

21 世纪大学课程辅导丛书

材 料 力 学

重点难点及典型题精解

闵 行 武广号 刘书静

西安交通大学出版社

内 容 摘 要

本书是学习材料力学的参考书和考研的复习资料。全书简要地阐明了材料力学课程的基本概念,指出其重点及难点,着重讲解了材料力学的解题思路、方法和技巧。

本书共分 17 章,覆盖材料力学教学大纲中的全部内容。每一章都包括基本知识、典型题精解及测试题三个部分。最后一章给出了几套模拟试卷。

本书可作为工科各专业本科生和电大、函授大学、职大及自学考试等学生学习材料力学的参考书,也是报考硕士研究生的考前复习资料,并可作为教师的教学参考。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学重点难点及典型题精解/闵行等编著. —西安:西安交通大学出版社,2001.5
(21 世纪大学课程辅导丛书)
ISBN 7-5605-1382-4

I. 材… II. 闵… III. 材料力学-高等学校-教学参考资料 IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 00017 号

*

西安交通大学出版社出版发行

(西安市兴庆南路 25 号 邮政编码 710049 电话:(029)2668316)

西安兰翔印刷厂印装

各地新华书店经销

*

开本 787 mm×1 092 mm 1/16 印张:18.625 字数:453 千字

2001 年 5 月第 1 版 2001 年 5 月第 1 次印刷

印数:0 001~5 000 定价:22.00 元

若发现本社图书有倒页、白页、少页及影响阅读的质量问题,请去当地销售部门调换或与我社发行科联系调换。发行科电话:(029)2668357,2667874

前 言

材料力学是工科各专业的一门重要技术基础课,是学习后续专业课程的基础,材料力学课程研究问题和解决问题的方法有着独有的特点。本书简要地阐明了材料力学课程的基本概念,指出其重点与难点,并针对学生学习时常遇到的一些问题,着重讲解材料力学的解题思路、方法和技巧。对于准备考研的读者,无疑是一本较好的复习资料。

本书共分 17 章,覆盖了材料力学教学大纲中的全部内容,每一章都包括基本知识、例题及测试题三个部分。基本知识部分归纳了材料力学各章节的基本知识点,并指出该章节的难点与重点、解题的方法和技巧;例题部分每章都精选了各类典型题,一部分为理解、掌握基本概念的基本题,另一部分为期末考题和考研题,对于每一个例题都给出了详细解答,同一题还给出不同的解法,指出容易混淆的概念和常犯的错误,使读者能够正确地举一反三。还有少量较难的例题,用以开阅读者的思路,并可作为教师的教学参考;测试题部分包括是非判断题、填空题、选择题及计算题四种类型,精选了一些典型概念题和计算题,读者可通过这些测试题来检测自己对基本概念和计算方法掌握的程度。在第 17 章,以西安交通大学历年材料力学期末考试题及考研试题为主,并参考了一些重点院校的试题,给出了几套模拟试卷。为方便读者,各章均在章末附有测试题答案。对较难的例题和测试题都以 * 号注明。

本书在编写时参考了近年来国内外一些著名的材料力学教材和西安交通大学材料力学教研室历年编写的材料力学教材,选用了本教研室近年来部分期末试题和考研试题,也参考了国内一些重点院校材料力学的试题。本书也反映了西安交通大学材料力学教研室多年教学改革成果和丰富的教学经验。

本书是工科各专业本科生学习材料力学的参考书及报考硕士研究生的考前复习教材,也可作为电大、函授大学、职大和自学考试等学生的课外读物,并可作为教师的教学参考。

本书由闵行、武广号和刘书静编写。在编写过程中得到西安交通大学材料力学教研室全体同仁的大力支持,责任编辑郑丽芬提出了许多宝贵意见,在此一并致以衷心的感谢。

由于编者水平所限,书中难免有疏误和不妥之处,敬望读者提出批评和指正。

编 者
2000.10

目 录

前言

第 1 章 绪论

1.1	基本知识点	(1)
1.2	重点与难点	(2)
1.3	测试题	(2)
	第 1 章测试题答案	(3)

第 2 章 轴向拉伸与压缩

2.1	基本知识点	(4)
2.2	重点与难点	(6)
2.3	解题方法要点	(7)
2.4	典型题精解	(7)
2.5	测试题	(22)
	第 2 章测试题答案	(27)

第 3 章 扭转

3.1	基本知识点	(28)
3.2	重点与难点	(31)
3.3	解题方法要点	(31)
3.4	典型题精解	(32)
3.5	测试题	(42)
	第 3 章测试题答案	(46)

第 4 章 截面图形的几何性质

4.1	基本知识点	(47)
4.2	重点与难点	(49)
4.3	解题方法要点	(49)
4.4	典型题精解	(50)
4.5	测试题	(56)
	第 4 章测试题答案	(59)

第 5 章 弯曲内力

5.1	基本知识点	(61)
5.2	重点与难点	(62)

5.3	解题方法要点	(62)
5.4	典型题精解	(63)
5.5	测试题	(72)
	第 5 章测试题答案	(77)
第 6 章 弯曲应力		
6.1	基本知识点	(79)
6.2	重点与难点	(81)
6.3	解题方法要点	(81)
6.4	典型题精解	(81)
6.5	测试题	(97)
	第 6 章测试题答案	(102)
第 7 章 弯曲变形		
7.1	基本知识点	(104)
7.2	重点与难点	(105)
7.3	解题方法要点	(105)
7.4	典型题精解	(106)
7.5	测试题	(116)
	第 7 章测试题答案	(120)
第 8 章 应力状态理论		
8.1	基本知识点	(122)
8.2	重点与难点	(125)
8.3	解题方法要点	(127)
8.4	典型题精解	(128)
8.5	测试题	(138)
	第 8 章测试题答案	(142)
第 9 章 强度理论		
9.1	基本知识点	(144)
9.2	重点与难点	(145)
9.3	解题方法要点	(145)
9.4	典型题精解	(146)
9.5	测试题	(153)
	第 9 章测试题答案	(155)
第 10 章 组合变形的静强度		
10.1	基本知识点	(157)

10.2	重点与难点·····	(158)
10.3	解题方法要点·····	(158)
10.4	典型题精解·····	(159)
10.5	测试题·····	(175)
	第 10 章测试题答案 ·····	(180)
第 11 章 能量法		
11.1	基本知识点·····	(182)
11.2	重点与难点·····	(184)
11.3	解题方法要点·····	(185)
11.4	典型题精解·····	(186)
11.5	测试题·····	(197)
	第 11 章测试题答案 ·····	(201)
第 12 章 超静定问题		
12.1	基本知识点·····	(203)
12.2	重点与难点·····	(204)
12.3	解题方法要点·····	(205)
12.4	典型题精解·····	(205)
12.5	测试题·····	(217)
	第 12 章测试题答案 ·····	(223)
第 13 章 动载荷		
13.1	基本知识点·····	(224)
13.2	重点与难点·····	(225)
13.3	解题方法要点·····	(225)
13.4	典型题精解·····	(225)
13.5	测试题·····	(235)
	第 13 章测试题答案 ·····	(239)
第 14 章 疲劳强度		
14.1	基本知识点·····	(240)
14.2	重点与难点·····	(241)
14.3	测试题·····	(242)
	第 14 章测试题答案 ·····	(244)
第 15 章 压杆的稳定性		
15.1	基本知识点·····	(246)
15.2	重点与难点·····	(247)

15.3	解题方法要点·····	(248)
15.4	典型题精解·····	(249)
15.5	测试题·····	(259)
	第15章测试题答案·····	(263)
第16章 联接件的强度		
16.1	基本知识点·····	(264)
16.2	重点与难点·····	(264)
16.3	解题方法要点·····	(265)
16.4	典型题精解·····	(265)
16.5	测试题·····	(269)
	第16章测试题答案·····	(272)
第17章 模拟试题		
	试卷一·····	(273)
	试卷二·····	(276)
	试卷三·····	(279)
	试卷四·····	(281)
	试卷五·····	(284)
	第17章模拟试卷答案·····	(287)
主要参考书·····		(290)

第 1 章 绪 论

1.1 基本知识点

1.1.1 材料力学的任务

1. 组成机械和结构物的零部件称为构件,构件必须有足够的承受载荷能力(简称承载能力)。材料力学就是研究构件承载能力的一门科学。

2. 构件承载能力分为三方面:

(1)强度:构件抵抗破坏的能力。

(2)刚度:构件抵抗变形的能力。

(3)稳定性:构件保持原有平衡形式的能力。

3. 材料力学的主要任务是在保证构件既安全适用又尽可能经济合理的前提下,为构件选择适当的材料、合适的截面形状和尺寸,为合理设计构件提供必要的理论基础和计算方法。

1.1.2 变形固体及其基本假设

1. 材料力学研究的构件都是变形固体。

2. 变形固体两个基本假设:均匀连续假设和各向同性假设。

3. 弹性与塑性:

(1)当外力不超过一定值时,去除外力后能恢复原有形状和尺寸,材料的这种性质称为弹性,去除外力后能消失的变形称为弹性变形。

(2)当外力过大时,外力去除后,变形只能部分恢复而残留下一部分不能消失的变形,材料的这种性质称为塑性,不能恢复而残留下来的变形称为塑性变形(或称残余变形)。

4. 材料力学主要研究弹性范围内的小变形。

1.1.3 内力、截面法及应力

1. 材料力学研究的内力是因外力引起的构件各部分之间相互作用力的变化。

2. 截面法是用来显示内力与确定内力的方法。

3. 截面内某点的内力集度称为该点的应力。应力是一个矢量,垂直于截面的分量称为正应力,用 σ 表示;切于截面的分量称为切应力(剪应力),用 τ 表示。应力单位是 N/m^2 (或 MN/m^2),记为 Pa(或 MPa)。

1.1.4 位移、变形及应变

1. 材料力学研究由于变形所引起的位移。构件内某点的原来位置到其新位置所连的直线段,称为该点的线位移。构件内某一线段(或平面)所旋转的角度,称为该线段(或面)的角位移。

2. 应变用来度量构件内一点处变形程度。应变分为线应变和切应变,都是无量纲量。

(1)变形前,构件内某点的某一方向的微线段,在变形后该微线段长度的改变量和原来长度之比,称为线应变,用 ϵ 表示。

(2)变形前,过构件内某点取两个相互垂直的微线段,在变形后两个微线段夹角的改变量称为切应变(或角应变),用 γ 表示。

3. 为了研究整个构件的变形,设想把构件分为无数极其微小的正六面体,称为单元体。整个构件变形可以看成是所有单元体变形的组合。

1.1.5 杆件变形的基本形式

1. 材料力学主要研究杆件一类的构件,其几何特征是纵向(长度)尺寸远比横向(垂直于长度方向)尺寸大得多。

2. 在外力作用下,杆件的基本变形有拉伸与压缩、剪切、扭转及弯曲四种形式,杆件其它复杂的变形都可看成上列几种基本变形的组合。

1.2 重点与难点

1.2.1 变形固体

材料力学研究的对象是变形固体,而理论力学研究的对象是刚体,因此在引用理论力学中的一些基本原理(如力的可传性等)时,要特别慎重。

1.2.2 小变形

材料力学把实际构件看作均匀连续和各向同性的变形固体,并主要研究弹性范围内的小变形情况。由于构件的变形和构件的原始尺寸相比非常微小,通常在研究构件的平衡时,仍按构件的原始尺寸进行计算。

1.2.3 外力

外力包括作用在构件上的载荷和支反力。

1.2.4 内力与应力

1. 材料力学研究的是外力引起的内力,内力与构件的强度、刚度密切相关。
2. 截面法是材料力学的最基本的方法。
3. 应力反映内力的分布集度。在研究平衡时,不能把应力直接代入平衡方程中,需把应力乘以其作用面的面积后,才能代入。

1.2.5 位移与应变

1. 材料力学研究的是变形引起的位移。
2. 应变反映一点附近的变形情况。线应变和切应变是度量一点处变形程度的两个基本量。

1.3 测试题

1.3.1 是非判断题

- 1-1 材料力学是研究构件承载能力的一门学科。()
- 1-2 材料力学的任务是尽可能使构件安全地工作。()
- 1-3 材料力学主要研究弹性范围内的小变形情况。()

- 1-4 因为构件是变形固体,在研究构件的平衡时,应按变形后的尺寸进行计算。()
- 1-5 外力就是构件所承受的载荷。()
- 1-6 材料力学研究的内力是构件各部分间的相互作用力。()
- 1-7 用截面法求内力时,可以保留截开后构件的任一部分进行平衡计算。()
- 1-8 压强是构件表面的正应力。()
- 1-9 应力是横截面上的平均内力。()
- 1-10 材料力学只研究因构件变形引起的位移。()
- 1-11 线应变是构件中单位长度的变形量。()
- 1-12 构件内一点处各方向线应变均相等。()
- 1-13 切应变是变形后构件中任意两根微线段夹角角度的变化量。()
- 1-14 材料力学只限于研究等截面直杆。()
- 1-15 杆件的基本变形只是拉(压)、剪、扭和弯四种,如果还有另一种变形,必定是这四种变形的某种组合。()

第 1 章 测试题答案

- 1-1 ✓
- 1-2 ×
- 1-3 ✓
- 1-4 ×
- 1-5 ×
- 1-6 ×
- 1-7 ✓
- 1-8 ×
- 1-9 ×
- 1-10 ✓
- 1-11 ×
- 1-12 ×
- 1-13 ×
- 1-14 ×
- 1-15 ✓

第 2 章 轴向拉伸与压缩

2.1 基本知识点

2.1.1 轴向拉伸与压缩

承受拉伸或压缩杆件的外力(或外力的合力)作用线与杆轴线重合,杆件沿杆轴线方向伸长或缩短,这种变形形式称为轴向拉伸或轴向压缩。

2.1.2 直杆横截面上的应力

1. 横截面上的内力 横截面上的内力的合力作用线与杆轴线重合,轴向内力 N 称为轴力。轴力的符号规则 拉力为正,压力为负。工程上常以轴力图表示杆件轴力沿杆长的变化。

2. 横截面上的应力 根据圣文南(Saint-Venant)原理,在离杆端一定距离之外,横截面上各点的变形是均匀的,各点的应力也应是均匀的,并垂直于横截面,即为正应力,设杆的横截面积为 A ,则有

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

正应力的符号规则 拉应力为正,压应力为负。

2.1.3 强度条件

1. 工程中为各种材料规定了设计构件时工作应力的最高限度,称为许用应力,用 $[\sigma]$ 表示。

2. 轴向拉伸(压缩)强度条件

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

3. 用强度条件可解决工程中三个方面的强度计算问题,即强度校核、设计截面及确定许可载荷。

2.1.4 斜截面上的应力

与横截面成 α 角的任一斜截面上,通常有正应力和切应力存在,它们与横截面正应力 σ 的关系为:

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha} = \frac{\sigma}{2}(1 + \cos 2\alpha) \\ \tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha \end{cases}$$

α 角的符号规则 杆轴线 x 轴逆时针转到 α 截面的外法线时, α 为正值;反之则为负。

切应力的符号规则 截面外法线顺时针转 90° 后,其方向和切应力相同时,该切应力为正值;反之则为负值。

当 $\alpha = 0^\circ$ 时,正应力最大,即横截面上的正应力是所有截面上正应力中的最大值。当 $\alpha = \pm 45^\circ$ 时,切应力达到极值。

2.1.5 轴向拉伸和压缩时的变形计算与虎克(Hooke)定律

1. 等直杆受轴向拉力 F 作用,杆的原长为 l ,横截面积为 A ,变形后杆长由 l 变为 $l + \Delta l$,则杆的轴向伸长为

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}$$

用内力表示为

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

上式为杆件拉伸(压缩)时的虎克定律。式中的 E 称为材料的拉伸(压缩)弹性模量, EA 称为抗拉(压)刚度。

用应力与应变表示的虎克定律为 $\sigma = E\epsilon$

2. 在弹性范围内,杆件的横向应变 ϵ' 和轴向应变 ϵ 有如下的关系:

$$\epsilon' = -\mu\epsilon$$

式中的 μ 称为泊松(Poisson)比(横向变形系数)。

2.1.6 简单拉压超静定问题

1. 结构的约束反力或构件的内力等未知力只用静力学平衡方程就能确定的问题称为静定问题。当结构的未知力的个数多于静力平衡方程的个数时,只用静力平衡条件将不能求解全部未知力,这类问题称为超静定问题,未知力个数和静力平衡方程个数之差称为超静定次数(或阶数)。

2. 解决超静定问题,除列出静力平衡方程外,还需找出足够数目的补充方程,这些补充方程可由结构各部分弹性变形之间的几何关系以及变形和力之间的物理关系求得,将补充方程与静力平衡方程联立求解,即可得出全部未知力。

3. 在超静定结构中,内力的分配不仅与结构的各构件几何尺寸有关,还与各杆间的刚度比相关。一般地说,刚度愈大的杆,内力相对就愈大,这是超静定结构的一个特性。

超静定结构还有一个特性,即由于杆件在制造中的误差,将引起装配应力;由于温度变化会引起温度应力(或变温应力)。

2.1.7 应力集中的概念

工程中,由于结构上和使用上的需要,构件经常带有圆孔、切槽和螺纹等。在构件形状尺寸的突变处,发生局部应力急剧增大的现象,称为应力集中。

2.1.8 材料在拉伸和压缩时的力学性质

1. 低碳钢在拉伸时的力学性质:

(1) 低碳钢应力-应变曲线分为四个阶段:弹性阶段,屈服阶段,强化阶段和局部变形阶段。

(2) 低碳钢在拉伸时的三个现象:屈服(或流动)现象,颈缩现象和冷作硬化现象。

(3) 低碳钢在拉伸时的特性点(图 2-1):

- 比例极限 σ_p : 应力应变成比例的最大应力。
- 弹性极限 σ_e : 材料只产生弹性变形的最大应力。
- 屈服极限 σ_s : 屈服阶段相应的应力。

d. 强度极限 σ_b 材料能承受的最大应力。

(4) 低碳钢在拉伸时的两个塑性指标：

延伸率 δ

$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\%$$

工程上通常将 $\delta \geq 5\%$ 的材料称为塑性材料, 将 $\delta < 5\%$ 的材料称为脆性材料。

断面收缩率 Ψ

$$\Psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\%$$

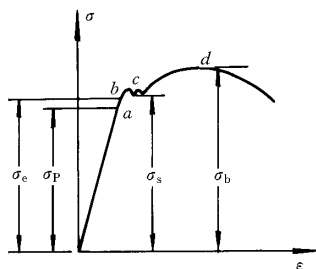


图 2-1

2. 工程中对于没有明显屈服阶段的塑性材料, 通常

以产生 0.2% 残余应变时所对应的应力值作为屈服极限, 以 $\sigma_{0.2}$ 表示, 称为名义屈服极限。

3. 灰铸铁是典型的脆性材料, 其拉伸强度极限较低。

4. 材料在压缩时的力学性质：

(1) 低碳钢压缩时弹性模量 E 和屈服极限 σ_s 与拉伸时相同, 不存在抗压强度极限。

(2) 灰铸铁压缩强度极限比拉伸强度极限高得多, 是良好的耐压、减震材料。

5. 破坏应力 塑性材料以屈服极限 σ_s (或 $\sigma_{0.2}$) 为其破坏应力 脆性材料以强度极限 σ_b 为其破坏应力。

2.2 重点与难点

2.2.1 轴向拉伸与压缩的应力

1. 根据圣文南原理, 即 静力等效的不同加载方式只对加载区附近应力分布有影响。因此, 只有距杆端较远处, 横截面上的应力是均布的。

2. 直杆所有截面中, 横截面上的正应力最大 在与杆轴线成 45° 的斜截面上切应力最大, 是横截面上正应力的一半。

3. 直杆纵向截面上应力等于零。

2.2.2 轴向拉伸与压缩的变形

计算轴向拉伸与压缩变形的虎克定律只能用于等截面、等轴力的情况。对于变截面、变轴力杆件, 应分为若干段分别计算, 然后求和得全杆的变形。

2.2.3 简单拉压超静定问题

1. 解超静定问题的关键是列出正确的变形几何条件。

2. 在列出变形几何条件时, 注意所假设的杆件变形应是杆件可能发生的变形。同时, 假设的内力符号应和变形一致。

2.2.4 材料在拉伸与压缩时的力学性质

1. 低碳钢拉伸到强化阶段后, 卸载时发生冷作硬化现象, 材料的比例极限提高, 塑性降低。卸载曲线平行于弹性阶段的直线。低碳钢在压缩时的屈服极限和拉伸时相同, 拉伸和压缩的许用应力相同。

2. 铸铁在压缩时的强度远大于拉伸时的强度,其拉伸和压缩许用应力不同。

2.3 解题方法要点

2.3.1 虎克定律的应用

1. 应用虎克定律计算杆件的变形时,内力应以代数值代入。

2. 求解结构上节点的位移时,设想交于该节点的各杆,沿各自的杆轴线自由伸长或缩短,从变形后各杆的终点作各杆轴线的垂线,这些垂线的交点即为节点新的位置。

2.3.2 解超静定问题的步骤

1. 列出静力平衡条件。

2. 观察结构可能的变形,根据变形协调关系列出变形几何条件。

3. 列出物理条件。

4. 解联立方程组。

2.4 典型题精解

例 2-1 正方形截面杆有切槽, $a = 30 \text{ mm}$, $b = 10 \text{ mm}$, 受力如图 2-2(a) 所示, $F = 30 \text{ kN}$ 。材料的 $E = 200 \text{ GPa}$ 。试求: (1) 绘出杆的轴力图; (2) 计算杆内各段横截面上的正应力; (3) 计算自由端 A 的轴向位移。

解 (1) 由受力图可得出各段的轴力

$$N_1 = -15 \text{ kN}$$

$$N_2 = 15 \text{ kN}$$

$$N_3 = -15 \text{ kN}$$

杆的轴力图如图 2-2(b) 所示。

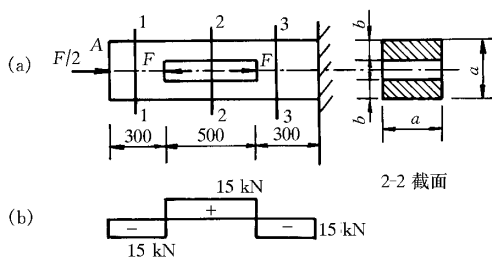


图 2-2

(2) 各段的应力

$$\sigma_{1-1} = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{15 \times 10^3}{30 \times 30} = -16.67 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{2-2} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{15 \times 10^3}{30 \times 20} = 25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{3-3} = \frac{N_3}{A_3} = -\frac{15 \times 10^3}{30 \times 30} = -16.67 \text{ MPa}$$

(3) A 端的轴向位移即为杆的轴向变形

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta l = \frac{N_1 l_1}{EA_1} + \frac{N_2 l_2}{EA_2} + \frac{N_3 l_3}{EA_3} \\ &= \frac{-15 \times 10^3 \times 300}{200 \times 10^3 \times 30 \times 30} + \frac{15 \times 10^3 \times 500}{200 \times 10^3 \times 30 \times 20} + \frac{-15 \times 10^3 \times 300}{200 \times 10^3 \times 30 \times 30} \\ &= 0.0125 \text{ mm} (\leftarrow) \end{aligned}$$

也可由应力利用虎克定律计算出应变,进而算出变形和位移。

例 2-2 图 2-3(a)所示结构, AC 为铝杆, $A_{AC} = 200 \text{ mm}^2$, $l_{AC} = 2.5 \text{ m}$, $E_{AC} = 70 \text{ GPa}$; BC 为钢杆, $A_{BC} = 250 \text{ mm}^2$, $l_{BC} = 4 \text{ m}$, $E_{BC} = 200 \text{ GPa}$ 。载荷 $F = 50 \text{ kN}$ 。试求各杆的应力及节点 C 的位移。

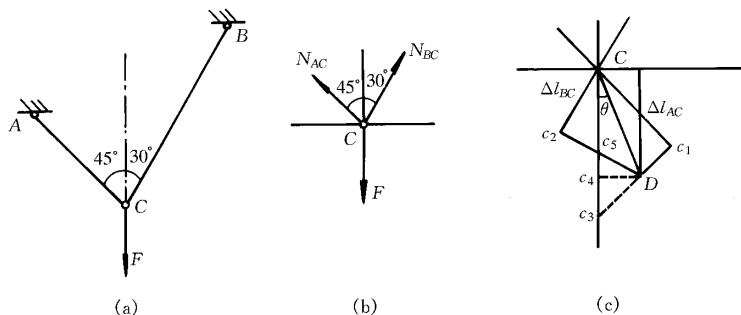


图 2-3

解 (1) 各杆的内力

如图 2-3(b)所示,由节点 C 的平衡得

$$N_{AC} \sin 45^\circ - N_{BC} \sin 30^\circ = 0$$

$$N_{AC} \cos 45^\circ + N_{BC} \cos 30^\circ = F$$

所以

$$N_{AC} = 25.9 \text{ kN}, \quad N_{BC} = 36.6 \text{ kN}$$

(2) 各杆的应力

$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{A_{AC}} = \frac{25.9 \times 10^3}{200} = 129.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{BC}} = \frac{36.6 \times 10^3}{250} = 146.4 \text{ MPa}$$

(3) 各杆的变形

$$\Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} l_{AC}}{E_{AC} A_{AC}} = \frac{25.9 \times 10^3 \times 2.5 \times 10^3}{70 \times 10^3 \times 200} = 4.63 \text{ mm}$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} l_{BC}}{E_{BC} A_{BC}} = \frac{36.6 \times 10^3 \times 4.0 \times 10^3}{200 \times 10^3 \times 250} = 2.93 \text{ mm}$$

(4) 节点 C 的位移

用几何法求节点 C 的位移。在外力作用下,杆 AC 和杆 BC 发生变形,节点 C 产生位移。设想打开铰链 C , AC 杆变形后伸长到 C_1 点, BC 杆变形后伸长到 C_2 点。过 C_1 点作 AC_1 延长线的垂线与过 C_2 点作 BC_2 延长线的垂线交于 D 点, D 点即为节点 C 的新位置,线段 $\overline{CD}$ 为 C 的位移,如图 2-3(c)所示。引入辅助线后,由图中可得

$$\overline{CC_5} = \frac{\Delta l_{BC}}{\cos 30^\circ} = 3.38 \text{ mm}, \quad \overline{CC_3} = \frac{\Delta l_{AC}}{\cos 45^\circ} = 6.55 \text{ mm}$$

$$\overline{C_3 C_4} = \overline{DC_4}, \quad \overline{C_4 C_5} = \overline{DC_4} \tan 30^\circ = \overline{C_3 C_4} \tan 30^\circ$$

$$\overline{C_3 C_4} + \overline{C_4 C_5} = \overline{CC_3} - \overline{CC_5} = 6.55 - 3.38 = 3.17 \text{ mm}$$

所以

$$\overline{DC_4} = \overline{C_3C_4} = 2.01 \text{ mm}, \quad \overline{C_4C_5} = 1.16 \text{ mm}$$

$$\overline{CC_4} = \overline{CC_5} + \overline{C_4C_5} = 3.38 + 1.16 = 4.54 \text{ mm}$$

节点 C 的位移 $\overline{CD} = \sqrt{\overline{CC_4}^2 + \overline{DC_4}^2} = \sqrt{4.54^2 + 2.01^2} = 4.97 \text{ mm}$

节点 C 的位移方向 $\tan \theta = \frac{2.01}{4.54}, \quad \theta = 23.88^\circ$

解题指导

(1) 在应用应力公式和虎克定律公式时, 轴力应取代数值, 计算结果为负, 说明是压应力或是压缩变形。(2) 用几何法求节点位移, 实际是工程近似的方法。理论上, 计算节点位移时, 应由两杆伸长后的长度为半径画圆弧, 两个圆弧的交点即为节点新的位置。但由于杆件的变形与杆件的原始长度相比非常微小, 因此严格计算往往相当困难。应用上述几何法, 实际上是用“切线代替圆弧”, 几何法简单易行, 而且计算结果完全满足工程要求。读者利用初等几何知识, 还可得到许多简便的方法。

例 2-3 一石柱桥墩如图 2-4(a) 所示, 压力 $F = 1\,000 \text{ kN}$, 石料的单位体积重量 $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$, 许用压应力 $[\sigma] = 1 \text{ MPa}$ 。试比较下列三种情况下所需的石料体积。(1) 等截面石柱;(2) 三段等长度的阶梯石柱;(3) 等强度石柱(柱的每个横截面的应力都等于许用应力 $[\sigma]$)。

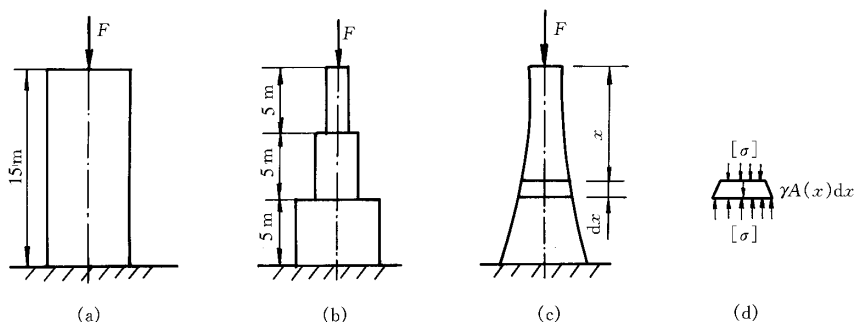


图 2-4

解 (1) 等截面石柱

如图 2-4(a) 所示, 设横截面面积为 A , 下端截面是危险截面, 轴力为 $N = F + \gamma Al$ 。由石柱的强度条件

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F + \gamma Al}{A} = \frac{F}{A} + \gamma l \leq [\sigma]$$

得横截面面积

$$A = \frac{F}{[\sigma] - \gamma l} = \frac{1\,000 \times 10^3}{1 \times 10^6 - 25 \times 10^3 \times 15} = 1.6 \text{ m}^2$$

石柱体积

$$V_1 = Al = 1.6 \times 15 = 24 \text{ m}^3$$

(2) 三段等长度的阶梯石柱

如图 2-4(b) 所示, 各段下端截面的轴力分别为

$$N_1 = F + \gamma A_1 l_1, \quad N_2 = F + \gamma A_1 l_1 + \gamma A_2 l_2, \quad N_3 = F + \gamma A_1 l_1 + \gamma A_2 l_2 + \gamma A_3 l_3$$

由石柱的强度条件得出各段的面积

$$A_1 = \frac{F}{[\sigma] - \gamma l_1} = \frac{1\,000 \times 10^3}{1 \times 10^6 - 25 \times 10^3 \times 5} = 1.14 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{F + \gamma A_1 l_1}{[\sigma] - \gamma l_2} = \frac{1\,000 \times 10^3 + 25 \times 10^3 \times 1.14 \times 5}{1 \times 10^6 - 25 \times 10^3 \times 5} = 1.31 \text{ m}^2$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{F + \gamma A_1 l_1 + \gamma A_2 l_2}{[\sigma] - \gamma l_3} \\ &= \frac{1\,000 \times 10^3 + 25 \times 10^3 \times 1.14 \times 5 + 25 \times 10^3 \times 1.31 \times 5}{1 \times 10^6 - 25 \times 10^3 \times 5} = 1.49 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

石柱体积

$$V_2 = (A_1 + A_2 + A_3) l_1 = (1.14 + 1.31 + 1.49) \times 5 = 19.7 \text{ m}^3$$

(3)等强度石柱

如图 2-4(c)所示,等强度石柱的每一个横截面上的正应力都等于许用应力 $[\sigma]$,由于各截面上轴力不同,因而横截面面积随 x 而变化,即

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} = [\sigma]$$

在石柱中截取 dx 微段,其上截面(即 x 截面)的面积为 $A(x)$,下截面(即 $x+dx$ 截面)的面积为 $A(x)+dA(x)$,微段石柱的受力情况如图 2-4(d)所示。

由微段石柱的平衡得

$$[A(x) + dA(x)][\sigma] = A(x)[\sigma] + \gamma A(x)dx$$

即

$$dA(x)[\sigma] = \gamma A(x)dx$$

$$\frac{dA(x)}{A(x)} = \frac{\gamma}{[\sigma]}dx$$

设顶端截面($x=0$)的面积为 A_0 ,对上式进行积分,得 x 截面的面积为

$$A(x) = A_0 e^{\frac{\gamma}{[\sigma]}x}$$

顶端截面积

$$A_0 = \frac{F}{[\sigma]} = \frac{1\,000 \times 10^3}{1 \times 10^6} = 1 \text{ m}^2$$

石柱下端截面积

$$A(l) = A_0 e^{\frac{\gamma}{[\sigma]}l} = 1 \times e^{\frac{25 \times 10^3 \times 15}{1 \times 10^6}} = 1.45 \text{ m}^2$$

石柱的体积可由积分求得。

下面用另一种简便的方法来求解：

石柱下端截面的轴力为 $N(l) = F + G$,式中 G 为石柱的自重, $G = \gamma V_3$ 。

由石柱下端截面强度条件得

$$\sigma = \frac{F + G}{A(l)} = [\sigma]$$

所以

$$G = [\sigma]A(l) - F$$