第 1 章
绪　　论

以过程工业为对象研究传递现象是在化工原理或单元操作的基础上，进一步综合其中有关动量、热量和质量传递的共同规律而发展起来的一门课程。它的形成和出现标志着化学工程学科发展到了一个新的高度。

20 世纪初，人们逐渐认识到各工艺过程中存在着通用的物理过程的共性。20 世纪 20 年代，美国麻省理工学院的一些学者提出不管化工生产的工艺如何千差万别，它们在很多典型设备中进行着原理相同的物理过程。这一新见解在 1922 年美国化学工程师学会年会上得到公认，从而引出了“单元操作”(unit operation)的概念。例如，无论在制糖还是在化肥工业中，从溶液中蒸发液体所遵循的原理是相同的，于是蒸发成为最早提出的单元操作之一。成为单元操作的还有流体流动、传热、干燥、吸收、萃取、结晶、过滤等。以这些单元操作作为研究和学习的主要内容，是化学工程学科在 20 世纪前半期发展的基本情况。化工单元操作的理论成为迅速发展化学工业的重要基石。可以认为单元操作是化学工程学科发展中的第一个概括。

当单元操作被了解得更加深入以后，人们发现各单元操作之间存在着共性。过滤只是流体流动的一个特例；蒸发是传热的一种形式；萃取、吸收都包含着质量的传递；干燥和蒸馏则是传热与传质同时进行的操作。于是，单元操作可以看成是传热、传质及流体流动的特殊情况或特定组合。作为单元操作的基础——流体流动同传热和传质一样，也被视为一种传递现象，这是因为在真实流体流动时，必然存在着动量传递。进一步又发现了动量传递、热量传递和质量传递之间具有类似性。因此，20 世纪中期以来，人们开始用统一的观点来研究上述 3 种传递现象，并求出其相互关系。1960 年美国威斯康辛大学的 R. B. Bird 等人出版了《Transport Phenomena》一书，首次把 3 种传递现象用统一的观点来处理，力图阐明这 3 种传递过程之间在定性和定量描述以及计算上的相似性。这对于学生更深入理解传递过程的机理是十分有意义的。它不仅对化学工程学科的发展起着重要

的作用，也成为许多工程专业必修的专业基础课。

1-1　3 种传递现象的类比

当物系中存在速度、温度和浓度梯度时，则发生动量、热量和质量传递。动量、热量和质量的传递，既可以是由分子的微观运动引起的分子扩散，也可以是由旋涡混合造成的流体微团的宏观运动引起的湍流传递。

1-1-1　分子传递性质

流体的粘性、热传导性和质量扩散通称为流体的分子传递性质。从微观上来考虑，这些性质分别是非均匀流场中分子不规则运动这同一过程所引起的动量、热量和质量传递的结果。当流场中速度分布不均匀时，分子传递的结果产生剪切应力；而温度分布不均匀时，分子传递的结果产生热传导；在多组分的混合流体中，如果某种组分的浓度分布不均匀，分子传递的结果便引起该组分的质量扩散。描述上述 3 种传递过程的物理定律分别是牛顿粘性定律、傅里叶定律和费克定律。

1. 牛顿粘性定律

牛顿(Newton)在 1687 年第一个对最简单的剪切运动作了一个著名的实验，并建立了切向应力和剪切变形之间的关系。考虑两块面积均为 A、板间距为 y 的平行平板间充满粘性流体的流体运动。设想该系统原先处于静止状态，但在时间 $t=0$ 时，让下面一块平板以恒定速度 u 在沿 x 方向运动。随着时间的推移，流体获得了动能，并最终建立起如图 1-1 所示的稳态速度分布。当达到这一最终的稳态时，欲使下板维持运动，必须有一恒定力 F 作用其上，如果流型为层流，这个力可以用下式表示：

$$\frac{F}{A}=\mu\frac{u}{y} \tag{1-1}$$

这就是说，作用于单位面积上的力正比于在距离 y 内流体速度的减少值，该比例系数 μ 称为流体的粘度。如果相邻两层流体的间距为 dy，速度 u 在 x 方向上的分量分别为 u_x 和 u_x-du_x，则式(1-1)可改写为

$$\tau_{yx}=-\mu\frac{du_x}{dy} \tag{1-2}$$

上式说明，单位面积上的剪切力与局部速度梯度的负值成正比，这就是著名的牛顿粘性定律(Newton's Viscosity Law)的数学表达式，它表明剪切应力和剪切变形速度之间的关系。凡服从牛顿粘性定律的流体称为牛顿型流体。所有的气体和大多数的低相对分子质量液体均属牛顿型流体。

式中，τ_{yx}——剪应力或动量通量，N/m^2；

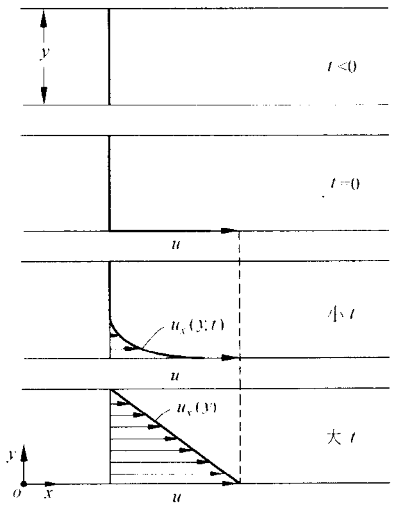

图 1-1　介于两平板间的流体稳态层流速度分布的建立

μ——粘度或称动力粘度，Pa·s；

$\mathrm{d}u_x/\mathrm{d}y$——速度梯度或称剪切速率，$\frac{1}{\mathrm{s}}$；

y——垂直于运动方向的坐标，m。

负号表示动量通量的方向与速度梯度的方向相反，即动量通量是沿着速度降低的方向传递的。现定义粘度除以流体的密度 ρ 所得的量为运动粘度（或称动量扩散系数），即

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{1-3}$$

式中，ν——流体的运动粘度（或称动量扩散系数），$\mathrm{m^2/s}$；

ρ——流体的密度，$\mathrm{kg/m^3}$。

于是，式(1-2)可以改写为

$$\tau_{yx} = -\nu\frac{\mathrm{d}(\rho u_x)}{\mathrm{d}y} \tag{1-4}$$

其物理意义为

x方向上的动量在 y 方向上的通量 =

−（动量扩散系数）×（y 方向上的动量浓度梯度）

式中 τ_{yx} 当它表示动量通量时，第一个下标表示动量的传递方向（y），第二个下标表示动量的方向（x）；当它表示剪切应力时，第一个下标表示剪切应力作用面的外法线方向（y），第二个下标表示剪切应力的作用方向（x）。显然，动量的传递方向（动量通量的方向）与剪切应力的作用方向相互垂直。式中负号表示 u_x随 y 的增加而

减少。

粘度是流体的物理性质，它与物系的温度、压力和组成有关。高密度气体的粘度随压力的升高而增加，低密度气体的粘度与压力无关；液体的粘度则随温度的升高而降低。在相同温度下，所有液体的粘度均比组成与之相同的气体的粘度大。

运动粘度用分子运动论导出。设两层相邻气体分别以 u_{x1} 和 u_{x2} 的速度运动，它们之间的距离等于分子平均自由程 λ，如图 1-2 所示。若单位体积气体中的分子数为 n 并近似地假定其中的 1/3 垂直于气体层在 y 方向运动，分子平均速度为 v，每个气体分子的质量为 m，则单位时间内经过单位面积交换的分子数为 $\frac{1}{3}nv$。这些分子传递的动量为

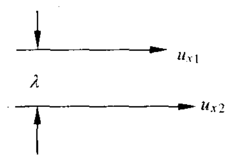

图 1-2　气体分子碰撞后发生动量交换

$$\tau_{xy} = \frac{n}{3} vm(u_{x2} - u_{x1}) \tag{1-5}$$

由于分子平均自由程 λ 很小，所以 $(u_{x2} - u_{x1})/\lambda$ 可以近似地用 $\mathrm{d}u_x/\mathrm{d}y$ 代替，即

$$u_{x2} - u_{x1} = \lambda \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}y}$$

又因为密度 $\rho = nm$，将以上关系式代入式(1-5)，得

$$\tau_{xy} = \frac{\rho}{3} v\lambda \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{3} v\lambda \frac{\mathrm{d}(\rho u_x)}{\mathrm{d}y} \tag{1-6}$$

比较式(1-4)和式(1-6)，不计负号，得

$$\nu = \frac{1}{3} v\lambda \tag{1-7}$$

2. 傅里叶定律

在均匀的各向同性材料的一维温度场中，通过导热方式传递的热量通量密度为

$$q = -k \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y} \tag{1-8}$$

这一方程式 1822 年由法国数学-物理学家傅里叶（Fourier）首先提出。对于恒定 ρc_p 的流体，

$$q = -\frac{k}{\rho c_p} \frac{\mathrm{d}(\rho c_p T)}{\mathrm{d}y} = -\alpha \frac{\mathrm{d}(\rho c_p T)}{\mathrm{d}y} \tag{1-9}$$

式中，y——温度变化方向的坐标，m；

q——热量通量密度或能量通量密度，表示单位时间内通过单位面积传递的热量，$\mathrm{J/(m^2 \cdot s)}$；

k——导热系数，$\mathrm{W/(m \cdot ℃)}$；

α——热扩散系数，又称导温系数，m^2/s；

$d(\rho c_p T)/dy$——焓浓度梯度或称热量浓度梯度，表示单位体积内流体所具有的焓在 y 方向的变化率，$J/(m^3 \cdot m)$。

式(1-9)的物理意义为：

由于温度梯度引起 y 方向上的热量通量 =

－（热量扩散系数）×（y 方向上的热量浓度梯度）

式(1-9)中负号表示热量通量的方向与热量浓度梯度的方向相反，即热量朝着温度降低的方向传递。

3. 费克定律

在无总体流动或静止的双组分混合物中，若组分 A 的质量分数 w_A（$w_A = \rho_A/\rho$，其中，ρ_A为组分 A 的密度，ρ 为混合物的密度）的分布为一维的，则通过分子扩散传递的组分 A 的质量通量密度为

$$j_A = -D_{AB}\rho \frac{dW_A}{dy} \tag{1-10}$$

对于混合物密度为常数的情况，上式可改写为

$$j_A = -D_{AB} \frac{d\rho_A}{dy} \tag{1-11}$$

式中，

y——组分 A 的密度发生变化的方向的坐标，m；

j_A——组分 A 的质量通量密度，表示单位时间内，通过单位面积传递的组分 A 的质量，$kg/(m^2 \cdot s)$；

D_{AB}——组分 A 在组分 B 中的扩散系数，m^2/s；

$d\rho_A/dy$——组分 A 在 y 方向的质量浓度梯度，$kg/(m^3 \cdot m)$。

式(1-11)是费克(Fick)1855 年首先提出来的。整个式子表达的物理意义为：

由于浓度梯度引起组分 A 在 y 方向上的质量通量

=－（质量扩散系数）×（y 方向上组分 A 的质量浓度梯度）

式(1-11)中负号表示质量通量的方向与质量浓度梯度的方向相反，即质量朝着其浓度降低的方向传递。

通过对上述 3 种传递现象的讨论，可以看到动量、热量和质量虽然是在 3 个完全不同领域中的物理量，但它们的通量却具有非常相似的数学表达式：

$$\left\{\begin{matrix}\text{动量}\\ \text{热量}\\ \text{质量}\end{matrix}\right\}\text{通量} = -\text{扩散系数} \times \left\{\begin{matrix}\text{动量}\\ \text{热量}\\ \text{质量}\end{matrix}\right\}\text{浓度梯度}$$

即通量分别和各自的扩散系数和浓度梯度成正比，负号则表示通量的方向。3 个方程的扩散系数 ν、α 和 D_{AB} 的单位均为 m^2/s。通常，将通量等于扩散系数乘以浓

度梯度的方程称为现象方程。常见的现象方程列于表 1

表 1-1 一维通量方程（现象方程）

扩散量	扩散过程	通量方程	扩散系数	通量方程中各项的单位	物理定律
动量	粘性剪切流	$\tau_{yx}=-\nu(\mathrm{d}\rho u/\mathrm{d}y)$	$\nu=\mu/\rho$	$(\mathrm{kg\cdot m/s})/(\mathrm{m^2/s})=-(\mathrm{m^2/s})(\mathrm{kg/m^3})(\mathrm{m/s})/\mathrm{m}$	牛顿粘性定律
热量	热传导	$q/A=-\alpha[\mathrm{d}(\rho c_p T)/\mathrm{d}y]$	$\alpha=k/\rho c_p$	$\mathrm{J/(m^2\cdot s)}=-(\mathrm{m^2/s})(\mathrm{J/m^3})/\mathrm{m}$	傅里叶定律
质量（组分 A）	双组分混合物中扩散	$J_{\mathrm{A}y}=-D_{\mathrm{AB}}(\mathrm{d}\rho_{\mathrm{A}}/\mathrm{d}y)$	D_{AB}	$\mathrm{kg/(m^2\cdot s)}=-(\mathrm{m^2/s})(\mathrm{kg/m^3})/\mathrm{m}$	费克定律
电量	电传导	$i=-\alpha_e[\mathrm{d}(c'''V)/\mathrm{d}y]$	$\alpha_e=k_e/c'''$	$\mathrm{C/(m^2\cdot s)}=-(\mathrm{m^2/s})(\mathrm{C/m^3})/\mathrm{m}$	欧姆定律

注：i——电荷通量，$\mathrm{C/(m^2\cdot s)}$； k_e——电导率，$\mathrm{C/(V\cdot m\cdot s)}$；
C——电荷量，C； α_e——电量扩散系数，$\mathrm{m^2/s}$；
c'''——单位体积电容，$\mathrm{C/(m^3\cdot V)}$ V——电势，V。

以后将会看到，正是由于这 3 种基本传递公式的类似性导致这 3 种传递过程具有一系列的类似的特性。最后应当指出的是，上述类似只适用于一维系统，因为热量和质量都是标量，它的通量是矢量，在直角坐标系中有 3 个方向的分量；而动量是矢量，它的通量是张量，有 9 个分量。另一个不同点是质量传递是物质的移动需要占有空间；而动量和能量的传递不占有空间。热量可以通过间壁传递，而质量不能通过间壁传递。

1-1-2 湍流传递性质

在湍流流动中，除分子传递现象外，宏观流体微团的不规则混合运动也引起动量、热量和质量的传递，其结果从表象上看起来相当于在流体中产生了附加的“湍流切应力”“湍流热传导”和“湍流质量扩散”。由于流体微团的质量比分子的质量大得多，湍流传递的强度自然要比分子传递的强度大得多。

尽管湍流混掺运动与分子运动之间有重要差别，早期半经验湍流理论的创立者还是仿照分子传递性质的定律来建立确定湍流传递性质的公式。在这种理论中定义的湍流动力粘度系数 μ_t、湍流导热系数 k_t 和湍流质量扩散系数 D_{Abt}，并认为对于只有一个速度分量的一维流动而言，湍流切应力 τ_t、湍流热量通量密度 q_t 和湍流扩散引起的组分 A 的质量通量密度 j_{At} 分别与平均速度、平均温度和组分 A 的平均密度的变化率成正比，亦即

$$\tau_t=-\mu_t\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}y} \tag{1-12}$$

$$q_t = -k_t \frac{d\bar{T}}{dy} \tag{1-13}$$

$$j_{At} = -D_{ABt} \frac{d\bar{\rho}_A}{dy} \tag{1-14}$$

因为在流体中同时存在湍流传递性质，所以总的切应力 τ_s、总的热量通量密度 q_s 和组分 A 的总的质量通量密度 j_s 分别为

$$\tau_s = -(\mu + \mu_t) \frac{d\bar{u}}{dy} = -\mu_{eff} \frac{d\bar{u}}{dy} \tag{1-15}$$

$$q_s = -(k + k_t) \frac{d\bar{T}}{dy} = -k_{eff} \frac{d\bar{T}}{dy} \tag{1-16}$$

$$j_s = -(D_{AB} + D_{ABt}) \frac{d\bar{\rho}_A}{dy} = -D_{ABeff} \frac{d\bar{\rho}_A}{dy} \tag{1-17}$$

其中，μ_{eff}，k_{eff} 和 D_{ABeff} 分别称为有效动力粘度、有效导热系数和组分 A 在双组分混合物中的有效质量扩散系数。

在充分发展的湍流中，湍流传递系数往往比分子传递系数大得多，因而有 $\mu_{eff} \approx \mu_t$，$k_{eff} \approx k_t$，$D_{ABeff} \approx D_{ABt}$，故可以用式（1-12）、式（1-13）和式（1-14）分别代替式（1-15）、式（1-16）和式（1-17）这样，湍流动量传递、湍流热量传递和湍流质量传递的 3 个数学关系式（1-12）、式（1-13）和式（1-14）也是类似的。

应当指出的是，有了类似于式（1-12）、式（1-13）和式（1-14）这样的从表象出发建立起来的公式，并没有根本解决湍流计算的问题。因为确定湍流传递系数 μ_t，k 和 D_{ABt} 比起确定分子传递系数 μ，k 和 D_{AB} 困难得多。首先，分子传递系数只取决于流体的热力学状态，不受流体宏观运动的影响，因此分子传递系数 μ，k 和 D_{AB} 均是与温度、压力有关的流体的固有属性，是物性。而湍流传递系数主要取决于流体的平均运动，故不是物性。其次，分子传递性质可以由逐点局部平衡的定律来确定，而对于湍流传递性质来说应该考虑其松弛效应，即历史和周围流场对某时刻、某空间点湍流传递性质的影响。除此之外，在一般条件下，分子传递性质 μ，k 和 D_{AB} 是各向同性的，但是在大多数情况下，湍流传递系数 μ_t，k_t 和 D_{ABt} 是各向异性的。

正是由于湍流传递性质的上述特点，使得湍流流动的理论分析至今仍未彻底解决，主要还是通过实验研究的方法来解决。

1-2 传递过程的研究方法

传递过程是物理过程，它的研究方法和物理学中其他领域的研究方法一样，有理论分析、实验研究和数值计算 3 种方法。它们彼此取长补短，互相促进，从而使学科得到不断的发展。

数值计算方法是在　　世纪

和计算发展得多么完善都是不可替代的；而理论则能指导计算和实验，使之进行得富有成效，并且可以把部分实验结果推广到没有做过实验的一类问题中去；计算则可以弥补理论和实验的不足。可以减少一系列复杂的传递过程的研究工作量。理论、计算和实验这样不断地相互作用，正是学科得到飞速发展的原因之一。

在本书中主要介绍理论分析的方法，同时也扼要介绍了数值计算方法。

第 2 章

基 本 概 念

在研究传递过程的基本规律之前，我们首先介绍一些基本概念以及描述流体流动的方法，作为进一步研究的预备知识。

2-1 连续介质模型

传递过程离不开物质（包括固体和流体，而流体又分为液体和气体），物质都是由一些离散的、不断地作杂乱运动且相互碰撞的分子组成。分子的运动遵循统计规律。从微观角度来看，物质的物理量在时间上和空间上都是不连续的。

由于研究传递过程时，人们感兴趣的并不是物质的微观结构和分子运动，而是一些宏观的物理量，如压力、密度、温度等，因此有理由不以分子作为研究对象，而采用连续介质模型。按照这种模型，我们把物质看成是由连续分布的物质质点所组成。下面以流体为例来说明。

根据连续介质的概念，我们可以确定每个空间点和每个时刻的流体的密度、压力、温度、速度等物理参数。今以密度为例，在所考察时刻，任取一个包围所考察空间点的体积 δV，它所包含的流体质量为 δM，如图 2-1(a)所示，比值 $\delta M/\delta V$ 称为 δV 内流体的平均密度，先假定 δV 比较大，然后逐渐缩小，实际测量表明 $\delta M/\delta V$ 随 δV 的变化曲线如图 2-1(b)所示。起初平均密度随 δV 的缩小趋近一稳定值，但当 δV 缩小到非常小，使 δV 内只包含少数几个分子时，由于个别分子随机地进出该体积，致使平均密度不稳定，得不到确定的值。我们可以设计有这样一个最小体积 ε，它与我们所研究问题的特征尺度相比是微不足道的，因而可以看成是一个流体性质均匀的空间点，但与分子的平均自由程相比却要大得多，故其内包含着许许多多分子，使得密度的统计平均有确切的意义。我们把这个最小体积 ε 内的平均密度定义为所考察点的流体密度，即定义

$$\rho = \lim_{\delta V \to \varepsilon} \frac{\delta M}{\delta V}$$

由此可见，作为连续介质的流体中的一点，实际是指一块微小的流体微团，它的大小是和 ε 相比拟的。

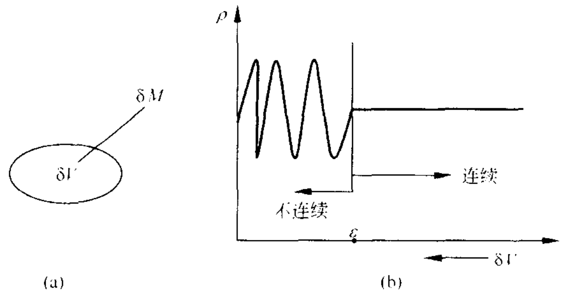

图 2-1 流体密度随 δV 的变化

按同样的推理，可以建立流体中一点处的压力、温度以及其他参数的概念。而流体中一点处的瞬时速度是指该瞬时与该点重合的流体微团的质心的速度。

由上述知，所谓流体质点是指微观上充分大，宏观上充分小的分子团。若以 L_1 表示分子平均自由程，L_2 表示分子团的线尺度，L_3 表示所研究问题的特征长度（如管道的直径），则分子团的线尺度应满足如下关系式：

$$L_1 \ll L_2 \ll L_3 \tag{2-1}$$

从分子角度来看，流体是由大量分子组成的物质，分子之间有空隙，分子在不断地运动，其平均自由程很小，例如，在标准状态下，$1\mathrm{cm}^3$ 的空气内有空气分子 2.7×10^{19} 个，其平均自由程 $L_1=2\times10^{-5}\,\mathrm{cm}$，若取分子团的体积为 $10^{-9}\,\mathrm{cm}^3$，其中仍包含 2.7×10^{10} 个分子，可对分子团中的流体应用统计平均规律。此时分子团的线尺度 $L_2\approx10^{-3}\,\mathrm{cm}$，它远小于所研究的各种工程问题的特征线尺度，故可用连续介质模型。

但是，当所研究问题的特征线尺度接近或小于流体质点的线尺度时，例如压力 $0.1333\mathrm{Pa}$ 的空气(平均自由程为 2 mm）在管道内流动。如果管道直径与分子平均自由程为同量级时，统计平均方法不再能得到确定的平均值，连续介质模型就不适用了。

有了连续介质模型，就可以把原来是大量离散分子的运动看成是连续充满整个研究区域的流体质点的运动。而且在每个空间点，每个时刻都有确定的密度、压力、温度、速度等物理参数，在一般情况下它们都是空间坐标和时间的连续函数。于是我们就有可能利用数学分析这一强有力的数学工具来研究流体流动的各种问题。

2-2 流体的不可压缩性

流体的压缩性可用下式描述：

$$\frac{\Delta V}{V_0}=-\frac{p-p_0}{E}=-\frac{\Delta p}{E} \tag{2-2}$$

式中，ΔV——压强从 p_0 变化到 p 时体积的变化量，m^3；

V_0——初始压强为 p_0 时的体积，m^3；

E——弹性模量，用于衡量流体的可压缩性，其单位与压强相同。

式(2-2)中的负号表示压强增大，体积减小。

流体的压缩性很小，例如水的弹性模量为 1.93×10^9 Pa，因此，当压强增大到 1.0133×10^5 Pa 时，$\Delta p/E=1.0133\times10^5/1.93\times10^9=5.24\times10^{-5}$，即水的体积压缩量仅为 $5.24\times10^{-3}\%$，其值可略而不计。

对于气体，在等温下根据理想气体状态方程式，可得 $p_0V_0=(p_0+\Delta p)(V_0+\Delta V)$，将此式右侧展开，略去 ΔV 与 Δp 的乘积，经整理，得

$$\frac{\Delta V}{V_0}=-\frac{\Delta p}{p_0} \tag{2-3}$$

比较式(2-2)和式(2-3)，可知 $E=p_0$，即理想气体的弹性模量等于其初始压强。例如在标准状态下，空气的 $E=p_0=1.0133\times10^5$ Pa，其值为水的弹性模量的 $1/2\times10^4$。如果忽略粘滞力的影响，而且位置高度相同时，根据伯努利方程 $p+\rho u^2/2=$ 常数，由流体引起的压强变化，其数量应当与动能的变化相同，此时，式(2-3)可写为

$$\frac{\Delta V}{V_0}=-\frac{\rho}{2p_0}(\Delta u)^2 \tag{2-4}$$

若 $\Delta V/V_0\ll1$（一般情况 $\Delta V/V_0<0.05$），则此流体可作为不可压缩流体处理。例如，密度为 $1kg/m^3$，初始压强为 1.0133×10^5 Pa的空气，速度由零改变为 100m/s，则 $\Delta V/V_0=-(2\times1.0133\times10^5)^{-1}\times100^2=-0.0493$，此时就可以按不可压缩流体处理。化工或其他某些过程中所遇到的气体，流速较小，$\Delta V/V_0\ll1$，所以均可视为不可压缩流体。当然，它们只是实际流体在某种条件下的近似模型，因为绝对不可压缩流体并不存在。

2-3 描述流体流动的两种方法

在研究流体流动时，首先要解决的问题是用什么方法来描述流体的运动。描述流体的运动就是描述各个流体质点在各个不同时刻所占有的空间位置、速度和加速度等。目前通常采用两种不同的方法即拉格朗日法和欧拉法来描述流体的运动。

1. 拉格朗日方法

拉格朗日方法，着眼于流体质点，设法描述出每个流体质点自始至终的运动过程，即它的位置随时间变化的规律，如果知道了所有流体质点的运动规律，那么整个流体的运动状态也就清楚了。此时流体质点在其流动过程中质量是固定的，而其体积是可以变化的。

现在我们将上述描述运动的观点和手段用数学式子表达出来，为此首先必须用某种数学方法区别不同的流体质点。通常利用初始时刻流体质点的坐标作为区别不同质点的标志，设初始时刻 $t=t_0$ 时，流体质点的坐标是（a,b,c），它可以是曲线坐标，也可以是直角坐标（x_0,y_0,z_0），重要的是给流体质点以标号，而不是采取什么具体的形式。我们采用 a,b,c 3 个数的组合来区别流体质点，不同的 a,b,c 代表不同的质点。

于是流体质点的运动规律数学上可表示为下列矢量形式：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a,b,c,t) \tag{2-5}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是流体质点的位置矢量，在直角坐标系中，有

$$\begin{cases} x=x(a,b,c,t) \\ y=y(a,b,c,t) \\ z=z(a,b,c,t) \end{cases}$$

变数 a,b,c,t 称为拉格朗日变数。在式（2-5）中，如果固定 a,b,c 而令 t 改变，则得到某一流体质点的运动规律，如果固定 t 而令 a,b,c 改变，则得到同一时刻不同流体质点的位置分布。应该指出，在拉格朗日观点中，矢量函数 $\boldsymbol{r}$ 的定义域不是场，因为它不是空间坐标的函数，而是质点标号的函数

假设由式(2-5)确定的函数具有二阶连续偏导数。速度和加速度是对同一质点而言的单位时间内位移变化率及速度变化率。设 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{a}$ 分别表示速度矢量和加速度矢量,则

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}(a,b,c,t)}{\partial t} \\ \boldsymbol{a}=\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{r}(a,b,c,t)}{\partial t^2} \end{cases} \tag{2-7}$$

既然对同一质点而言，a,b,c 不变，因此上式写的是对时间 t 的偏导数。在直角坐标系中

$$\begin{cases} u_x=\dfrac{\partial x(a,b,c,t)}{\partial t} \\ u_y=\dfrac{\partial y(a,b,c,t)}{\partial t} \\ u_z=\dfrac{\partial z(a,b,c,t)}{\partial t} \end{cases} \tag{2-8}$$

$$
\begin{cases}
a_x = \dfrac{\partial u_x}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 x(a,b,c,t)}{\partial t^2} \\
a_y = \dfrac{\partial u_y}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 y(a,b,c,t)}{\partial t^2} \\
a_z = \dfrac{\partial u_z}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 z(a,b,c,t)}{\partial t^2}
\end{cases}
\tag{2-9}
$$

2. 欧拉法

在说明欧拉法之前，先来区别“空间点”和“流体质点”这两个完全不同的概念。所谓空间点是指固定在参考坐标系上的点，它不随时间变更自己的位置。而流体质点是物理上的流体微团在数学上的抽象，在数学上把它看成是没有体积的质点，它随时间而变更自己的位置，在不同时刻，它可以占据不同的空间位置。

欧拉法的着眼点不是流体质点，而是空间点。设法在被流体充满的空间中的每一个点上，描述出流体运动随时间变化的状况。如果每一空间点上的流体运动都已知道，则整个流体的运动状况也就清楚了。那么，应该用什么物理量来表现空间点上流体运动变化的情况呢？

因为不同时刻有不同的流体质点经过空间某固定点，所以站在固定点上就无法观察和记录掠过的流体质点前后运动的详细情况，即无法像拉格朗日法那样直接测量出每个质点的位置随时间的变化。但是，不同时刻经过固定点的流体质点的速度是可以测出的，这样采用速度矢量来描写固定点上流体运动的变化就十分自然的了。如上分析，欧拉方法中流体质点的运动规律在数学上可表达为下列矢量形式：

$$
\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) \tag{2-10}
$$

在直角坐标系中有

$$
\begin{cases}
u_x = u_x(x,y,z,t) \\
u_y = u_y(x,y,z,t) \\
u_z = u_z(x,y,z,t)
\end{cases}
\tag{2-11}
$$

要完全描述运动流体的状况还需要给定状态函数，例如压力、密度、温度等：

$$
\begin{aligned}
p &= p(x,y,z,t) \\
\rho &= \rho(x,y,z,t) \\
T &= T(x,y,z,t)
\end{aligned}
$$

变数 x,y,z,t 称为欧拉变数。以后除个别的线、面以外，都假设速度矢量 $\boldsymbol{u}$ 具有连续的一阶偏导数。当 x,y,z 固定，t 改变时，式(2-11)中的函数代表空间中某固定点上速度随时间的变化规律；当 t 固定，改变 x,y,z 时，式(2-11)中的函数代表某一时刻速度在空间中的分布规律。应当指出，由式(2-11)确定的速度函数是定义在空间点上的，它们是空间的坐标 x,y,z 的函数，所以我们研究的是场，如速度

场、压力场、密度场等。因此，当我们采用欧拉观点描述运动时，就可以广泛地利用场论的知识。若场内函数不依赖于矢径 r 则称为均匀场（即若同一时刻，场内各点函数的值都相等），反之，称为非均匀场。如果场内函数值不依赖于时间，即不随时间 t 改变，则称此场为稳态场，反之，则称为非稳态场。

我们假定速度函数（2-10）式具有一阶连续偏导数，现在从式(2-10)出发求流体质点的加速度 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t$。如图 2-2 所示，设某质点在场内运动，其质点轨迹为 l，在 t 时刻，该质点位于 M 点，速度为 $\boldsymbol{u}(M,t)$ 过了 Δt 时刻后，该质点运动至 M' 点，速度为 $\boldsymbol{u}(M',t+\Delta t)$，根据定义，加速度的表达式为

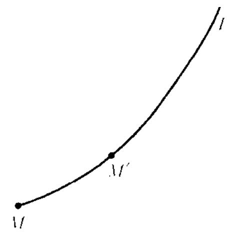

图 2-2　质点在场内的运动

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{u}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(M',t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(M,t)}{\Delta t} \tag{2-12}$$

从上式可知，速度的变化亦即加速度的获得主要由下面两个原因引起的。当质点在 Δt 时间内从 M 点运动至 M' 点时，一方面，由于场的不稳定性引起的速度变化：另一方面，由于场的非均匀性亦将引起速度变化根据这样的考虑，我们可将式（2-12）右侧分成两部分

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(M',t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(M',t)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(M',t)-\boldsymbol{u}(M,t)}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(M',t+\Delta t)-\boldsymbol{u}(M',t)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{MM'}{\Delta t}\lim_{MM'\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(M',t)-\boldsymbol{u}(M,t)}{MM'}$$

右侧第一项当 $\Delta t\to 0$ 时 $M'\to M$，因此它是 $\partial \boldsymbol{u}(M,t)/\partial t$，这一项代表由于时间变化 Δt 而引起的速度变化，称为局部变化或局部导数；右侧第二项是 $U\partial \boldsymbol{u}(M,t)/\partial s$，它代表由于速度场内的不均匀性而引起的速度变化，称为对流变化或对流导数。其中 $\partial \boldsymbol{u}/\partial s$ 代表沿 s 方向移动单位长度引起的速度变化，而如今在单位时间内移动了 U 的距离，因此 s 方向上的速度变化是 $U\partial \boldsymbol{u}/\partial s$。这样总的速度变化（即加速度）就是局部导数和对流导数之和，称为随体导数亦称为拉格朗日导数，于是

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+U\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s}$$

从场论知识有

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s}=(\boldsymbol{s}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$$

其中 $\boldsymbol{s}_0$ 是曲线 L 上的单位切向矢量，∇ 是哈米尔顿（Hamilton）算子。考虑到 $U\boldsymbol{s}_0=\boldsymbol{u}$，得

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} \tag{2-13}$$

这就是矢量形式的加速度的表达式。

在直角坐标系中式（2-13）可表达为

$$
\begin{cases}
a_x = \dfrac{\mathrm{D}u_x}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_x}{\partial z} \\
a_y = \dfrac{\mathrm{D}u_y}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\
a_z = \dfrac{\mathrm{D}u_z}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \dfrac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \dfrac{\partial u_z}{\partial z}
\end{cases}
\tag{2-14}
$$

式（2-13）也可以通过直接微分的方式得到。设与轨迹 L 相对应的运动方程是

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

或

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$$

于是速度函数可写成

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x(t), y(t), z(t), t)$$

对 u 作复合函数微分，并考虑到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{u}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u_x,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u_y,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = u_z$$

于是得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t} &= \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial z} \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}
\end{aligned}
$$

上述将随体导数分解为局部导数和对流导数之和的方法，对于任何矢量 v 和任何标量 φ 都成立，此时有

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} \tag{2-14}$$

$$\frac{\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \operatorname{grad} \varphi \tag{2-15}$$

因为拉格朗日法和欧拉法从两种不同观点描述同一流体的运动，所以它们之间可以互相转换。

设拉格朗日法中的运动规律如式（2-5）：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(a, b, c, t) \tag{2-5}$$

为已知，则速度函数是

$$\boldsymbol{u}=\frac{\partial \boldsymbol{r}(a,b,c,t)}{\partial t} \tag{2-7}$$

反解式(2-5)代表的 3 个标量方程，得

$$a=a(\boldsymbol{r},t),\ b=b(\boldsymbol{r},t),\ c=c(\boldsymbol{r},t)$$

代入式(2-7)得

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(a(\boldsymbol{r},t),b(\boldsymbol{r},t),c(\boldsymbol{r},t),t)=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$$

这就是欧拉变数中的速度函数。

设欧拉观点中的速度函数

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) \tag{2-10}$$

为已知，将其写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$$

这是一个由 3 个方程组成的确定 $\boldsymbol{r}(t)$ 的常微分方程组，其通解为

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{r}(c_1,c_2,c_3,t) \tag{2-16}$$

其中 c_1,c_2,c_3 是 3个积分常数，由 $t=0$ 和 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ 的初始条件确定。于是

$$c_1=c_1(\boldsymbol{r}_0),\quad c_2=c_2(\boldsymbol{r}_0),\quad c_3=c_3(\boldsymbol{r}_0)$$

将其代入式(2-5)，并注意到 $\boldsymbol{r}_0$ 的 3 个坐标 x_0,y_0,z_0 就是拉格朗日的变数 a,b,c，因此有

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a,b,c,t)$$

这就是用拉格朗日变数表示的运动规律。

2-4 迹线与流线

1. 迹线

在流体力学中为直观形象地分析流体运动，需要讨论流体运动的几何表示。前面我们已经提出了在拉格朗日法中，我们是通过描述不同流体质点运动规律的途径来描述整个流体运动的。数学上流体质点的运动规律可由式（2-5)表达

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a,b,c,t) \tag{2-5}$$

流体质点运动规律的几何表示，亦即函数式（2-5)的几何表示就是轨迹。所谓“轨迹”就是流体质点在空间运动时所描绘出来的曲线，它给出同一质点在不同时刻的速度方向。式（2-5)消去 t 后即得到轨迹的方程。

在欧拉法中是通过描写不同空间点速度随时间变化规律的途径来描写整个流体的运动。亦即是用下式来描写的：

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) \tag{2-10}$$