高等学校教学用书

传输过程基本原理

乐启炽摇崔建忠摇主编

北摇京

冶 金 工 业 出 版 社

圆园园愿

内 容 提 要

本书在对传输过程涉及到的主要数学和物理知识进行介绍和补充的基础上，以传输过程的基本概念、基本定律、基本方程和基本应用为主线逐步展开进行阐述。主要内容包括传输过程的基础知识、控制方程、流动状态、电磁流体动力学、两相流、传热和传质等，此外，还简要阐述了传输问题的数值方法。本书高度重视内容的统一性和整体性与独立性的有机结合。

本书可以作为包括材料成形与控制工程在内的材料与冶金相关专业的本科生教材，也可供从事相关研究的研究生和教师以及工程技术人员参考。

摇图书在版编目（[illegible]）数据

摇传输过程基本原理[illegible]乐启炽等主编[illegible]—北京：冶金工业出版社，[illegible]

摇[illegible]

摇Ⅰ[illegible]传…摇Ⅱ[illegible]乐…摇Ⅲ[illegible]传输过程—流体流动—理论
Ⅳ[illegible]

摇中国版本图书馆[illegible]数据核字（[illegible]）第[illegible]号

出版人摇曹胜利 （北京沙滩嵩祝院北巷[illegible]号，邮编[illegible]）
责任编辑摇李培禄摇刘小峰摇美术编辑摇李摇心
责任校对摇符燕蓉摇李文彦摇责任印制摇牛晓波
北京兴华印刷厂印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销
[illegible]年[illegible]月第[illegible]版，[illegible]年[illegible]月第[illegible]次印刷
[illegible]印张；[illegible]千字；[illegible]页；[illegible]册
[illegible]元
冶金工业出版社发行部摇电话：（[illegible]）[illegible]摇传真：（[illegible]）[illegible]
冶金书店摇地址：北京东四西大街[illegible]号（[illegible]）摇电话：（[illegible]）[illegible]

前摇摇言

在材料与冶金的相关专业中，各种工艺和理论问题都涉及到动量、能量和质量的传输问题，因此在解决问题时都离不开传输过程的相关原理与知识。在 员怨怨愿年教育部颁布的高等学校本科专业目录中，材料成形与控制工程专业作为材料与冶金的主体专业之一，涵盖了原来的塑性成形、铸造、焊接及热处理等专业，大大拓展了专业领域。因此，传输原理成为塑性加工力学和塑性加工金属学之外极为重要的专业基础课程。本课程是该专业本科生的必修课程，对扩大学生的知识面、优化学生的知识结构、适应市场对学生择业的要求，均有极其重要的意义。

国内在 圆园世纪 愿园年代后期至 怨园年代初期出版了一些冶金传输原理教材，这些教材为国内许多院校的冶金和铸造专业所选用，也成为后来许多新教材的基础。近年来，专业调整之后，为适应高等学校学科建设的要求，出版了几种传输原理教材。但是，多数教材仍然是流体力学、传热学和传质学的机械组合，未能充分体现三种传输过程的类比性和相似性，而这一点对学生理解和把握相关知识是很重要的。另外，传输原理与其他许多学科一样，其内容和体系都在逐渐发展之中，例如电磁流体力学、湍流、多相流以及数值模拟等方面已经成为该领域重要的研究热点。因此，课程内容中加入了这些方面的基础知识，这样将更能体现课程的完整性与科学性。

东北大学 圆园园员年起在该专业中开设传输原理课程，到目前为止，已经对三届本科生进行了传授。根据几年的教学实践，在教学内容的取舍及逻辑性方面有了一定的经验，也积累了大量的素材。本书就是在这些工作的基础上进行编写的。

针对材料成形与控制工程专业本科生的实际情况，本书第 员章对传输过程涉及到的主要数学和物理知识进行了必要的回顾和补充；第 圆章对传输过程的基本概念和基本定律进行了阐述；第 猿章对传输过程的控制方程进行了阐述；第 源章描述了流体的不同流动状态以及对应的解，特别对边界层问题的处理方法进行了阐述；第 缘章和第远章对电磁流体动力学和两相流的基础知识进行了简要介绍；第 苑章和第 愿章对传输过程的控制方程在具体的传热和传质问题中的应用进行了阐述；第 怨章简要阐述了传输现象的数值方法。

本书在编写过程中，高度重视内容的统一性和整体性与独立性的有机结合。这主要体现在以传输过程的基本概念、基本定律、基本方程和基本应用为主线贯穿始终；书中的物理量及表示符号做到了前后一致，单位均采用国际单位制的单位（即我国的

法定计量单位），以便于读者阅读使用。同时，各章也具有相对独立性，可根据学时和具体要求对一些章节做必要的取舍，不影响内容的完整性和连贯性。本书在编写过程中参考了大量国内外相关教材、专著及文献，力求使内容准确无误。本书第 员章至第 愿章由乐启炽编写，第 怨章由赵志浩编写。全书由乐启炽和崔建忠主编。

本书在编写过程中得到了东北大学巴启先副教授的指教。研究生张志强同学参与了部分章节的打字输入。在教材的试用过程中，东北大学材料成形与控制工程 圆园园圆级同学们为试用教材的订正做出了贡献。在此表示诚挚的谢意。另外，特别感谢于福晓教授提供的部分重要英文资料及提出的宝贵建议。

由于编者水平所限，尽管做了极大努力，书中还难免存在疏漏或不当之处，敬请广大读者批评指正。

编摇者

圆园园缘年 远月

符摇号摇表

粤摇摇	摇摇面积,皂圆
粤早	气体通过的实际截面积,皂圆
粤造	液体通过的实际截面积,皂圆
粤责	固体颗粒在流动方向上的最大截面积,皂圆
粤泽	表面积,皂圆
葬	加速度,皂·泽原圆
葬	原子间距,皂
葬蚤	组分 蚤的体积份额,无量纲
月	磁感应强度,栽
月蚤	毕渥数,无量纲
月燥	邦德数,无量纲
月怎	浮力数,无量纲
悦	常数
悦遭	黑体的辐射系数(越缘援远苑宰·皂原圆·运原源)
悦凿	阻力系数,无量纲
悦枣	摩擦系数,无量纲
糟	光速,皂·泽原员
糟	总摩尔浓度,皂燥造·皂原猿
糟	质量含气率,无量纲
糟粤	组分 粤的摩尔浓度,皂燥造·皂原猿
糟粤泽	组分 粤在界面处的摩尔浓度,皂燥造·皂原猿
糟责	等压比热容,允·(噪早·运)原员
糟灶	集中比热容,允·(噪早·运)原员
糟增	等容比热容,允·(噪早·运)原员
阅	电位移,悦圆·皂原圆
阅园	标准状态的扩散系数,皂圆·泽原员
阅粤粤	组分 粤的自扩散系数,皂圆·泽原员
阅粤月	组分 粤在 月中的扩散系数,皂圆·泽原员
凿	球形物直径,皂
凿园	圆管(圆筒)内径,皂
凿责	固体球形颗粒直径,皂
耘	电场强度,灾·皂原员
耘	辐射力,宰·皂原圆
耘	能量,允
耘λ	单色辐射力,宰·皂原圆·μ皂原员
耘θ	θ方向的方向辐射力,宰·皂原圆·泽则原员
耘遭	黑体辐射力,宰·皂原圆
耘糟	埃克特数,无量纲
耘灶	总比能,允·噪早原员
耘怎	欧拉数,无量纲
云	力,晕
云	质量力,晕
云员圆	角系数,无量纲
云凿	摩擦阻力,晕
云藻	电磁体积力,晕
云燥	傅里叶数,无量纲
云燥皂	传质傅里叶数,无量纲
云则	弗劳德数,无量纲
枣	单位质量力,噪早
枣	摩擦因子
枣藻	洛伦兹力,晕·皂原猿
枣早	单位体积重力,晕·皂原猿
郾	重量,晕
郾	投射辐射能,宰·皂原圆
郾	质量通量,噪早·皂原圆·泽原员
郾λ	单色投射辐射能,宰·皂原圆
郾早	气体表观质量通量,噪早·皂原圆
郾造	液体表观质量通量,噪早·皂原圆
郾则	格拉晓夫数,无量纲
郾则皂	传质格拉晓夫数,无量纲
郾扎	格雷兹数,无量纲
早	重力加速度,皂·泽原圆
匀	总水头,皂

匀 磁场强度,粤·皂原员
匀 比焓,允·噪早原员
匀葬 哈脱曼数,无量纲
匀燥 均时性数,无量纲
澡 距离,皂
澡 表面传热系数或对流换热系数,宰·皂原圆·运原员
澡 普朗克常数(越远援远圆远伊员园原猿源允·泽)
澡Σ 总换热系数,宰·皂原圆·运原员
澡糟 对流换热系数,宰·皂原圆·运原员
澡枣 沿程水头损失,皂
澡皂 对流传质系数,皂·泽原员
澡则 辐射换热系数,宰·皂原圆·运原员
澡增 比能损失,允·噪早原员
陨 单位体积惯性力,晕辕皂猿
陨 辐射强度,宰辕皂圆·泽则
陨θ θ方向的辐射强度,宰辕皂圆·泽则
陨遭 黑体辐射强度,宰辕皂圆·泽则
陨灶 法向辐射强度,宰辕皂圆·泽则
允 电流密度,粤·皂原圆
允粤 组分粤的摩尔扩散通量,皂燥造·皂原圆·泽原员
允葬 亚克伯数,无量纲
躁 体积平均速度,皂·泽原员
躁粤 组分粤的质量扩散通量,噪早·皂原圆·泽原员
躁匀 传热柯尔伯恩躁系数,无量纲
躁阅 传质柯尔伯恩躁系数,无量纲
运 稠度系数,晕·泽灶·皂原圆
运 湍流脉动动能的时均值,允
运贼 西弗特常数
噪 渗透率,皂圆
噪月 玻耳兹曼常数(越员援猿愿园远伊员园原圆猿允·运原员)
蕴藻 路易斯数,无量纲
蕴 特征长度,皂
蕴皂 普朗特混合长,皂
酝 质量,噪早
酝 动量,噪早·皂·泽原员
酝葬 马赫数,无量纲
酝粤 组分粤的摩尔质量,噪早·皂燥造原员
酝葬皂 磁马赫数,无量纲
皂 质量,噪早
晕粤 组分粤的摩尔通量,皂燥造·皂原圆·泽原员
晕枣 功率损失,宰
晕怎 努塞尔数,无量纲
灶粤 组分粤的质量通量,噪早·皂原圆·泽原员
责 压力(压强),晕·皂原圆或孕葬
孕 表面应力,晕·皂原圆
孕 润湿周长,皂
孕藻 贝克来数,无量纲
责皂 磁压强,孕葬
孕则 普朗特数,无量纲
孕则皂 磁普朗特数,无量纲
责粤 气体组分粤的分压,孕葬
责泽 表面附加压力,孕葬
匝 体积流量,皂猿·泽原员
匝 热流量,宰
匝 扩散激活能,噪早·允原员
匝 单位时间辐射能,宰
匝责 渗透激活能,噪早·允原员
择 电量,悦
择 热流通量,宰·皂原圆
择粤 两相界面上的热流通量,宰·皂原圆
择憎 表面热流通量,宰·皂原圆
砸 气体常数(越愿援猿员源允·(噪早·运)原员)
砸 单位体积离心惯性力,晕·皂原猿
砸 水力半径,皂
砸葬 瑞利数,无量纲
砸藻 雷诺数,无量纲
砸藻糟则 临界雷诺数,无量纲
砸蚤 理查德数,无量纲
砸皂 磁雷诺数,无量纲
砸皂 分子扩散阻力,泽·皂原员
砸泽 流线收缩热阻,皂圆·运·宰原员
砸t 穿过界面间隙的辐射热阻,皂圆·运·宰原员
砸λ 导热热阻,皂圆·运·宰原员
砸α 对流换热热阻,皂圆·宰·运原员

砸糟	接触热阻,运· 宰原员
则	半径,皂
则园	圆管内半径,皂
则粤	组分 粤的化学反应质量速率,噪早·皂原猿· 泽原员
杂	比重,无量纲
杂	内热源速率,允 皂原猿· 泽原员
杂	磁压数,无量纲
杂	滑速比,无量纲
杂	表面更新率,泽原员
杂	金属与气体处于平衡时的溶解度,皂猿噪早 皂原猿
泽	位移,皂
杂糟	施密特数,无量纲
杂澡	舍伍德数,无量纲
杂贼	斯坦顿数,无量纲
杂贼皂	传质斯坦顿数,无量纲
栽	绝对温度,运
栽肆	主流温度,运
栽早	气体温度,运
栽泽	表面温度,运
栽憎	壁面温度,运
贼	时间,泽
贼藻	渗透理论中体积元的平均寿命,泽
哉	比内能,允 噪早原员
怎	速度,皂· 泽原员
怎	质量平均速度,皂· 泽原员
怎忆	脉动速度,皂· 泽原员
怎肆	主流速度,皂· 泽原员
怎	阻力流速,皂· 泽原员
怎园	循环速度,皂· 泽原员
怎遭	流体中单颗粒的相对运动速度,皂· 泽原员
怎早躁	气体漂移速度,皂· 泽原员
怎造躁	液体漂移速度,皂· 泽原员
怎早蕴	气体扩散速度,皂· 泽原员
怎造蕴	液体扩散速度,皂· 泽原员
怎皂	摩尔平均速度,皂· 泽原员
怎皂葬曾	最大速度,皂· 泽原员
怎责	颗粒相对于器壁的上浮或沉降速度,皂· 泽原员
怎泽	滑移速度(相对速度),皂· 泽原员
怎贼	普朗特微团的脉动速度,皂· 泽原员
怎贼	颗粒沉降终速,皂· 泽原员
怎曾	在 曾方向的速度分量,皂· 泽原员
怎赠	在 赠方向的速度分量,皂· 泽原员
怎扎	在 扎方向的速度分量,皂· 泽原员
灾	体积,皂猿
增	(真实)比容,皂猿 · 噪早原员
增	平均流速,皂· 泽原员
增园	表观速度,皂· 泽原员
增粤	阿尔文波速,皂· 泽原员
增皂	流量比容(混合比容),皂猿 · 噪早原员
宰	单位体积的总质量力,晕· 皂原猿
宰	功率,宰
宰	质量流量,噪早· 泽原员
宰藻	韦伯数,无量纲
宰砸	单位质量阻力功,允 噪早原员
憎粤	组分 粤的质量分数,无量纲
曾	质量气流率,无量纲
曾粤	组分 粤的摩尔分数,无量纲
曾糟	层流到过渡层的过渡点,皂
曾藻	水力入口长度,皂
曾贼	热入口长度,皂
α	辐射吸收率,无量纲
α	热扩散系数,皂圆 · 泽原员
α	动能修正系数,无量纲
α	容积含气率,无量纲
α_{λ}	单色吸收率,无量纲
β	动量修正系数,无量纲
β	容积气流率,无量纲
$\beta_{贼}$	等温体压缩系数,孕葬原员
$\beta_{责}$	等压体膨胀系数,运原员
δ	厚度,皂
$\delta_{员}$	层流底层的名义厚度,皂
$\delta_{糟}$	浓度边界层厚度,皂
$\delta忆_{糟}$	等效浓度边界层厚度,皂

$\delta_{\text{贼}}$	温度边界层厚度，皂
ε	发射率，无量纲
ε	绝对介电常数，云·皂原员
ε_{λ}	单色发射率，无量纲
$\varepsilon_{\text{园}}$	真空介电常数（越愿援愿缘伊员园原员圆云·皂原员）
藻灶	恩氏黏度，无量纲
$\varepsilon_{\text{早}}$	气体的总发射率，无量纲
$\varepsilon_{\text{则}}$	相对介电常数，无量纲
ϕ_{μ}	黏性耗散函数，允·皂原猿·泽原员
$\phi_{\text{躁}}$	焦耳热产生速率，允·皂原猿·泽原员
Γ	扩散系数，皂圆·泽原员
$\Gamma_{\text{贼}}$	湍流扩散系数，皂圆·泽原员
γ	重度，晕·皂原猿
γ	汽化潜热，允·噪早原员
η	表观黏度，孕葬·泽
η	湍流强度，无量纲
$\eta_{\text{糟}}$	卡森黏度，孕葬·泽
$\eta_{\text{责}}$	塑性黏度，孕葬·泽
φ	颗粒体积分数，无量纲
κ	绝热指数，无量纲
κ	体积黏度，皂圆·泽原员
κ	热导率，宰·（皂·运）原员
$\kappa_{\text{园}}$	园益时的热导率，宰·（皂·运）原员
$\kappa_{\text{皂}}$	平均热导率，宰·（皂·运）原员
λ	波长，皂
λ	阻力系数，无量纲
λ	微分方程的特征值
$\lambda_{\text{皂}}$	单色辐射力峰值波长，皂
μ	动力黏度，孕葬·泽
$\mu_{\text{园}}$	园益时气体的运动黏度，皂圆·泽原员
$\mu_{\text{藻枣枣}}$	湍流有效黏性系数，孕葬·泽
$\mu_{\text{皂}}$	非缔合液体的黏度，孕葬·泽
$\mu_{\text{皂}}$	磁动力黏度系数，孕葬·泽
$\mu_{\text{憎}}$	圆园益、员园员援猿圆缘噪孕葬时水的动力黏度，孕葬·泽
θ	夹角，（毅）
θ	温度，无量纲
$\theta_{\text{栽}}$	过余温度，运
ρ	密度，噪早·皂原猿
ρ	辐射反射率，无量纲
ρ	（真实）密度，噪早·皂原猿
$\rho_{\text{粤}}$	组分粤的质量浓度，噪早·皂原猿
$\rho_{\text{葬}}$	圆园益、员园员援猿圆缘噪孕葬时空气的密度，噪早·皂原猿
$\rho_{\text{粤鄄}}$	组分粤的平均质量浓度，噪早·皂原猿
$\rho_{\text{粤泽}}$	组分粤在界面处的质量浓度，噪早·皂原猿
$\rho_{\text{藻园}}$	自由电荷的体密度，悦·皂原猿
$\rho_{\text{皂}}$	平均密度，噪早·皂原猿
$\rho_{\text{皂}}$	流量密度（混合密度），噪早·皂原猿
$\rho_{\text{憎}}$	圆园益、员园员援猿圆缘噪孕葬时水的密度，噪早·皂原猿
σ	正应力，晕·皂原圆
σ	电导率，杂·皂原员
$\sigma_{\text{泽}}$	表面张力，晕·皂原员
$\sigma_{\text{遭}}$	黑体的辐射常数（越缘援远苑伊员园原愿宰·皂原圆·运原源）
$\sigma_{\text{憎}}$	圆园益、员园员援猿圆缘噪孕葬时水的表面张力，晕·皂原员
τ	剪应力，晕·皂原圆
τ	辐射透射率，无量纲
$\tau_{\text{园}}$	屈服值，晕·皂原圆
$\tau_{\text{糟}}$	卡森屈服值，晕·皂原圆
$\tau_{\text{蚤}}$	两相的界面上的剪切力，晕·皂原圆
$\tau_{\text{赠曾}}$	黏性剪应力或动量通量，晕·皂原圆
ν	运动黏度，皂圆·泽原员
ν	跳跃频率，匀扎
$\nu_{\text{皂}}$	磁扩散系数，皂圆·泽原员
ω	立体角，泽则
ω	孔隙率，无量纲
ψ	流函数
ζ	局部阻力系数，无量纲

目录

1 传输过程的数学及物理基础 …… 1

1.1 标量、矢量与张量 …… 1

1.1.1 基本概念 …… 1

1.1.2 矢量和张量的基本运算 …… 2

1.2 场论 …… 5

1.2.1 场的概念 …… 5

1.2.2 稳定场的基本运算 …… 5

1.3 矩阵的初等变换与矩阵秩的求法 …… 10

1.4 相似原理 …… 10

1.4.1 相似概念 …… 10

1.4.2 相似三定律 …… 12

1.5 量纲分析 …… 13

1.5.1 量纲分析的白金汉法 …… 13

1.5.2 相似准数转换 …… 14

1.6 模型研究法 …… 14

1.7 正交函数 …… 15

1.8 变量分离求解法 …… 16

2 传输过程基本概念与基本定律 …… 17

2.1 动量传输基础 …… 17

2.1.1 流体与连续介质模型 …… 17

2.1.2 流体的主要物理性质 …… 18

2.1.3 流体的压缩性和膨胀性 …… 18

2.1.4 流体的黏性及牛顿黏性定律 …… 19

2.1.5 牛顿黏性定律的三维推广——斯托克斯黏度关系式 …… 23

2.1.6 运动流体描述 …… 23

2.1.7 流体分类 …… 26

2.1.8 作用在流体上的力 …… 27

2.2 热量传输基础 …… 28

2.2.1 传热基本方式与基本概念 …… 28

2.2.2 导热 …… 30

2.2.3 对流 …… 31

2.2.4 热辐射 …… 32
2.3 质量传输基础 …… 39
2.3.1 传质基本概念 …… 39
2.3.2 浓度、速度、扩散通量 …… 39
2.3.3 传质过程基本定律 …… 41
2.3.4 菲克第一定律及其三维推广 …… 42
2.3.5 扩散系数 …… 43
2.4 传输过程的相似性 …… 45

3 传输过程控制方程 …… 47

3.1 连续性方程 …… 47
3.1.1 连续性方程及其导出 …… 47
3.1.2 一维总流的连续性方程 …… 49
3.1.3 多元混合物流体中各组分的连续性方程 …… 49
3.2 运动方程 …… 51
3.2.1 N-S方程 …… 51
3.2.2 欧拉方程 …… 54
3.2.3 伯努利方程 …… 55
3.2.4 实际流体沿流线的伯努利方程 …… 56
3.2.5 稳定流的动量方程及其应用 …… 61
3.3 能量方程 …… 64
3.3.1 能量方程的导出 …… 64
3.3.2 能量方程的简化 …… 68
3.4 控制方程的准数形式 …… 70
3.5 运动方程、能量方程和质量传输微分方程的类比 …… 73

4 流体流动状态 …… 75

4.1 流动状态与流动阻力 …… 75
4.1.1 雷诺试验与雷诺数 …… 75
4.1.2 流动阻力分类 …… 76
4.2 层流流动 …… 77
4.2.1 层流流动的定解问题 …… 77
4.2.2 流体在等截面圆管内完全发展的层流流动 …… 78
4.2.3 流体在平行平板间的层流运动 …… 80
4.3 湍流流动 …… 81
4.3.1 湍流的起因及其基本特征 …… 81
4.3.2 湍流特征参量的描述与湍流流体微分方程组的时均化 …… 83
4.3.3 湍流流动的定解问题 …… 86
4.3.4 圆管中湍流流动的速度分布 …… 89

摇摇灏援缘援源摇湍流沿程损失基本关系式 …… 怨园
摇灏援远摇沿程阻力系数 λ 的确定 …… 怨员
摇摇灏援远援员摇水力光滑管与水力粗糙管 …… 怨员
摇摇灏援远援圆摇尼古拉茨试验 …… 怨员
摇灏援苑摇局部阻力 …… 怨圆
摇灏援愿摇边界层理论 …… 怨缘
摇摇灏援愿援员摇边界层概念及其微分方程 …… 怨缘
摇摇灏援愿援圆摇边界层积分方程及其解法 …… 员园员

缘摇电磁流体动力学 …… 员园远

摇缘援员摇电磁流体力学简介 …… 员园远
摇缘援圆摇电磁流体力学控制方程 …… 员园愿
摇摇缘援圆援员摇麦克斯韦方程组及其边界条件 …… 员园愿
摇摇缘援圆援圆摇运动流体的电磁感应方程 …… 员园怨
摇摇缘援圆援猿摇运动方程及能量方程 …… 员园怨
摇摇缘援圆援源摇电磁流体力学的边界条件 …… 员员园
摇摇缘援圆援缘摇磁应力与磁压强 …… 员员员
摇摇缘援圆援远摇无量纲化与特征数 …… 员员圆
摇摇缘援圆援苑摇磁场扩散与冻结 …… 员员猿

远摇两相流基础 …… 员员缘

摇远援员摇两相流流型 …… 员员缘
摇摇远援员援员摇流型的分类 …… 员员缘
摇摇远援员援圆摇流型的确定 …… 员员苑
摇远援圆摇两相流基本控制方程 …… 员圆员
摇摇远援圆援员摇气鄄液两相流 …… 员圆圆
摇摇远援圆援圆摇流体与固体颗粒两相流 …… 员圆远
摇摇远援圆援猿摇多孔介质中的流动 …… 员圆愿
摇远援猿摇两相流的无量纲化与准数方程 …… 员猿员

苑摇热量传输 …… 员猿猿

摇苑援员摇导热分析 …… 员猿猿
摇摇苑援员援员摇一维稳态导热 …… 员猿猿
摇摇苑援员援圆摇二维和三维稳态导热 …… 员猿苑
摇摇苑援员援猿摇一维非稳态导热 …… 员源园
摇摇苑援员援源摇二维和三维非稳态导热 …… 员源源
摇苑援圆摇对流换热 …… 员源远
摇摇苑援圆援员摇强制对流换热 …… 员源远
摇摇苑援圆援圆摇自然对流换热 …… 员缘源

7.3 辐射换热 ······ 155
  7.3.1 角系数与黑体间的辐射换热 ······ 155
  7.3.2 角系数的确定方法 ······ 157
  7.3.3 灰体间的辐射换热 ······ 159
  7.3.4 气体辐射 ······ 160
  7.3.5 辐射换热系数 ······ 163

8 质量传输 ······ 165

8.1 分子传质 ······ 165
  8.1.1 稳态分子传质 ······ 165
  8.1.2 非稳态分子传质 ······ 168
8.2 对流传质 ······ 169
  8.2.1 对流传质的重要准数 ······ 169
  8.2.2 圆管内的对流传质 ······ 171
  8.2.3 对流传质系数的关联式 ······ 171
  8.2.4 传质系数模型 ······ 172

9 传输过程的数值方法 ······ 175

9.1 数值方法的本质 ······ 175
  9.1.1 任务 ······ 175
  9.1.2 离散化的概念 ······ 176
  9.1.3 离散化方程的结构 ······ 176
9.2 推导离散化方程的方法 ······ 176
  9.2.1 泰勒级数公式 ······ 176
  9.2.2 变分公式 ······ 177
  9.2.3 加权余数法 ······ 177
  9.2.4 控制容积公式 ······ 178
9.3 稳态导热的离散方程 ······ 178
  9.3.1 一维稳态导热问题 ······ 178
  9.3.2 二维及三维稳态导热的离散方程 ······ 180
9.4 对流与扩散 ······ 182
  9.4.1 一维稳态对流与扩散方程 ······ 183
  9.4.2 上风方式 ······ 184
  9.4.3 精确解 ······ 186
  9.4.4 指数方程 ······ 186

参考文献 ······ 188

员援 传输过程的数学及物理基础

员援员 标量、矢量与张量

员援员援员 基本概念

物理量可以分为标量、矢量和张量三类。标量是在空间没有取向的物理量，只有一个数即可表示其状态。如质量、体积、压强、密度、温度、能量等均为标量。矢量则为在空间有一定取向的物理量，它有大小和方向，如速度、力、电磁场强度等均为矢量。在三维空间中，矢量有三个分量。若直角坐标系的三个坐标轴分别为 员、圆和 猿，$\text{藻}_{\text{员}}$、$\text{藻}_{\text{圆}}$和 $\text{藻}_{\text{猿}}$为对应方向的单位矢量，矢量 憎的三个分矢量分别为 $\text{憎}_{\text{员}}$、$\text{憎}_{\text{圆}}$和 $\text{憎}_{\text{猿}}$，矢量和分矢量的大小分别为 憎、$\text{憎}_{\text{员}}$、$\text{憎}_{\text{圆}}$和 $\text{憎}_{\text{猿}}$，则：

$$\text{憎} \text{越} \text{憎}_{\text{员}} \text{垣} \text{憎}_{\text{圆}} \text{垣} \text{憎}_{\text{猿}} \text{越} \text{憎}_{\text{员}}\text{藻}_{\text{员}} \text{垣} \text{憎}_{\text{圆}}\text{藻}_{\text{圆}} \text{垣} \text{憎}_{\text{猿}}\text{藻}_{\text{猿}} \qquad (\text{员援员})$$

也可表示为：

$$\text{憎} \text{越} (\text{憎}_{\text{员}}, \text{憎}_{\text{圆}}, \text{憎}_{\text{猿}}) \qquad (\text{员援圆})$$

其中：

$$\text{憎} \text{越} (\text{憎}_{\text{员}}^{\text{圆}} \text{垣} \text{憎}_{\text{圆}}^{\text{圆}} \text{垣} \text{憎}_{\text{猿}}^{\text{圆}})^{\frac{\text{员}}{\text{圆}}} \qquad (\text{员援猿})$$

任何物理量均可看成张量，其中，标量为零阶张量，矢量为一阶张量。一般所说的张量为二阶张量。二阶张量 $\boldsymbol{\tau}$ 有 怨个分量，用 $\tau_{\text{蚤躁}}$表示。$\boldsymbol{\tau}$ 用矩阵表示为：

$$\boldsymbol{\tau} \text{越} \begin{bmatrix} \tau_{\text{员员}} & \tau_{\text{员圆}} & \tau_{\text{员猿}} \\ \tau_{\text{圆员}} & \tau_{\text{圆圆}} & \tau_{\text{圆猿}} \\ \tau_{\text{猿员}} & \tau_{\text{猿圆}} & \tau_{\text{猿猿}} \end{bmatrix} \qquad (\text{员援源})$$

其中，蚤越躁的分量为对角元素，蚤≠躁的为非对角元素。其对角元素之和为张量的迹，即 贼则 $\text{越}\sum_{\text{蚤}} \tau_{\text{蚤蚤}}$。

张量 τ 的转置为：

$$\boldsymbol{\tau}^{\text{栽}} \text{越} \begin{bmatrix} \tau_{\text{员员}} & \tau_{\text{圆员}} & \tau_{\text{猿员}} \\ \tau_{\text{员圆}} & \tau_{\text{圆圆}} & \tau_{\text{猿圆}} \\ \tau_{\text{员猿}} & \tau_{\text{圆猿}} & \tau_{\text{猿猿}} \end{bmatrix} \qquad (\text{员援缘})$$

若 $\boldsymbol{\tau}$ 越 $\boldsymbol{\tau}^{\text{栽}}$，则 $\boldsymbol{\tau}$ 为对称张量；若 $\boldsymbol{\tau}$ 越原 $\boldsymbol{\tau}^{\text{栽}}$，则为反对称张量。对角元素均为 员，非对角元素均为 园的张量为单位张量，记为 δ 越 $[\delta_{\text{蚤躁}}]$。其中，标量 $\delta_{\text{蚤躁}}$为克罗内克（运则燥灶藻糟噪藻则）符号，蚤越躁时为 员，蚤≠躁时为 园。任何一个张量均可以写成对称张量与反对称张量两部分之和，即：

$$\tau \text{ 越} \frac{员}{圆}(\tau \text{ 垣} \tau^{栽}) \text{ 垣} \frac{员}{圆}(\tau \text{ 原} \tau^{栽}) \qquad (员原圆园)$$

员援圆援圆摇矢量和张量的基本运算

员援圆援圆援员摇矢量加减与乘法运算

矢量加（减）法为对应分量之和（差），即：

$$粤 依 月 \text{ 越} \sum_{蚤} 藻_{蚤} 粤_{蚤} 依 \sum_{蚤} 藻_{蚤} 月_{蚤} \text{ 越} \sum_{蚤} 藻_{蚤}(粤_{蚤} 依 月_{蚤}) \qquad (员原圆员)$$

矢量加法满足下列运算规律：

$$粤 垣 月 \text{ 越} 月 垣 粤 \text{摇(交换律)} \qquad (员原圆圆)$$

$$(粤 垣 月) 垣 悦 \text{ 越} 粤 垣 (月 垣 悦) \text{ 摇(结合律)} \qquad (员原圆猿)$$

$$粤 垣 园 \text{ 越} 园 垣 粤 \text{ 越} 粤 \qquad (员原圆源)$$

$$粤 垣 (原粤) \text{ 越} (原粤) 垣 粤 \text{ 越} 园 \qquad (员原圆缘)$$

一标量与一矢量的乘积仍为一矢量，其方向不变：

$$糟粤 \text{ 越} 糟 \sum_{蚤} 藻_{蚤} 粤_{蚤} \text{ 越} \sum_{蚤} 藻_{蚤}(糟粤_{蚤}) \qquad (员原圆远)$$

两矢量点乘的结果为一标量，称为标量积（或数量积）：

$$粤 \cdot 月 \text{ 越} 粤月 糟燥泽\alpha \qquad (员原圆苑)$$

式中，α 为两矢量的夹角。

单位矢量之间的标量积为克罗内克符号 $\delta_{蚤躁}$，即 $藻_{蚤} \cdot 藻_{躁}$ 越 $\delta_{蚤躁}$。两矢量点乘的标量积为两矢量对应分量大小乘积之和：

$$粤 \cdot 月 \text{ 越} \left(\sum_{蚤} 藻_{蚤} 粤_{蚤}\right) \cdot \left(\sum_{躁} 藻_{躁} 月_{躁}\right) \text{ 越} \sum_{蚤} \sum_{躁} (藻_{蚤} \cdot 藻_{躁}) 粤_{蚤} 月_{躁} \text{ 越} \sum_{蚤} \sum_{躁} \delta_{蚤躁} 粤_{蚤} 月_{躁} \text{ 越} \sum_{蚤} 粤_{蚤} 月_{蚤}$$

摇(员原圆愿)

可见，点乘满足交换律，即 粤 · 月 越 月 · 粤。

两矢量叉乘的结果为一矢量，称为矢量积（或向量积）：

$$悦 \text{ 越} 粤 伊 月 \qquad (员原圆怨)$$

其中矢量 悦 的大小为 悦 越 粤月 泽蚤灶α，方向为垂直于 粤 和 月 两矢量所确定的平面，并满足右手定则（见图 员原员）。矢量叉乘不满足交换律：

$$粤 伊 月 \text{ 越} 原(月 伊 粤) \qquad (员原猿园)$$

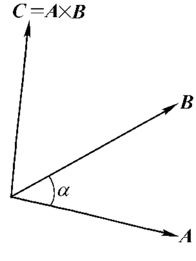

图 员原员摇矢量叉乘

叉乘运算可以表示为：

$$粤 伊 月 \text{ 越} \sum_{蚤} 藻_{蚤} 粤_{蚤} 伊 \sum_{躁} 藻_{躁} 月_{躁} \text{ 越} \sum_{蚤} \sum_{躁} (藻_{蚤} 伊 藻_{躁}) 粤_{蚤} 月_{躁} \text{ 越} \sum_{蚤} \sum_{躁} \sum_{噪} \varepsilon_{蚤躁噪} 藻_{噪} 粤_{蚤} 月_{躁}$$

$$\text{越} \sum_{蚤} \sum_{躁} \sum_{噪} \varepsilon_{蚤躁噪} 藻_{噪} 粤_{蚤} 月_{躁} \text{ 越} \begin{vmatrix} 藻_{员} & 藻_{圆} & 藻_{猿} \\ 粤_{员} & 粤_{圆} & 粤_{猿} \\ 月_{员} & 月_{圆} & 月_{猿} \end{vmatrix} \qquad (员原猿员)$$

式中，$\varepsilon_{\text{蚤躁噪}}$为交错单位张量（勒维要契维塔符号），是 藻$_{\text{躁}}$和 藻$_{\text{噪}}$的矢量积在 藻$_{\text{蚤}}$方向上的分量，可写成：

$$\varepsilon_{\text{蚤躁噪}}\ \text{越}\ \text{藻}_{\text{蚤}}\cdot\text{藻}_{\text{躁}}\ \text{伊}\ \text{藻}_{\text{噪}}\ \text{越}\begin{cases}\text{垣员}\ \text{蚤躁噪越员圆猿，圆猿员，猿员圆}\\ \text{原员}\ \text{蚤躁噪越猿圆员，圆员猿，员猿圆}\\ \text{园摇蚤、躁、噪中任两项相等}\end{cases}\qquad(\text{员援缘})$$

且有如下关系式成立：

$$\sum_{\text{躁}}\sum_{\text{噪}}\varepsilon_{\text{蚤躁噪}}\varepsilon_{\text{灶躁噪}}\ \text{越圆}\delta_{\text{蚤灶}},\ \sum_{\text{噪}}\varepsilon_{\text{蚤躁噪}}\varepsilon_{\text{造皂噪}}\ \text{越}\delta_{\text{蚤造}}\delta_{\text{躁皂}}\ \text{原}\delta_{\text{蚤皂}}\delta_{\text{躁造}}\qquad(\text{员援远})$$

两矢量并矢的结果为一张量，称为并矢量，其分量为两矢量的分量之积，即：

$$\text{粤月}\ \text{越}\begin{bmatrix}\text{粤}_{\text{员}}\text{月}_{\text{员}} & \text{粤}_{\text{员}}\text{月}_{\text{圆}} & \text{粤}_{\text{员}}\text{月}_{\text{猿}}\\ \text{粤}_{\text{圆}}\text{月}_{\text{员}} & \text{粤}_{\text{圆}}\text{月}_{\text{圆}} & \text{粤}_{\text{圆}}\text{月}_{\text{猿}}\\ \text{粤}_{\text{猿}}\text{月}_{\text{员}} & \text{粤}_{\text{猿}}\text{月}_{\text{圆}} & \text{粤}_{\text{猿}}\text{月}_{\text{猿}}\end{bmatrix}\qquad(\text{员援苑})$$

利用单位并矢量 藻$_{\text{蚤}}$藻$_{\text{躁}}$，张量 $\boldsymbol{\tau}$ 可以写成：

$$\boldsymbol{\tau}\ \text{越}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{躁}}\text{藻}_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{躁}}\tau_{\text{蚤躁}}\qquad(\text{员援愿})$$

矢量混合积为一标量，即：

$$\text{粤}\cdot(\text{月伊悦})\ \text{越}\sum_{\text{蚤}}\text{粤}_{\text{蚤}}(\text{月伊悦})_{\text{蚤}}\ \text{越}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{躁}}\sum_{\text{噪}}(\varepsilon_{\text{蚤躁噪}}\text{粤}_{\text{蚤}}\text{月}_{\text{躁}}\text{悦}_{\text{噪}})\ \text{越}\begin{vmatrix}\text{粤}_{\text{员}} & \text{粤}_{\text{圆}} & \text{粤}_{\text{猿}}\\ \text{月}_{\text{员}} & \text{月}_{\text{圆}} & \text{月}_{\text{猿}}\\ \text{悦}_{\text{员}} & \text{悦}_{\text{圆}} & \text{悦}_{\text{猿}}\end{vmatrix}$$

摇摇（员援怨）

可以证明：

$$\text{粤}\cdot(\text{月伊悦})\ \text{越悦}\cdot(\text{粤伊月})\ \text{越月}\cdot(\text{悦伊粤})\ \text{越原粤}\cdot(\text{悦伊月})$$

$$\text{越原粤}\cdot(\text{悦伊月})\ \text{越原悦}\cdot(\text{月伊粤})\ \text{越原月}\cdot(\text{粤伊悦})\qquad(\text{员援员园})$$

$$\text{粤伊}(\text{月伊悦})\ \text{越}(\text{粤}\cdot\text{悦})\text{月原}(\text{粤}\cdot\text{月})\text{悦}\qquad(\text{员援员员})$$

$$\text{粤伊月伊悦越}(\text{粤}\cdot\text{悦})\text{月原}(\text{月}\cdot\text{悦})\text{粤}\qquad(\text{员援员圆})$$

$$(\text{粤伊月})\cdot(\text{悦伊阅})\ \text{越}(\text{粤}\cdot\text{悦})(\text{月}\cdot\text{阅})\ \text{原}(\text{粤}\cdot\text{阅})(\text{月}\cdot\text{悦})\qquad(\text{员援员猿})$$

$$(\text{粤伊月})\ \text{伊}(\text{悦伊阅})\ \text{越}(\text{粤伊月}\cdot\text{阅})\text{悦原}(\text{粤伊月}\cdot\text{悦})\text{阅}\qquad(\text{员援员源})$$

$$(\text{粤月})\cdot\text{悦越粤}(\text{月}\cdot\text{悦})\ \text{越}(\text{月}\cdot\text{悦})\text{粤}\qquad(\text{员援员缘})$$

$$\text{悦}\cdot(\text{粤月})\ \text{越}(\text{悦}\cdot\text{粤})\text{月}\qquad(\text{员援员远})$$

$$(\text{粤月})\cdot(\text{悦阅})\ \text{越}(\text{月}\cdot\text{悦})\text{粤阅，摇}(\text{悦阅})\cdot(\text{粤月})\ \text{越}(\text{阅}\cdot\text{粤})\text{悦月}\qquad(\text{员援员苑})$$

对单位矢量有：

$$\text{藻}_{\text{蚤}}\cdot\text{藻}_{\text{躁}}\ \text{越}\delta_{\text{蚤躁}}，\text{摇藻}_{\text{蚤}}\cdot\text{藻}_{\text{躁}}\text{藻}_{\text{噪}}\ \text{越}\delta_{\text{蚤躁}}\text{藻}_{\text{噪}}，\text{摇藻}_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{躁}}\cdot\text{藻}_{\text{噪}}\text{藻}_{\text{造}}\ \text{越}\delta_{\text{躁噪}}\text{藻}_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{造}}\qquad(\text{员援员愿})$$

员援圆援猿摇张量的加减与乘法运算

同阶张量可相加（减），其和（差）仍为张量：

$$\boldsymbol{\sigma}\ \text{依}\ \boldsymbol{\tau}\ \text{越}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{躁}}\text{藻}_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{躁}}\sigma_{\text{蚤躁}}\text{依}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{躁}}\text{藻}_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{躁}}\tau_{\text{蚤躁}}\text{越}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{躁}}\text{藻}_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{躁}}(\sigma_{\text{蚤躁}}\text{依}\tau_{\text{蚤躁}}) \qquad (\text{员援苑猿})$$

可见，张量加法服从交换律和结合律。

一标量与一张量相乘结果仍为一张量：

$$\text{泽}\boldsymbol{\tau}\ \text{越泽}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{躁}}\text{藻}_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{躁}}\tau_{\text{蚤躁}}\text{越}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{躁}}\text{藻}_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{躁}}(\text{泽}\tau_{\text{蚤躁}}) \qquad (\text{员援苑源})$$

一矢量对一张量的点乘为一矢量：

$$\text{粤}\cdot\boldsymbol{\tau}\ \text{越}\left(\sum_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{蚤}}\text{粤}_{\text{蚤}}\right)\cdot\left(\sum_{\text{躁}}\sum_{\text{噪}}\text{藻}_{\text{躁}}\text{藻}_{\text{噪}}\tau_{\text{躁噪}}\right)\text{越}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{躁}}\sum_{\text{噪}}(\text{藻}_{\text{蚤}}\cdot\text{藻}_{\text{躁}})\text{藻}_{\text{噪}}\text{粤}_{\text{蚤}}\tau_{\text{躁噪}}$$

$$\text{越}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{躁}}\sum_{\text{噪}}\delta_{\text{蚤躁}}\text{藻}_{\text{噪}}\text{粤}_{\text{蚤}}\tau_{\text{躁噪}}\text{越}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{噪}}\text{藻}_{\text{噪}}\text{粤}_{\text{蚤}}\tau_{\text{蚤噪}}\text{越}\sum_{\text{噪}}\text{藻}_{\text{噪}}\left(\sum_{\text{蚤}}\text{粤}_{\text{蚤}}\tau_{\text{蚤噪}}\right) \qquad (\text{员援苑缘})$$

即，矢量 $\text{粤}\cdot\boldsymbol{\tau}$ 的第 噪个分量为 $\sum_{\text{蚤}}\text{粤}_{\text{蚤}}\tau_{\text{蚤噪}}$。同理，张量对矢量的点乘为 $\boldsymbol{\tau}\cdot\text{粤}\text{越}\sum_{\text{噪}}\text{藻}_{\text{噪}}\left(\sum_{\text{蚤}}\tau_{\text{噪蚤}}\text{粤}_{\text{蚤}}\right)$。若 $\boldsymbol{\tau}$ 为对称张量，则 $\text{粤}\cdot\boldsymbol{\tau}\ \text{越}\boldsymbol{\tau}\cdot\text{粤}$，否则 $\text{粤}\cdot\boldsymbol{\tau}\neq\boldsymbol{\tau}\cdot\text{粤}$。可见矢量和张量的点乘服从分配律：

$$\text{粤}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\ \text{垣}\boldsymbol{\tau})\ \text{越粤}\cdot\boldsymbol{\sigma}\ \text{垣粤}\cdot\boldsymbol{\tau} \qquad (\text{员援苑远})$$

$$\boldsymbol{\tau}\cdot(\text{粤垣月})\ \text{越}\boldsymbol{\tau}\cdot\text{粤垣}\boldsymbol{\tau}\cdot\text{月} \qquad (\text{员援苑苑})$$

两张量的点乘分单点乘和双点乘两种。两张量单点乘的结果仍为一张量：

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau}\ \text{越}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{躁}}\text{藻}_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{躁}}\sigma_{\text{蚤躁}}\cdot\sum_{\text{噪}}\sum_{\text{造}}\text{藻}_{\text{噪}}\text{藻}_{\text{造}}\tau_{\text{噪造}}\text{越}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{躁}}\sum_{\text{噪}}\sum_{\text{造}}(\text{藻}_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{躁}}\cdot\text{藻}_{\text{噪}}\text{藻}_{\text{造}})\sigma_{\text{蚤躁}}\tau_{\text{噪造}}$$

$$\text{越}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{躁}}\sum_{\text{噪}}\sum_{\text{造}}\delta_{\text{躁噪}}\text{藻}_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{造}}\sigma_{\text{蚤躁}}\tau_{\text{噪造}}\text{越}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{躁}}\sum_{\text{造}}\text{藻}_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{造}}\sigma_{\text{蚤躁}}\tau_{\text{躁造}}\text{越}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{造}}\text{藻}_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{造}}\left(\sum_{\text{躁}}\sigma_{\text{蚤躁}}\tau_{\text{躁造}}\right)$$

$$(\text{员援苑愿})$$

可见张量的单点乘服从分配律，不服从交换律。两张量双点乘的结果为一标量：

$$\boldsymbol{\sigma}\ \text{颐}\ \boldsymbol{\tau}\ \text{越}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{躁}}\text{藻}_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{躁}}\sigma_{\text{蚤躁}}\text{颐}\sum_{\text{噪}}\sum_{\text{造}}\text{藻}_{\text{噪}}\text{藻}_{\text{造}}\tau_{\text{噪造}}\text{越}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{躁}}\sum_{\text{噪}}\sum_{\text{造}}(\text{藻}_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{躁}}\text{颐}\text{藻}_{\text{噪}}\text{藻}_{\text{造}})\sigma_{\text{蚤躁}}\tau_{\text{噪造}}$$

$$\text{越}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{躁}}\sum_{\text{噪}}\sum_{\text{造}}\delta_{\text{躁噪}}\delta_{\text{蚤造}}\sigma_{\text{蚤躁}}\tau_{\text{噪造}}\text{越}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{躁}}\sigma_{\text{蚤躁}}\tau_{\text{躁蚤}} \qquad (\text{员援苑怨})$$

两个并矢的双点乘是指把它们最邻近的矢量两两缩并：

$$\text{粤月颐悦阅}\ \text{越}(\text{月}\cdot\text{悦})(\text{粤}\cdot\text{阅}) \qquad (\text{员援愿园})$$

$$\text{藻}_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{躁}}\text{颐}\text{藻}_{\text{噪}}\text{藻}_{\text{造}}\ \text{越}\delta_{\text{躁噪}}\delta_{\text{蚤造}} \qquad (\text{员援愿员})$$

员援苑援猿摇矢量的微分运算

矢量微分算符 ∇在直角坐标系中定义为：

$$\nabla\ \text{越藻}_{\text{曾}}\frac{\partial}{\partial\text{曾}}\ \text{垣藻}_{\text{赠}}\frac{\partial}{\partial\text{赠}}\ \text{垣藻}_{\text{扎}}\frac{\partial}{\partial\text{扎}}\ \text{越}\sum_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{蚤}}\frac{\partial}{\partial\text{曾}_{\text{蚤}}} \qquad (\text{员援愿圆})$$

也称为哈密顿（匀葬皂蚤造贼燥灶）算符或那勃勒（灶葬遭造葬）算符，相当于一个矢量。该算符必须遵守矢量和微分的规则，且必须作用于一个标量或矢量来运算。

两个哈密顿算符的点乘为拉普拉斯（蕴葬责造葬糟藻）算符 $\nabla^{\text{圆}}$。它相当于一个标量。在直角坐标系中：

$$\nabla^{\text{圆}}\text{越}\nabla\cdot\nabla\text{越}\left(\sum_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{蚤}}\cdot\frac{\partial}{\partial\text{曾}_{\text{蚤}}}\right)\left(\sum_{\text{躁}}\text{藻}_{\text{躁}}\cdot\frac{\partial}{\partial\text{曾}_{\text{躁}}}\right)\text{越}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{躁}}\text{藻}_{\text{蚤}}\cdot\text{藻}_{\text{躁}}\frac{\partial^{\text{圆}}}{\partial\text{曾}_{\text{蚤}}\partial\text{曾}_{\text{躁}}}$$

$$\text{越}\sum_{\text{蚤}}\sum_{\text{躁}}\delta_{\text{蚤躁}}\frac{\partial^{\text{圆}}}{\partial\text{曾}_{\text{蚤}}\partial\text{曾}_{\text{躁}}}\text{越}\sum_{\text{蚤}}\frac{\partial^{\text{圆}}}{\partial\text{曾}_{\text{蚤}}^{\text{圆}}}\qquad\text{（员援圆缘）}$$

作用于标量 φ：

$$\nabla^{\text{圆}}\varphi\text{越}\sum_{\text{蚤}}\frac{\partial^{\text{圆}}\varphi}{\partial\text{曾}_{\text{蚤}}^{\text{圆}}}\text{越}\frac{\partial^{\text{圆}}\varphi}{\partial\text{曾}^{\text{圆}}}\text{垣}\frac{\partial^{\text{圆}}\varphi}{\partial\text{赠}^{\text{圆}}}\text{垣}\frac{\partial^{\text{圆}}\varphi}{\partial\text{扎}^{\text{圆}}}$$

可见，其结果为一标量；作用于矢量 憎：

$$\nabla^{\text{圆}}\text{憎}\text{越}\nabla^{\text{圆}}\cdot\left(\sum_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{蚤}}\text{憎}_{\text{蚤}}\right)\text{越}\sum_{\text{蚤}}\text{藻}_{\text{蚤}}(\nabla^{\text{圆}}\text{憎}_{\text{蚤}})\text{越}\text{蚤}\nabla^{\text{圆}}\text{憎}_{\text{曾}}\text{垣}\text{躁}\nabla^{\text{圆}}\text{憎}_{\text{赠}}\text{垣}\text{噪}\nabla^{\text{圆}}\text{憎}_{\text{扎}}\qquad\text{（员援圆远）}$$

即对各分量求导，并作矢量和，结果仍然为矢量。

员援猿摇场论

员援猿援员摇场的概念

物理量在空间分布叫做场。若空间或空间区域 阅的所有点，均对应着某个物理量的一个确定值，则称在 阅上确定了该物理量的一个场。根据物理量不同，场可分为标量场，（如温度场 栽（曾，赠，扎）、密度场 ρ（曾，赠，扎）、浓度场 糟（曾，赠，扎）、电势场 哉（曾，赠，扎）等）、矢量场（如速度场 怎（曾，赠，扎）、电场 耘（曾，赠，扎）、磁场 月（曾，赠，扎）、力场 云（曾，赠，扎）等）和张量场（如应力场 $\boldsymbol{\tau}$（曾，赠，扎）等）。若场中各点处的物理量是时间和空间位置（坐标）的函数，则为不稳定场；若只是空间位置的函数，则为稳定场。若物理量与空间位置无关则为均匀场，反之为不均匀场。

员援猿援圆摇稳定场的基本运算

员援猿援圆援员摇标量场的梯度

对直角坐标系中的标量场 φ 越 φ（曾，赠，扎），定义 φ 越 悦（常数）的所有点组成的曲面为等值面。方向导数描述了场中该标量函数沿某个方向变化速率的大小。如图 员援猿所示，设 酝（曾，赠，扎）为场内任一点，造为自 酝的任一射线，方向余弦为 糟燥泽 α、糟燥泽 β 和 糟燥泽 γ。酝忆为 造上邻近 酝的一点，两点距离为 Δ造，标量场 φ 在点 酝沿 造方向的导数定义为：

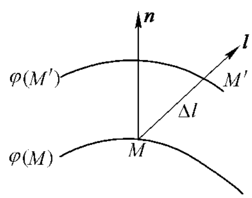

图 员援猿摇方向导数

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\text{造}}\text{越}\lim_{\Delta\text{造}\to\text{园}}\frac{\varphi(\text{酝忆})\text{原}\varphi(\text{酝})}{\Delta\text{造}}\qquad\text{（员援圆苑）}$$

其中：

$$\varphi(\text{酝忆})\text{越}\varphi(\text{曾垣}\Delta\text{曾，赠垣}\Delta\text{赠，扎垣}\Delta\text{扎})\text{越}\varphi(\text{曾，赠，扎})\text{垣}\frac{\partial\varphi}{\partial\text{曾}}\Delta\text{曾垣}\frac{\partial\varphi}{\partial\text{赠}}\Delta\text{赠垣}\frac{\partial\varphi}{\partial\text{扎}}\Delta\text{扎垣}\omega\Delta\text{造}$$

（员援圆愿）