$  在任一有限区间上满足 Dirichlet 条件;
2.  $f(t)$  在无限区间  $(-\infty, +\infty)$  上绝对可积 (即积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$  收敛), 则在  $f(t)$  的连续点处有如下的 Fourier 积分公式

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{-j\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{-j\omega t} d\omega.$$

在  $f(t)$  的间断点  $t$  处, 上面展开式左端的  $f(t)$  应以  $\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)]$  代替. 这个公式也称为 Fourier 积分公式的复数形式.

这个定理在教材中虽然未加证明, 但应当看到它是 Fourier 变换的理论基础, 必须深刻理解其含义, 掌握它成立的条件, 以便为学习 Fourier 变换奠定理论基础.

### (3) Fourier 积分公式的其他形式

1) Fourier 积分公式的三角形式

利用 Euler 公式, 由 Fourier 积分公式的复数形式可推出它的三角形式:

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(\omega) \cos(\omega t) d\omega$$

2) Fourier 正弦积分公式

当  $f(t)$  为奇函数时, 利用三角函数的和差公式, 由 Fourier 积分公式的三角形式可推出其 Fourier 正弦积分公式

$$f(t) = \int_0^{+\infty} f(\omega) \sin \omega t d\omega$$

3) Fourier 余弦积分公式

当  $f(t)$  为偶函数时, 同理可得

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\omega) \cos \omega t d\omega$$

若  $f(t)$  仅在  $(0, +\infty)$  上有定义, 且满足 Fourier 积分收敛定理的条件, 通过奇式(偶式)延拓, 便可得到  $f(t)$  的 Fourier 正弦(余弦)积分展开式.

**2. Fourier 变换**

(1) Fourier 变换的概念

Fourier 变换对的一般形式:

$$F[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = F^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega ;$$

Fourier 正弦变换对: 当  $f(t)$  为奇函数时, 有

$$F_s[f(t)] = F_s(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

$$f(t) = F_s^{-1}[F_s(\omega)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_s(\omega) \sin \omega t d\omega ;$$

Fourier 余弦变换对: 当  $f(t)$  为偶函数时, 有

$$F_c[f(t)] = F_c(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$f(t) = F_c^{-1}[F_c(\omega)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_c(\omega) \cos \omega t d\omega,$$

它们可分别简记为  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ ,  $f(t) \leftrightarrow F_s(\omega)$  及  $f(t) \leftrightarrow F_c(\omega)$ . 显然, 当  $f(t)$  为奇函数时,  $F(\omega) = -2jF_s(\omega)$ , 当  $f(t)$  为偶函数时,  $F(\omega) = 2F_c(\omega)$ .

## (2) 单位脉冲函数及其 Fourier 变换

- 函数的重要性质—筛选性质: 若  $f(t)$  为无穷次可微的函数, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0).$$

一般地, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0).$$

由这一性质, 可得  $F[\delta(t)] = 1$ ,  $F^{-1}[1] = \delta(t)$ , 表明  $\delta(t)$  和 1 构成一个 Fourier 变换对, 记为  $\delta(t) \leftrightarrow 1$ . 同理, 有  $\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$ .

需要指出的是  $\delta(t)$  是一个广义函数, 它的 Fourier 变换是一种广义 Fourier 变换. 在物理学和工程技术中有许多重要函数(如常数, 符号函数, 单位阶跃函数及正、余弦函数等)不满足 Fourier 积分定理中的绝对可积条件(即不满足  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$ ), 然而其广义 Fourier 变换是存在的. 利用单位脉冲函数及其 Fourier 变换就可以求出它们的 Fourier 变换. 例如

$$F[1] = 2\pi \delta(\omega), \quad F[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi \delta(\omega - \omega_0),$$

$$F[u(t)] = \frac{1}{j} + \pi \delta(\omega), \quad F[\text{sgnt}] = \frac{2}{j},$$

$$F[\sin \omega_0 t] = j [\pi \delta(\omega + \omega_0) - \pi \delta(\omega - \omega_0)],$$

$$F[\cos \omega_0 t] = \pi [\pi \delta(\omega + \omega_0) + \pi \delta(\omega - \omega_0)].$$

### 3. Fourier 变换的物理意义—频谱

(1) 非正弦的周期函数  $f_T(t)$  的频谱

在  $f_T(t)$  的 Fourier 级数展开式中, 称

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

为第  $n$  次谐波, 其中  $\omega_n = n\omega = \frac{2n\pi}{T}$ .  $A_0 = \frac{|a_0|}{2}$ ,  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  称为频率为  $\omega_n$  的第  $n$  次谐波的振幅, 在  $f_T(t)$  的 Fourier 级数的复数形式中, 第  $n$  次谐波为  $c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t}$ , 并且  $|c_n| = |c_{-n}| = \frac{1}{2}$

$\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ , 从而  $f_T(t)$  的第  $n$  次谐波的振幅为

$$A_n = 2|c_n| \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

它描述了各次谐波的振幅随频率变化的分布情况. 所谓频谱图, 通常是指频率  $\omega_n$  与振幅  $A_n$  的关系图.  $A_n$  也称为  $f_T(t)$  的振幅频谱(简称为频谱). 由于  $n=0, 1, 2, \dots$ , 所以频谱  $A_n$  的图形是不连续的, 称之为离散频谱, 其频谱图清楚地表明了一个非正弦的周期函数  $f_T(t)$  包含了哪些频率分量及各分量所占的比重(如振幅的大小).

(2) 非周期函数  $f(t)$  的频谱

非周期函数  $f(t)$  的 Fourier 变换  $F(\omega) = F[f(t)]$ , 在频谱分析中又称为  $f(t)$  的频谱函数, 它的模  $|F(\omega)|$  称为  $f(t)$  的振幅频谱(简称为频谱). 由于  $\omega$  是连续变化的, 这种频谱称为连续频谱, 频谱图为连续曲线. 振幅频谱  $|F(\omega)|$  是频率  $\omega$  的偶函数; 相角频谱

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt}$$

是频率  $\omega$  的奇函数. 对一个时

间函数作 Fourier 变换, 就是求这个时间函数的频谱函数.

频谱图能清楚地表明时间函数的各频谱分量的相对大小, 因此, 频谱图在工程技术中有着广泛的应用. 作出一个非周期函数  $f(t)$  的频谱图, 其步骤如下:

- 1) 先求出非周期函数  $f(t)$  的 Fourier 变换  $F(\omega)$ ;
- 2) 选定频率  $\omega$  的一些值, 算出相应的振幅频谱  $|F(\omega)|$  的值;
- 3) 将上述各组数据所对应的点填入直角坐标系中, 用连续曲线连接这些离散点, 就得到了该函数  $f(t)$  的频谱图.

#### 4. Fourier 变换的基本性质

为叙述方便, 在下述性质中, 凡是需要求 Fourier 变换的函数, 假定都满足 Fourier 积分定理中的条件.

(1) 线性性质 设  $F[f_1(t)] = F_1(\omega)$ ,  $F[f_2(t)] = F_2(\omega)$ ,  $A, B$  为常数, 则

$$F[Af_1(t) + Bf_2(t)] = AF_1(\omega) + BF_2(\omega);$$

$$F^{-1}[AF_1(\omega) + BF_2(\omega)] = Af_1(t) + Bf_2(t).$$

(2) 位移性质 设  $F[f(t)] = F(\omega)$ , 则

$$F[f(t \pm t_0)] = e^{\pm j\omega t_0} F(\omega);$$

$$F^{-1}[F(\omega) e^{\pm j\omega t_0}] = f(t) e^{\pm j\omega t_0}, \text{ (象函数的位移性质).}$$

(3) 微分性质 设  $F[f(t)] = F(\omega)$ , 如果  $f^{(k)}(t)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续或只有有限个可去间断点, 且  $\lim_{|t| \rightarrow \pm\infty} f^{(k)}(t) = 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , 则有

$$F[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n F(\omega);$$

$$F^{(n)}(\omega) = (-j\omega)^n F[f^{(n)}(t)], \text{ (象函数的微分性质).}$$

特别, 当  $n = 1$  有

$$F[f'(t)] = j\omega F(\omega);$$

$$F(\omega) = -j\omega F[tf(t)].$$

(4) 积分性质 设  $F[f(t)] = F(\omega)$ , 如果当  $t \rightarrow \pm\infty$  时,  $g(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt \rightarrow 0$ , 则

$$F\left[\int_{-\infty}^t f(t) dt\right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega);$$

当  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} g(t) \neq 0$  时, 有

$$F \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \frac{1}{j} F(\omega) + F(0) \delta(\omega).$$

(5\*) 乘积定理 设  $F[f_1(t)] = F_1(\omega)$ ,  $F[f_2(t)] = F_2(\omega)$ , 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(\omega) d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \overline{f_2(t)} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) \overline{F_2(\omega)} d\omega,$$

其中  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $F_1(\omega)$  及  $F_2(\omega)$  分别为  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $F_1(\omega)$  及  $F_2(\omega)$  的共轭函数. 特别, 当  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  为实函数时, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) \overline{F_2(\omega)} d\omega. \end{aligned}$$

(6\*) 能量积分 设  $F[f(t)] = F(\omega)$ , 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

这一等式又称为 Parseval 等式. 函数  $S(\omega) = |F(\omega)|^2$  称为能量密度函数(或称能量谱密度). 它可以决定函数  $f(t)$  的能量分布规律. 将它对所有频率积分就得到  $f(t)$  的总能量, 因此, Parseval 等式又称为能量积分. 它表明非周期函数  $f(t)$  在时间域内的能量与在频率域内的能量不因  $f(t)$  取 Fourier 变换后而改变. 由于能量密度函数  $S(\omega)$  是  $\omega$  的偶函数, 则能量积分可进一步写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{0} \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega.$$

## 5. 卷积与相关函数

### (1) 卷积的概念

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau, \text{ 且其运算满足}$$

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \quad (\text{交换律});$$

$f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] = [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t)$  (结合律);

$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$  (分配律);

$|f_1(t) * f_2(t)| \leq |f_1(t)| * |f_2(t)|$  (卷积不等式).

(2) 卷积定理 设  $f_k(t)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 满足 Fourier 积分定理中的条件, 且  $F[f_k(t)] = F_k(\omega)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ), 则

$$F[f_1(t) * f_2(t) * \dots * f_n(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) \cdot \dots \cdot F_n(\omega);$$

$$F[f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \dots \cdot f_n(t)] = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} F_1(\omega) * F_2(\omega) * \dots * F_n(\omega)$$

(象函数卷积定理).

特别,

$$F[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega);$$

$$F[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega).$$

### (3\*) 相关函数的概念

相关函数的概念和卷积的概念一样, 也是频谱分析中的一个重要概念. 记函数  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  的互相关函数为

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t + \tau) dt.$$

记函数  $f(t)$  的自相关函数(简称为相关函数)为

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t + \tau) dt.$$

显然,  $R(\tau) = R(-\tau)$ ;  $R_{21}(\tau) = R_{12}(-\tau)$ .

### (4\*) 相关函数和能量谱密度的关系

1) 自相关函数和能量谱密度构成一个 Fourier 变换对:  $R(\tau)$  和  $S(\omega)$ , 即

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega;$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

利用  $R(\tau)$  和  $S(\omega)$  的偶函数性质, 可进一步写为

$$R(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega') \cos(\omega - \omega') d\omega' ;$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega') \cos(\omega - \omega') d\omega'$$

$R(\omega)$  在  $\omega = 0$  时, 可得 Parseval 等式, 即

$$R(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega') d\omega' = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt.$$

2) 互相关函数和互能量谱密度构成一个 Fourier 变换对. 由乘积定理(当  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  为实函数时)知

$$\begin{aligned} R_{12}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t + \tau) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega')} F_2(\omega - \omega') e^{j\omega\tau} d\omega'. \end{aligned}$$

记互能量谱密度为  $S_{12}(\omega) = \overline{F_1(\omega')} F_2(\omega - \omega')$  (而  $S_{21}(\omega) = \overline{F_2(\omega')} F_1(\omega - \omega')$ ), 则

$$R_{12}(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{12}(\omega') e^{j\omega\tau} d\omega' ;$$

$$S_{12}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{12}(\omega') e^{-j\omega\tau} d\omega' .$$

显然, 互能量谱密度有  $S_{21}(\omega) = \overline{S_{12}(\omega)}$ .

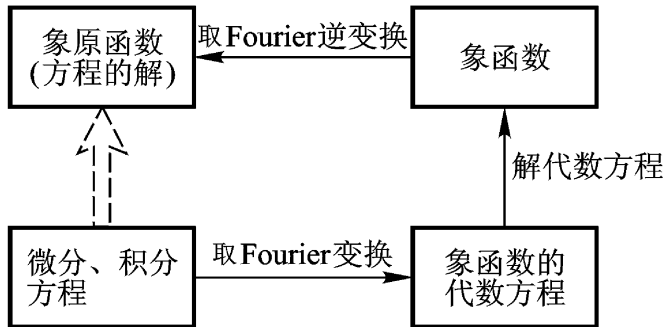
## 6. Fourier 变换的应用

Fourier 变换是分析非周期函数频谱的理论基础. 它在频谱分析中有着重要的应用, 前面已列出其内容要点. 这里的应用主要是用来求解某些微分、积分方程和偏微分方程(其未知函数为二元函数的情形)的定解问题.

### (1) 微分、积分方程的 Fourier 变换解法

运用 Fourier 变换的线性性质、微分性质和积分性质, 对欲求解的方程两端取 Fourier 变换, 将其转化为象函数的代数方程, 通过解代数方程与求 Fourier 逆变换就可得到原方程的解. 这种解法

如下图所示:



## (2) 偏微分方程的 Fourier 变换解法

运用 Fourier 变换求解偏微分方程的定解问题类似于上述示意图中的三个步骤, 即先将定解问题中的未知函数看作某一自变量的函数, 对方程及定解条件关于该自变量取 Fourier 变换, 把偏微分方程和定解条件化为象函数的常微分方程的定解问题; 再根据这个常微分方程和相应的定解条件, 求出象函数; 然后再取 Fourier 逆变换, 得到原定解问题的解. 这里, 要求变换的自变量在  $(-\infty, +\infty)$  内变化; 如要求变换的自变量在  $(0, +\infty)$  内变化, 则根据定解条件的情形可运用 Fourier 正弦变换或 Fourier 余弦变换来求解该偏微分方程的定解问题.

## 二 例题分析

**例 1-1** 试求函数  $f(t) = \begin{cases} t, & |t| < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$  的 Fourier 积分表达式.

**解** 在 Fourier 积分定理的条件下, 函数  $f(t)$  的 Fourier 积分表达式, 可以用复数形式, 也可以用三角形式来表达; 由于函数  $f(t)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的奇函数, 还可以用 Fourier 正弦积分公式来表达; 如果读者已经掌握 Fourier 变换的性质, 则可根据教材第一章 § 1.1 中的例 1, 利用象函数的微分性质求得结果.

**方法 1** 利用 Fourier 积分公式的复数形式, 在  $f(t)$  的连续点

处, 有

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\tau) e^{-j\tau} d\tau + \int_{-1}^{+1} f(\tau) e^{j\tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (\cos \tau - j \sin \tau) d\tau + \int_{-1}^{+1} e^{j\tau} d\tau \\
 &= \frac{-j}{2} \int_{-1}^{+1} \sin \tau d\tau + \int_{-1}^{+1} e^{j\tau} d\tau \\
 &= \frac{-j}{2} \left[ \frac{\sin \tau}{2} - \frac{\cos \tau}{2} \right]_{-1}^{+1} + (\cos t + j \sin t) d\tau \\
 &= \frac{2}{0} \left[ \frac{\sin \tau}{2} - \frac{\cos \tau}{2} \right]_{-1}^{+1} \sin \tau d\tau, (t \neq \pm 1)
 \end{aligned}$$

当  $t = \pm 1$  时,  $f(t)$  应以  $\frac{1}{2}[f(\pm 1 + 0) + f(\pm 1 - 0)] = \pm \frac{1}{2}$  代替.

方法 2 利用 Fourier 积分公式的三角形形式, 在  $f(t)$  的连续点处, 有

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{0} \int_{-1}^{+1} f(\tau) \cos(\tau - t) d\tau + \int_{-1}^{+1} f(\tau) \cos(\tau - t) d\tau \\
 &= \frac{1}{0} \int_{-1}^{+1} \cos(\tau - t) d\tau + \int_{-1}^{+1} \cos(\tau - t) d\tau \\
 &= \frac{1}{0} \int_{-1}^{+1} (\cos \tau \cos t + \sin \tau \sin t) d\tau + \int_{-1}^{+1} \cos(\tau - t) d\tau \\
 &= \frac{2}{0} \sin t \int_{-1}^{+1} \sin \tau d\tau + \int_{-1}^{+1} \cos(\tau - t) d\tau \\
 &= \frac{2}{0} \left[ \frac{\sin \tau}{2} - \frac{\cos \tau}{2} \right]_{-1}^{+1} \sin t d\tau, (t \neq \pm 1)
 \end{aligned}$$

同样, 当  $t = \pm 1$  时,  $f(t)$  应以  $\pm \frac{1}{2}$  代替.

方法 3 由于  $f(t)$  为  $(-1, +1)$  上的奇函数, 也可以利用 Fourier 正弦积分公式, 在  $f(t)$  的连续点处, 有

$$f(t) = \frac{2}{0} \int_{-1}^{+1} f(\tau) \sin \tau d\tau \sin \tau d\tau$$