

东北大学研究生院教材科研立项项目

大跨度空间结构体系

主编 朱浮声

副主编 王晓初

东北大学出版社

✦ 沈摇阳 ✦

摇朱浮声 圆扭原

摇图书在版编目 (悦孕) 数据

摇大跨度空间结构体系 轶朱浮声主编援— 沈阳 : 东北大学出版社, 圆扭原

摇 ISBN 7-5517-0000-0

摇 I 圆大...摇 II 圆朱...摇 III 圆大跨度结构: 空间结构摇 IV 圆裁圆怨

摇中国版本图书馆 悦孕数据核字 (圆扭原) 第 员圆号

摇

摇出版者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路 猿号巷 员号

邮编: 员圆扭原

电话: 圆扭原-愿圆圆猿猿 (市场部) 摇愿圆圆圆圆 (社务室)

传真: 圆扭原-愿圆圆猿猿 (市场部) 摇愿圆圆圆圆 (社务室)

电子邮箱: 火圆圆圆岳 火圆圆圆圆

网址: // 圆圆圆圆圆

摇印刷者: 沈阳市光华印刷厂

摇发行者: 东北大学出版社

摇幅面尺寸: 员圆皂伊圆圆皂

摇印摇摇张: 员圆圆

摇字摇摇数: 猿圆千字

摇出版时间: 圆扭原年 员圆月第 员版

摇印刷时间: 圆扭原年 员圆月第 员次印刷

摇责任编辑: 刘圆莹摇摇摇摇摇摇责任校对: 文圆玉

摇封面设计: 唐敏智摇 责任出版: 秦圆力

摇

摇定摇摇价: 猿圆元

内 容 简 介

本书系统地阐述了薄壳结构体系、网格结构体系、悬索结构体系以及组合结构体系的基本概念和基本理论。理论体系完整，叙述深入浅出，便于自学和应用。本书的特色是重视对解析方法基本理论的介绍，强调结构选型和概念设计。

本书内容既考虑到为结构工程和工程力学专业的研究生奠定结构分析的坚实理论基础，又紧密结合工程设计的实用要求；既可以作为土木工程和力学专业高年级学生和研究生的教学用书，也可以供土木工程领域科研、设计和施工人员参考。

前摇摇言

自 1985 年始，作者开始为东北大学结构工程和工程力学专业的硕士研究生讲授《当代结构工程》学位课，主要涉及大跨度空间结构体系，内容包括薄壳结构体系、网格结构体系和索膜结构体系等。在多年的教学实践中，通过不断总结教学经验，收集整理技术资料，参加工程咨询和设计实践，形成了这本研究生教材。

随着计算机技术和数值方法的进展，有限单元法和其他工程数值方法已经在大跨度空间结构的分析和设计中占有重要地位。今天，离开计算机和数值分析，很多大型、复杂结构的分析和设计几乎不可能实现。但是，考虑到对数学、力学基础理论和基本计算技能的训练要求，作为结构类和力学类专业的研究生教材，本书强调了解析理论和概念设计。教学内容的这种安排不仅便于学生系统掌握大跨度空间结构体系分析的基本理论和力学概念，能够正确建立工程问题的力学模型和利用数学理论求解，并深刻理解问题的物理(力学)实质，也为深刻理解结构分析数值方法奠定了坚实的基础。同时，手算结果和解析解可以提供数值分析的初始参数，帮助工程师正确判断和检验数值方法的计算结果，并可以被直接用于方案和初步设计。另一方面，工程数值方法作为相对独立的学科，具有本身的规律和特点。并且，针对不同学科的不同物理和其他科学问题，应用中存在一定的甚至是较大的差异。这些规律和差异可以通过在不同领域开设的工程数值方法课程，如大跨度空间结构体系分析的有限单元法解决。同时，讲授解析理论和数值分析方法不仅受学时限制，也可能导致重点过多、冲淡基本理论的后果。

在结构分析中，非线性理论已经成为研究的一个热点，并逐步在理论分析和工程设计中得到应用。由于非线性理论仍然处于探索和发展阶段，并考虑到目前结构分析和设计的现状，本教材的解析理论主要建立在线性理论基础上。对于结构的物理和几何非线性考虑，可以通过开设相应的非线性分析专门课程解决。

对于结构的理解、认识、应用和创新是结构工程师、结构工程类研究生和以结构为背景的工程力学研究生的任务，也是他们终生的学习目标。结构的实现不仅是一种理性思考，更产生于经验和直觉。结构与建筑是不可分割的，结构和建筑的实现与材料、构造措施和施工技术密不可分。考虑到研究生教育的特点和学时要求，本教材强调了结构分析的基础理论和概念设计，对于后者，只能忍痛割

爱。在工程实践中，工程师和学生可以参考有关规范和参考文献，并通过实践加以解决。同时，对于刚刚发展的新型结构体系，本书采用了只提出问题和研究热点，不讨论理论和技术细节的处理方法。教师可以根据授课当时该领域的进展情况，灵活增减相关内容。

随着科技进步，新材料、新技术、新工艺、新结构体系不断涌现。在使用本教材时，教师应该结合大量具体工程实例和设计、施工经验，不断补充新内容。同时，本教材关于组合结构部分的论述也考虑到这个因素，取材比较粗、广，以便教师取舍。此外，工程实例分析是结构工程最重要的教学内容之一。在教学中，教师应结合具体工程分析、设计和施工经验，保证实例分析内容占有一定比重。

在写作本教材过程中，参考了大量文献资料。其中，大量引用了东南大学肖炽、李维滨和马少华教授，浙江大学董石麟和钱若军教授，哈尔滨工业大学沈世钊、徐崇宝和赵臣教授，以及华南理工大学韩强、黄小清和宁建国教授等的著作内容，在此表示感谢，对于参考文献所列作者一并表示感谢。感谢东北大学研究生院给予本教材的支持和资助。

本书不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

作摇者

圆源年盛夏

目 录

第 员篇 薄壳结构体系

| | |
|----------------|----|
| 第 员章 绪论 | 员 |
| 员 薄壳及其特点 | 员 |
| 圆 薄壳结构分类 | 员 |
| 第 圆章 薄壳理论基础 | 缘 |
| 员 正交曲线坐标系 | 缘 |
| 圆 壳体的几何方程 | 苑 |
| 猿 壳体的物理方程 | 园 |
| 源 壳体的平衡方程 | 园 |
| 缘 薄壳的无矩理论 | 源 |
| 第 猿章 旋转对称薄壳 | 员远 |
| 员 旋转对称壳体的无矩理论 | 员远 |
| 圆 轴对称旋转壳体的无矩理论 | 怨 |
| 猿 旋转对称壳体的弯矩理论 | 缘 |
| 第 源章 柱面薄壳 | 猿 |
| 员 柱面壳无矩理论 | 猿 |
| 圆 柱面壳弯曲内力 | 猿 |
| 猿 柱面壳的设计计算 | 源 |
| 第 缘章 扁壳 | 源 |
| 员 扁壳基本方程式 | 源 |
| 圆 矩形底面双曲扁壳简化算法 | 苑 |
| 猿 双曲抛物面扁壳简化算法 | 缘 |

| | |
|------------------------|---|
| 第 远章摇薄壳设计 | 缘 |
| 远园摇薄壳体系受力特点与概念设计 | 缘 |
| 远员摇薄壳设计概要 | 远 |

第 圆篇摇网格结构体系

| | |
|--------------------|---|
| 第 苑章摇绪摇摇论 | 苑 |
| 苑园摇空间网格结构 | 苑 |
| 苑员摇网格结构的分类 | 苑 |
| 苑圆摇网格结构的分析方法 | 苑 |

| | |
|-----------------------------|---|
| 第 愿章摇网格结构分析的拟板法和拟夹层板法 | 愿 |
| 愿园摇网架分析的拟板法原理 | 愿 |
| 愿员摇网架分析的拟夹层板法原理 | 愿 |
| 愿圆摇双向正交正放类网架拟夹层板法 | 愿 |
| 愿猿摇其他类型平板网架的拟夹层板法 | 愿 |

| | |
|-------------------------|---|
| 第 怨章摇平板网架的交叉梁系差分法 | 怨 |
| 怨园摇基本微分方程 | 怨 |
| 怨员摇基本微分方程的差分表达 | 怨 |
| 怨圆摇边界条件的处理及内力计算 | 怨 |

| | |
|-----------------------------|----|
| 第 员园章摇球面网壳的拟壳法 | 员园 |
| 员园园摇球面网壳的等代刚度 | 员园 |
| 员园员摇球面网壳的基本微分方程式及其近似解 | 员园 |

| | |
|-----------------------|----|
| 第 员员章摇扁网壳的拟壳法 | 员员 |
| 员员园摇基本假定和计算模型 | 员员 |
| 员员员摇位移法基本微分方程式 | 员员 |
| 员员圆摇混合法基本微分方程式 | 员员 |
| 员员猿摇混合法基本方程式的求解 | 员员 |

| | |
|----------------------------|----|
| 第 员圆章摇圆柱面网壳的拟壳法 | 员圆 |
| 员圆园摇圆柱面网壳的基本方程式及其齐次解 | 员圆 |

| | |
|--------------------------------|----|
| 猿猿猿 猿猿 圆柱面网壳的薄膜解与边界条件 | 猿猿 |
| 第 猿猿章 猿猿 网壳的稳定性 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 概述 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 扁球网壳稳定性的线性理论 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 扁球壳与扁球网壳稳定性的非线性理论 | 猿猿 |
| 第 猿猿章 猿猿 网架设计 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 概述 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 平板网架体系受力特点与概念设计 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 平板网架构件设计计算 | 猿猿 |

第 猿猿篇 猿猿 悬索结构体系

| | |
|----------------------------|----|
| 第 猿猿章 猿猿 单索结构体系与单索分析 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 悬索结构体系 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 沿索跨均布竖向荷载作用 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 沿索跨分布梯形竖向荷载 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 沿索跨分布三角形竖向荷载 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 荷载状态下的单索分析 | 猿猿 |
| 第 猿猿章 猿猿 双层悬索分析 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 沿索跨度不对称均布荷载 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 沿索跨三角形分布荷载 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 辐射状双层悬索体系 | 猿猿 |
| 第 猿猿章 猿猿 正交索网分析 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 索网分析 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 双曲抛物面索网 | 猿猿 |
| 第 猿猿章 猿猿 悬索组合结构体系 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 索—梁体系 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 劲性悬索体系 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 悬索—拱结构体系 | 猿猿 |
| 猿猿猿 猿猿 索穹顶结构体系 | 猿猿 |

| | |
|--------------------|-------|
| 悬索膜结构体系 | 图 1-1 |
| 第 4 章 悬索体系设计 | 图 1-2 |
| 悬索一般概念 | 图 1-3 |
| 悬索材料和构造措施 | 图 1-4 |
| 悬索水平力处理与支座 | 图 1-5 |
| 悬索单向单层悬索设计 | 图 1-6 |
| 悬索单向双层悬索设计 | 图 1-7 |
| 悬索辐射状悬索设计 | 图 1-8 |
| 参考文献 | 图 1-9 |

第 员篇 薄壳结构体系

第 员章 绪论

薄壳及其特点

由两个曲面所限定的物体，若两曲面的垂直距离(厚度)远比曲面尺寸小，即称之为壳体。称这两个曲面为壳面，称两壳面之间的距离为壳体厚度，称平分壳体厚度的曲面为中曲面。如果壳体中曲面的厚度远小于它的曲率半径，称这样的壳体为薄壳。换言之，如果记壳体厚度为 t ，中曲面曲率半径为 R ，则称 $t \ll R$ 的壳体为薄壳，而称 $t \approx R$ 的壳体为厚壳。建筑工程使用的壳体通常为薄壳，且 t/R 更小。

荷载作用下，薄壳的主要受力特点如下：

① 壳受到荷载后，主要内力为面内力(薄膜内力)，即薄壳结构主要靠薄膜内力支撑自重和外荷载，而弯曲和扭转相对很小，通常可以忽略不计；

② 薄膜内力的流向呈立体形态，壳面所受荷载能直接被传至支承结构，传力途径简捷。

建筑工程中使用薄壳的主要优点为：

- ① 可以覆盖大跨度空间；
- ② 节省材料，经济效果好；
- ③ 自重轻，刚度大，整体性好，有良好的抗震和动力性能；
- ④ 造型美观，活泼新鲜。

建筑工程中使用薄壳的主要缺点是：

- ① 现浇薄壳需耗费大量模板；
- ② 某些壳体的隔热和声学效果差，需要进行特殊处理。

薄壳结构分类

对于图 1-1 所示空间曲面，过曲面上任意一点 P 做其法线 PN ，称过法线 PN

所做的平面为法截面，法截面与曲面的交线为法截线，法截线在点处的曲率为法曲率。显然，过点的法截面和法截线可以有无穷多个。过法截线上任意点的切线斜率、过法截线上任意点处切线斜率的变化率（曲率），以及该点处斜率沿与其相垂直方向法截线上任意点处切线斜率的变化率（扭率）是法截线的最基本的局部性质。

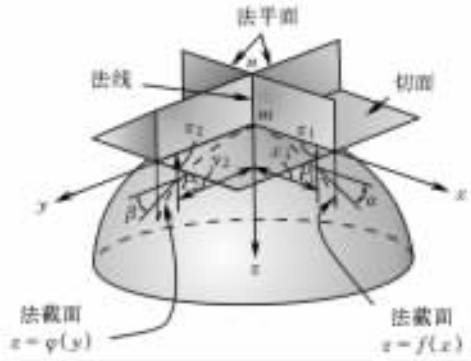


图 10-10 空间曲面几何

当法截线绕曲面上任意一点的法线转动时，法截线的曲率通常是改变的，可以证明：

- ① 存在使曲率分别为最大值和最小值的两个彼此垂直的方向，称其为曲率的主方向，相应的曲率值为曲率主值；
- ② 存在使扭率分别为最大值和最小值的两个彼此垂直的方向，称其为扭率的主方向；
- ③ 曲面的两个曲率主方向上的扭率等于零。

(四) 按照曲面形成方法分类

① 旋转面薄壳。由一根空间母线(直线或曲线)沿一个固定轴旋转生成的壳体。常用的母线为直线、圆弧线、椭圆线、双曲线和抛物线等。若生成旋转面的旋转轴线是垂直的，则称生成旋转面的相应曲线为“经线”，称由垂直于经线的(水平)平面在旋转曲面上的截线为“纬线”。显然，经线就是主曲率线，与经线相互垂直的另一组曲线也是主曲率线(一般不是纬线)。任何形状的曲线都可以作为经线，从而产生各种形状的空间曲面(图 10-11)。若任意一条封闭曲线绕旋转轴转动，且该曲线与该轴线不相交，则生成环形体。同一环形体的各段可以具有完全不同的外形。

如果用空间平面截割旋转曲面，可以得到圆形、矩形、三角形或多边形等不同平面形状。

② 移动面薄壳。由一根空间母线(直线或曲线)沿另两根准线(直线或曲线)移动生成的壳体。常用的母线为直线、圆弧线、椭圆线、双曲线和抛物线等，由此可以生成圆柱面壳(筒壳)、劈锥壳、双曲扁壳、双曲抛物面壳和波浪形壳等(图 10-12)。

③ 组合式薄壳。对于按照上述任意方法生成的薄壳面进行切割，就可以产生形式丰富多彩、曲线优美的不同薄壳结构。例如，如果将一段圆柱面壳沿其对

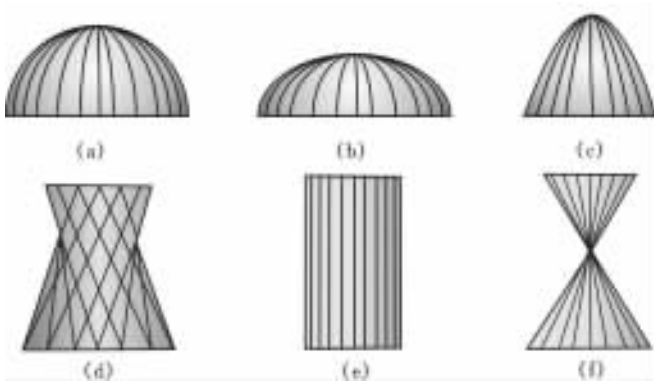


图 4-10 旋转空间曲面

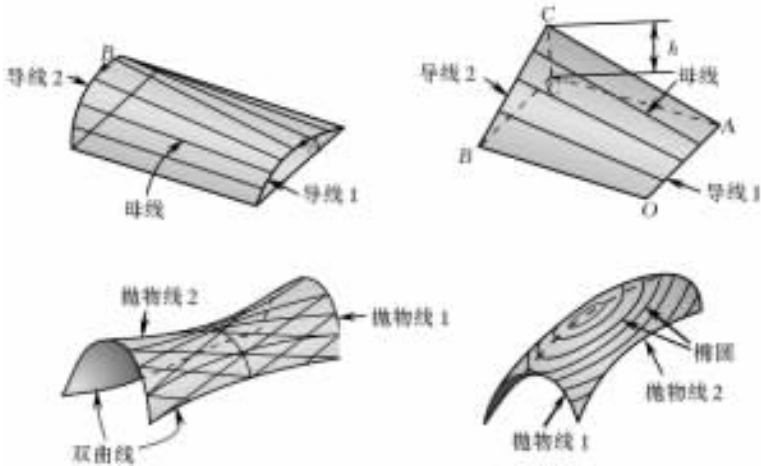


图 4-11 移动面薄壳

角线切开，可以生成两种新壳面(图 4-12(a))，即“帽檐壳” σ_{12} 和“瓜瓣壳” σ_{13} 。图 4-12(b)和图 4-12(c)分别是由四个帽檐壳和四个瓜瓣壳组成的新薄壳曲面。如果将双曲抛物面切割后重新组合，可以生成更加富有曲线美的薄壳曲面。

(圆) 按照高斯曲率分类

若记任意曲面的主曲率分别为 κ_1 和 κ_2 ，其曲率半径分别为 R_1 和 R_2 ，则有 $\kappa_1 = \frac{1}{R_1}$ 和 $\kappa_2 = \frac{1}{R_2}$ 。定义两个主曲率的乘积为高斯曲率，记为 K ，有

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{1}{R_1 R_2} \quad (4-1)$$

高斯曲面的大小和向号是空间曲面的重要几何特征。按照高斯曲率的符号，可以将薄壳区分为以下几种。

第 四章 摇薄壳理论基础

四.1 摇正交曲线坐标系

建立一个空间曲线坐标系 $\alpha\beta\gamma$ ，它与空间直角坐标系 xyz 之间存在关系(图 4.1)

$$\vec{r}(\alpha, \beta, \gamma), \vec{e}_\alpha(\alpha, \beta, \gamma), \vec{e}_\beta(\alpha, \beta, \gamma) \quad (4.1)$$

如果使式(4.1)中的 α 为变量，保持 β 和 γ 为常数，则式(4.1)成为

$$\vec{r}(\alpha), \vec{e}_\alpha(\alpha), \vec{t}_\alpha(\alpha) \quad (4.2)$$

这是一条空间曲线。分别取 β 和 γ 为不同常数值，可以得到以参数 α 表示的一个曲线族。类似地，当三个参数 α, β 和 γ 中的任意两个取一系列常数值时，都将得到以第三个参数表示的曲线族，称之为 α 线、 β 线和 γ 线。

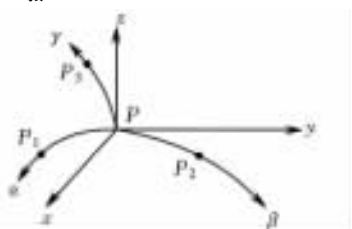


图 4.1 空间曲线坐标系

如果使式(4.1)中的 β 和 γ 为变量，保持 α 为常数，则有

$$\vec{r}(\beta, \gamma), \vec{e}_\beta(\beta, \gamma), \vec{e}_\gamma(\beta, \gamma) \quad (4.3)$$

这是一个空间曲面。当 α 分别取一系列不同常数值时，可以得到以参数 β 和 γ 表示的一个曲面族。类似地，当三个参数 α, β 和 γ 中的任意一个取一系列常数值时，都将得到以其他两个参数表示的曲面族，称之为 α 面、 β 面和 γ 面。

若 α, β, γ 和 x, y, z 在空间区域中互为单值，则过该空间任意一点，有且仅有 α 面、 β 面和 γ 面中的各一个曲面。换言之，空间区域中任意一点和一组参数 (α, β, γ) 具有一一对应关系，该区域中任意一点的位置可以由这组参数唯一确定。类似地，对于空间区域任意一点，有且仅有 α 线、 β 线和 γ 线中的各一条曲线通过该点。

如图 4.1 所示， $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma$ 分别表示沿 α 线、 β 线和 γ 线的点 P 的相邻点，相对于点 P 而言， $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma$ 分别具有弧长增量 $ds_\alpha, ds_\beta, ds_\gamma$ 。如果以 ds_α, ds_β 和 ds_γ 分别表示弧线 PP_α, PP_β 和 PP_γ 长度，则有

$$ds^2 = ds_\alpha^2 + ds_\beta^2 + ds_\gamma^2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}\right)^2 d\alpha^2 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}\right)^2 d\beta^2 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \gamma}\right)^2 d\gamma^2 \quad (4.4)$$

类似地，有 $\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}$ 和 $\frac{\partial \alpha}{\partial \gamma}$ ，其中

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \gamma}\right)^2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \gamma}\right)^2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \gamma}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1)$$

称 $\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}$ 、 $\frac{\partial \alpha}{\partial \gamma}$ 和 $\frac{\partial \alpha}{\partial \gamma}$ 为拉梅系数，它们表示沿坐标轴的弧长增量与该坐标增量的比值。可以证明，三个拉梅系数间存在关系

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} &= \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} &= \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} &= \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} &= \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} &= \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} &= \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.2)$$

若 α 线、 β 线和 γ 线相互正交，则构成三维正交曲线坐标系。

荷载作用下产生的壳体内力由微元分析得到。选取图 1.1.1 所示壳体微元，并建立一个正交曲线坐标系 $\alpha\beta\gamma$ ，其中， α 和 β 是壳体中曲面的主曲率线， γ 是壳体中曲面指向凸向的法线。

对于壳体中曲面上任意一点 P ，记主曲率为 R_α 和 R_β ，相应的主曲率半径为 R_α 和 R_β ，该点两个方向的拉梅系数为

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = \frac{R_\alpha}{R_\beta}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} = \frac{R_\alpha}{R_\beta} \quad (1.1.3)$$

通过壳体内任意一点 $P(\alpha, \beta, \gamma)$ 作一个沿 α 方向的微弧 $d\alpha$ ，有

$$\frac{d\alpha}{R_\alpha} = \frac{d\alpha}{R_\alpha} \frac{R_\alpha}{R_\beta} = \frac{d\alpha}{R_\beta} \quad (1.1.4)$$

因此，沿 α 方向的拉梅系数为

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = \frac{R_\alpha}{R_\beta} \quad (1.1.5)$$

类似地，沿 β 方向的拉梅系数为

$$h_\beta = \sqrt{g_{\beta\beta}} \quad (1.1.10)$$

由于 γ 为直线，所以

$$h_\gamma = 1 \quad (1.1.11)$$

式(1.1.10)表明，壳体内任意一点的拉梅系数可以由 α 和 β 坐标与该点相同的中曲面内对应点的拉梅系数来表示。

将式(1.1.10)代入方程式(1.1.9)，并注意到 h_α, h_β 和 h_γ 均只是 α 和 β 的函数，则方程式(1.1.9)的前两式成为恒等式，第三式在中曲面 γ 上化为

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{h_\beta}{h_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{h_\alpha}{h_\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) = -\frac{h_\alpha h_\beta}{h_\gamma} \Delta \varphi \quad (1.1.12)$$

称式(1.1.12)为高斯(Gauss)条件。

完全类似地，式(1.1.9)的最后一式也成为恒等式，第四、五两式在中曲面 γ 上化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{h_\beta}{h_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) &= -\frac{h_\beta}{h_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{h_\alpha}{h_\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) &= -\frac{h_\alpha}{h_\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.13)$$

称式(1.1.13)为科达奇(Codazzi)条件。

高斯条件和科达奇条件表示中曲面内的拉梅系数与主曲率之间的关系，它们可以被用于简化运算。

薄壳体的几何方程

弹性壳体理论基于如下假定：

- ① 垂直于壳体中曲面方向的正应变很小，可以被忽略；
- ② 变形过程中，壳体中曲面法线保持直线，且中曲面与其垂直线段之间的直角保持不变；
- ③ 在中曲面平行截面上的正应力远小于其垂直平面上的正应力，它对变形的影响可以被忽略；
- ④ 壳体上的体力和面力都可以被简化为作用于中曲面的荷载。

(1) 弹性体的几何方程

假定弹性体中任意一点 M 的位移在空间正交(曲线)坐标系中沿三个坐标轴的分量分别为 u, v 和 w ，沿坐标正方向的相应正应变为 $\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta$ 和 ϵ_γ ，剪应变

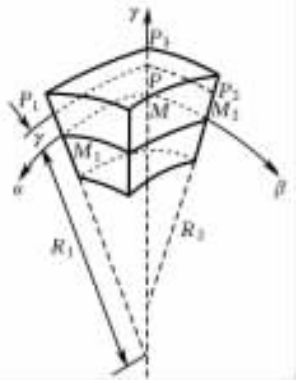


图 1.1.1 壳体正交曲线坐标系

为 α, β, γ (图 10-10)。对于弹性体内任一点 $P(\alpha, \beta, \gamma)$ 取出的微元体, 若其相邻点为 $P_1(\alpha + d\alpha, \beta, \gamma), P_2(\alpha, \beta + d\beta, \gamma), P_3(\alpha, \beta, \gamma + d\gamma)$, 则微元六面体上通过点 P 各棱边的曲率半径可以用该点的拉梅系数表示为

$$\left. \begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial \alpha}, & R_{22} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial x}{\partial \beta}, & R_{33} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial x}{\partial \gamma}, \\ R_{12} &= \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial x}{\partial \alpha \partial \beta}, & R_{21} &= \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial x}{\partial \beta \partial \alpha}, & R_{13} &= \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial x}{\partial \alpha \partial \gamma}, \\ R_{31} &= \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial x}{\partial \gamma \partial \alpha}, & R_{23} &= \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial x}{\partial \beta \partial \gamma}, & R_{32} &= \frac{1}{h_3 h_2} \frac{\partial x}{\partial \gamma \partial \beta} \end{aligned} \right\} \quad (10-10)$$

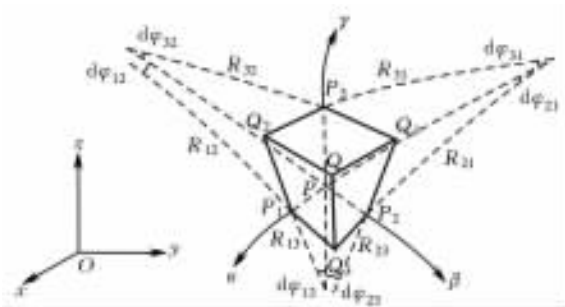


图 10-10 壳体微元体

根据微元体几何分析, 可以得到正交曲线坐标系下弹性体的几何方程式(应变和位移关系式)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u}{h_1} \right) + \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{h_2} \right) + \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{w}{h_3} \right), \\ \epsilon_{22} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{h_1} \right) + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v}{h_2} \right) + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{w}{h_3} \right), \\ \epsilon_{33} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial w}{\partial \gamma} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u}{h_1} \right) + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{v}{h_2} \right) + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{w}{h_3} \right), \\ \epsilon_{12} &= \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{h_2} \right) + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{h_1} \right), \\ \epsilon_{21} &= \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{h_1} \right) + \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{h_2} \right), \\ \epsilon_{13} &= \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{w}{h_3} \right) + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u}{h_1} \right), \\ \epsilon_{31} &= \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u}{h_1} \right) + \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{w}{h_3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10-11)$$

(10-11) 壳体的几何方程