

高等学校函授教材
(兼作高等教育自学用书)

材料力学

(下 册)

顾志荣 吴永生 主编

同济大学出版社

内 容 提 要

全书分上、下两册出版。上册内容包括：绪论、拉伸与压缩、剪切、扭转、弯曲内力和应力、平面图形几何性质和附录。下册内容包括：弯曲变形、能量法、应力状态理论基础、强度理论、组合变形时杆件的强度计算、压杆稳定、动荷载、交变应力。

本书具有叙述详细、通顺易懂、例题多、便于自学的特点。本书主要用作高等学校多学时土建类专业的函授教材，兼作同类专业高等教育自学考试通用教材，也可作夜大、电视大学、职工大学同类专业的教材。

前 言

按照高等工业学校多学时土建类《材料力学函授教学大纲》的精神和要求,根据编者在同济大学长期从事函授教学所积累的经验,并考虑到函授和成人教育的规律及特点,我们编写了这套土建类多学时材料力学函授教材。

函授教材是函授学生获得知识的主要来源。根据函授生“在职、业余、分散”的特点和函授教育以“自学为主”的教学规律,要求函授教材要起到“无师自通”的主导作用。因此,我们在编写此书时,在教材内容的安排上力求做到由浅入深、循序渐进、标题醒目、层次分明;在叙述上,力求做到详细、通顺,并注意讲透重点,突破难点,抓住关键,总结规律。本书是将教学内容、例题与习题、学习方法指导、阶段测验作业等融合在一起的函授和成人教育的专用教材。本书适用于工业与民用建筑、道路、桥梁、地下工程等多学时的土建类专业的函授生,也可供全日制大学、电视大学、职工大学的同类专业的师生和自学考试人员及一般工程技术人员使用和参考。

本书由顾志荣、吴永生主编。全书分上、下两册,共十五章,其中第二章由陆荣林编写;第三、第四章由解明芳编写;第八、第九章由郭明华编写;第十、第十一章由陈荣康编写;其余各章由顾志荣编写;全书由吴永生校阅。

编者

1997年5月19日

下册目录

第八章 弯曲变形	(1)
第一节 弯曲变形的概念.....	(1)
第二节 梁的挠曲线近似微分方程及其积分.....	(3)
第三节 积分法求梁的变形.....	(6)
第四节 积分常数的确定	(18)
第五节 叠加法求梁变形	(36)
第六节 简单超静定梁的解法	(57)
第七节 梁的刚度计算	(67)
第八节 学习方法指导	(74)
习 题	(76)
第九章 能量法	(82)
第一节 外力功	(82)
第二节 变形能	(89)
第三节 利用功能原理计算位移	(99)
第四节 求位移的卡氏定理.....	(103)
第五节 学习方法指导	(122)
习 题	(125)
第六次测验作业	(131)
第十章 应力状态理论基础	(133)
第一节 应力状态的概念.....	(133)
第二节 平面应力状态分析(数解法).....	(138)
第三节 平面应力状态分析(图解法).....	(149)
第四节 主应力 主平面.....	(158)
第五节 三向应力状态.....	(173)

第六节	广义虎克定律	(184)
第七节	三向应力状态下的变形能	(198)
第八节	弹性常数 E, G, μ 间的关系	(205)
第九节	学习方法指导	(206)
习 题		(210)
第十一章	强度理论	(220)
第一节	强度理论的概念	(220)
第二节	常用的四种强度理论	(225)
第三节	莫尔强度理论	(239)
第四节	学习方法指导	(248)
习 题		(250)
	第七次测验作业	(253)
第十二章	组合变形时杆件的强度计算	(255)
第一节	组合变形的概念	(255)
第二节	组合变形分析中外力的简化与分解	(256)
第三节	斜弯曲	(262)
第四节	拉伸(压缩)与弯曲的组合变形	(276)
第五节	偏心压缩(拉伸)	(285)
第六节	弯曲与扭转的组合变形	(306)
第七节	组合变形的一般情况	(314)
第八节	学习方法指导	(323)
习 题		(329)
	第八次测验作业	(341)
	第九次测验作业	(343)
第十三章	压杆稳定	(344)
第一节	压杆稳定的概念	(344)
第二节	两端铰支细长压杆的临界力	(347)
第三节	杆端约束的影响	(349)
第四节	临界力的计算	(355)

第五节	压杆的稳定计算(一)——稳定安全系数法	(368)
第六节	压杆的稳定计算(二)——折减系数法	(374)
第七节	学习方法指导	(383)
习 题		(385)
第十四章	动荷载	(394)
第一节	等加速度运动构件的应力计算	(394)
第二节	杆件受到冲击荷载作用时的应力和变形计算 ...	(405)
第三节	学习方法指导	(419)
习 题		(421)
第十五章	交变应力	(427)
第一节	交变应力的概念	(427)
第二节	疲劳破坏的概念	(429)
第三节	材料的持久极限	(431)
第四节	影响持久极限的因素	(435)
第五节	疲劳强度计算	(439)
第六节	学习方法指导	(450)
习 题		(452)
第十次测验作业		(453)

第八章 弯曲变形

梁受到外力作用后,原为直线的轴线将弯曲成一条曲线(图 8-1)。梁的各个横截面在空间的位置也随即发生了改变,产生了位移。材料力学把梁的这种位移习惯地叫做“弯曲变形”或“梁的变形”。

研究梁的变形主要有两个目的:(1) 对梁作刚度计算;(2) 为解超静定梁建立必要的基础。

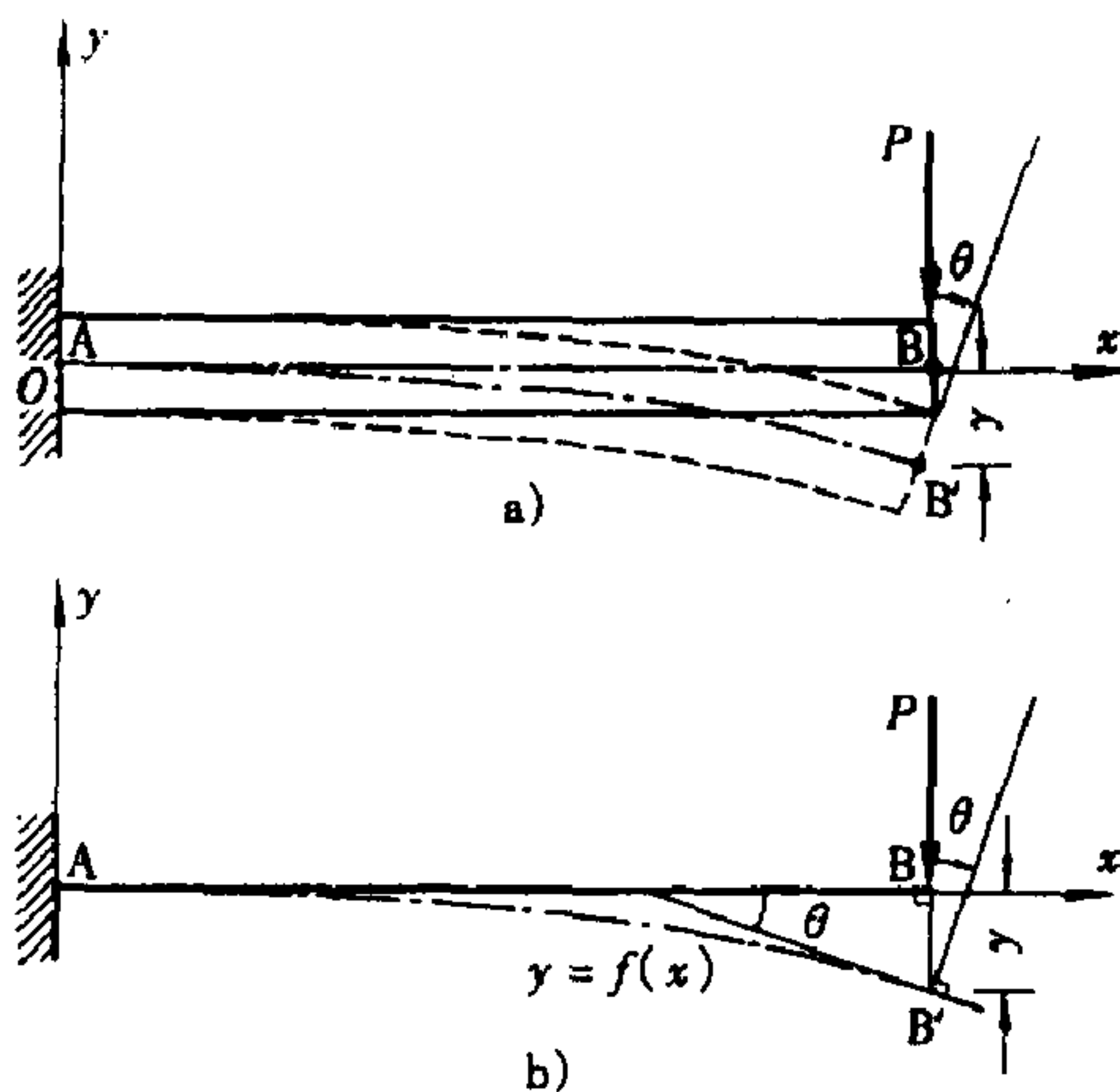


图 8-1

第一节 弯曲变形的概念

一、挠度和转角

梁的变形是通过梁的横截面的位移即挠度和转角来度量的。

(1) 挠度 梁弯曲变形时,轴线上的各点(即各横截面的形心)将

产生位移。例如梁轴的右端 B 点(图 8-1),在梁弯曲后移动到 B'点, $\overline{BB'}$ 就是 B 点的线位移。不难看出, B'点已偏离了通过 B 点的竖直线, 因此, B 点的位移 $\overline{BB'}$ 既包含了 B 点的竖直位移, 又包含了 B 点的水平位移。但由于工程中梁的位移一般甚微, 梁弯曲变形后的轴线是一条非常平坦的曲线, 梁的水平位移可以略去不计, 因此, 可以认为梁在弯曲变形时, 梁轴上的点仅发生竖直位移。工程中将梁轴线上的任意点在垂直于梁轴(x)方向的竖直位移称为该点所在横截面的挠度, 通常用 y 表示。它的单位与长度单位一致。

(2) 转角 梁发生弯曲变形时, 横截面还会绕中性轴发生转动(图 8-1)。工程中将横截面在弯曲变形时转动的角度称为转角, 通常用 θ 表示。它的单位是弧度或度。

挠度和转角是度量梁变形的两个基本量。计算梁的变形问题, 实际上就是计算梁变形后各截面的挠度和转角的问题。

二、梁的挠曲线的概念

梁在发生弯曲变形后, 原为直线的梁轴将弯成一条曲线。弯曲后的梁轴线就称为梁的挠曲线, 有时也称为梁的挠曲轴或梁的弹性曲线。

当梁发生平面弯曲时, 梁的挠曲线可用方程

$$y = f(x)$$

来表示。我们只要建立了梁的挠曲线方程 $y = f(x)$ 后, 就可以计算出梁的任意截面的挠度值。

根据平面假设, 梁的横截面在梁弯曲前垂直于轴线, 弯曲变形后将垂直于挠曲线的切线(图 8-1)。因此, 截面转角 θ 就是挠曲线在该截面处的法线与 y 轴的夹角, 它等于挠曲线的倾角——挠曲线的切线与 x 轴的夹角。故

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta(x)$$

因为梁的挠曲线通常是一条非常平坦的曲线, 因而转角 θ 的值也是非常微小的, 所以 $\tan \theta \approx \theta$, 即

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx}$$

由此可知,挠曲线上任一点处的切线斜率 $\frac{dy}{dx}$ 就等于该截面的转角。显然,只要求得了挠曲线方程 $y = f(x)$,再将其微分一次,便得到了转角方程 $\theta(x)$ 。

可见,计算梁的变形(即挠度和转角),关键在于确定挠曲线方程。有关建立挠曲线方程的内容将在下一节进行深入的讨论。

第二节 梁的挠曲线近似微分方程及其积分

一、符号规定

在计算梁的变形时,为了确定挠度的方向和转角的转向,本书对坐标系的建立、弯矩的正负、挠度与转角的正负,作如下统一的规定(图 8-2):

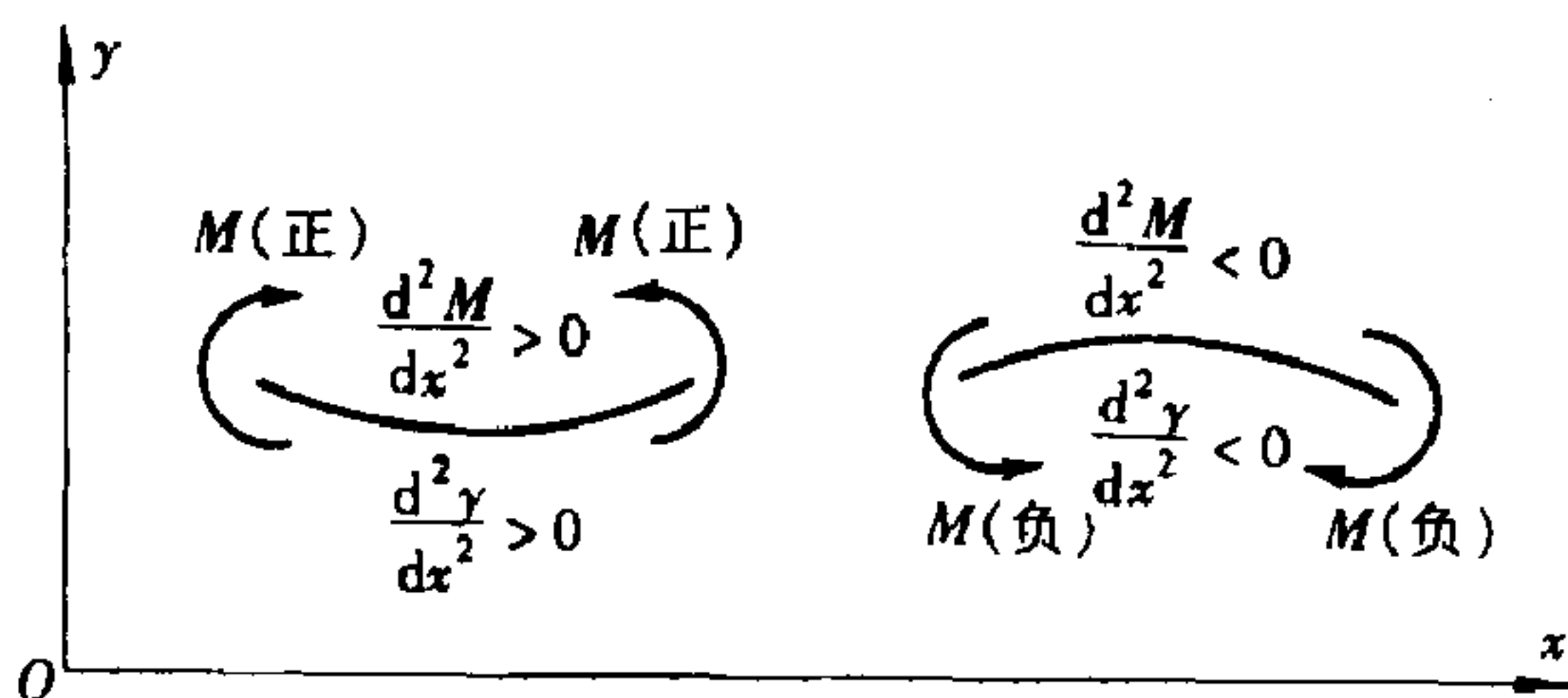


图 8-2

(1) 坐标系的建立 坐标原点一般设在梁的左端。并规定:以变形前的梁轴线为 x 轴,向右为正;以 y 轴代表挠曲线的纵坐标(挠度),向上为正。

(2) 弯矩的正负 弯矩的正负仍按本书前述规定,即正弯矩使梁的轴线弯成向下凸(∪)的曲线;负弯矩使梁的轴线弯成向上凸(∩)的曲线。

(3) 挠度的正负 规定向上的挠度为正,向下的挠度为负。

(4) 转角的正负 规定逆时针转向的转角为正, 顺时针转向的转角为负。

二、梁的挠曲线近似微分方程

我们在第七章中曾得到梁在纯弯曲时中性层的曲率表达式,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

我们知道, 对于纯弯曲的梁, 其变形完全由弯矩所引起, 因各截面的弯矩 M 是一常数, 故曲率 $\frac{1}{\rho}$ 亦为一常数, 挠曲线是半径为 ρ 的圆弧。在横力弯曲时, 由于剪力对梁的变形影响很小, 可以忽略不计, 所以上式也可以推广应用于一般横力弯曲的梁。不过, 这时弯矩与挠曲线的曲率半径均随截面位置的改变而变化, 它们都是 x 的函数。图 8-3 就表示了由于弯矩 $M(x)$ 的改变, 而使梁轴的曲率半径 $\rho(x)$ 变化的情况。所以对于一般横力弯曲的梁, 为了表达它的挠曲线的曲率变化规律, 需要将上式改写为

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI} \tag{a}$$

式中, $\rho(x)$ 为离坐标原点 x 处梁的挠曲线的曲率半径, $M(x)$ 为该梁的弯矩方程, EI 为梁的抗弯刚度。

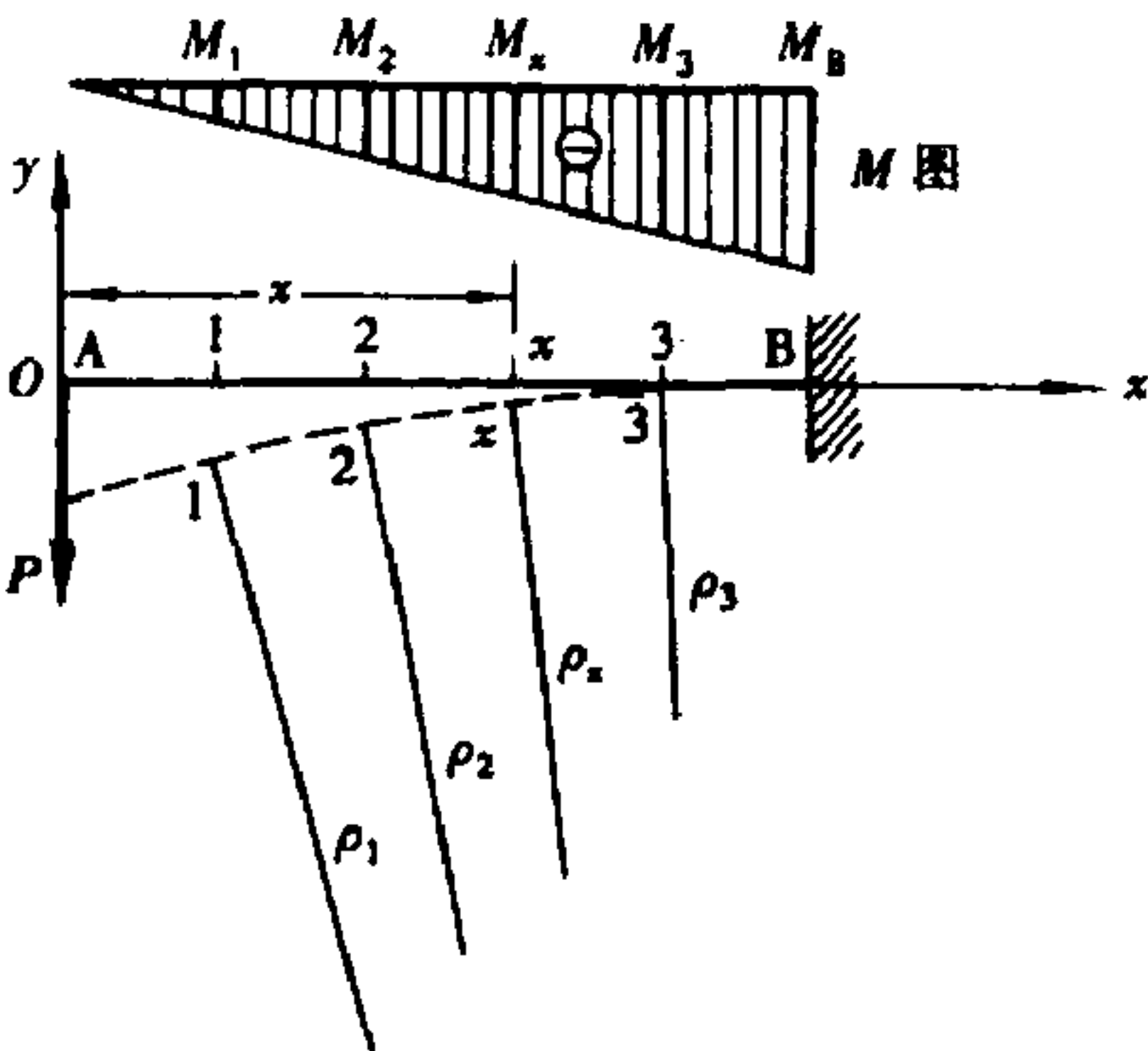


图 8-3

另一方面, 由高等数学可知, 曲线的曲率与曲线方程之间存在

下列关系：

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}} \quad (b)$$

将式(b)代入式(a), 即得

$$\pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}} = \frac{M(x)}{EI} \quad (c)$$

这就是在没有考虑剪力影响的情况下梁的挠曲线微分方程。式中, $y = f(x)$ 是梁的挠曲线方程。

式(c)所表示的梁的挠曲线微分方程, 既适用于小挠度的情况, 也适用于大挠度的情况。但要具体求解此方程则是很复杂的, 因此, 它不利于实际的应用。由于材料力学研究的是小变形问题, 而工程中遇到的绝大多数情况是梁截面的转角很小, 也就是说 $\frac{dy}{dx}$

值甚微, 因此 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 的值远小于 1, 可略去不计。于是式(c)就可写为

$$\pm \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (d)$$

式中左边的正负号, 取决于坐标系的选择和弯矩正负的规定。由于按本书的符号规定(图 8-2), 挠曲线方程 $y = f(x)$ 的二阶导数的正负与弯矩 $M(x)$ 的正负是一致的, 因此, 式(d)中的负号可以省去, 写成

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (8-1)$$

由于式(8-1)只适用于弹性范围内的小变形情况, 而且不考虑剪力的影响, 又略去了挠曲线微分方程(c)中的 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 项, 因此, 式

(8-1)称为梁的挠曲线近似微分方程。

三、挠曲线近似微分方程的积分

为了从梁的挠曲线近似微分方程求得挠曲线方程 $y = f(x)$ ，必须将方程式(8-1)积分。因为 $M(x)$ 是 x 的函数，所以对式(8-1)积分一次便得到转角方程

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left[\int M(x) dx + C \right] \quad (8-2)$$

对式(8-1)积分两次，即得梁的挠曲线方程

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left\{ \iint \left[\int M(x) dx \right] dx + Cx + D \right\} \quad (8-3)$$

以上两式中的 C, D 都是积分常数，它们可以通过梁在其支座处的已知挠度和已知转角来确定。这种已知的条件称为边界条件。例如，图 8-4 所示的简支梁，左、右两支座处的挠度 y_A 和 y_B 均为零，即 $y_A = 0, y_B = 0$ ；这就是已知的边界条件；图 8-5 所示的悬臂梁，固定端处的挠度 y_A 和转角 θ_A 均等于零，即 $y_A = 0, \theta_A = 0$ ，这也是已知的边界条件。关于利用边界条件确定积分常数 C, D 的具体方法，将在以下各例题中加以说明。

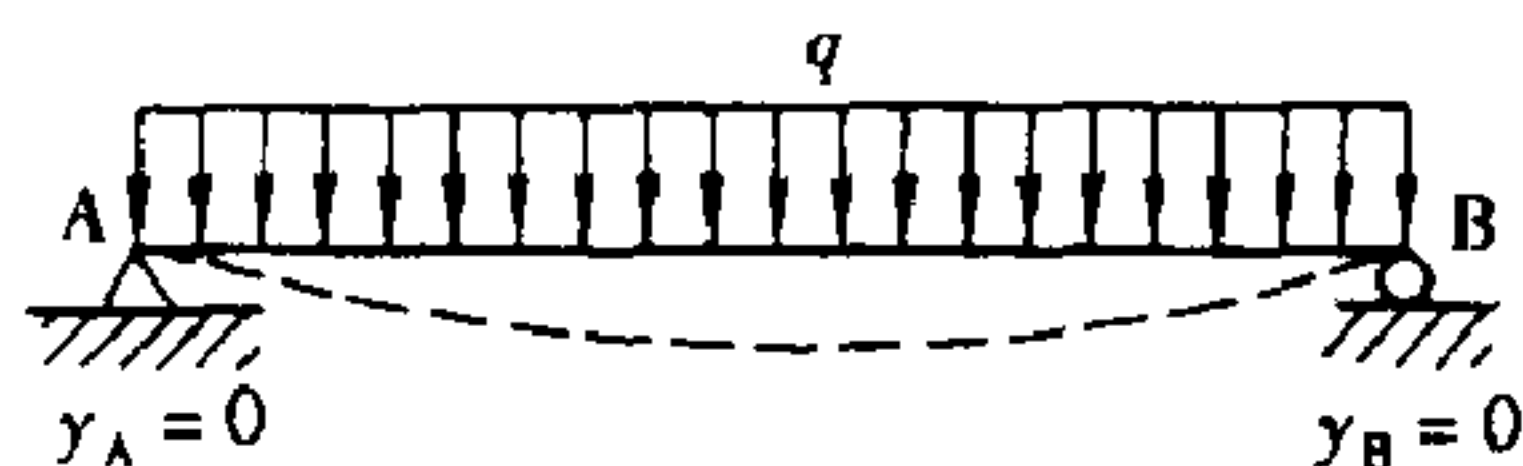


图 8-4



图 8-5

第三节 积分法求梁的变形

通过上面的分析可知，若将弯矩方程 $M(x)$ 代入梁的挠曲线近似微分方程式(8-1)，然后对其积分两次，再通过已知的边界条件确定积分常数，最后从得到的转角方程和挠曲线方程中就可求

出任意截面的转角和挠度值,这种求梁变形的方 法,一般称为积分法,它是求梁变形的一种基本方法。

例 8-1 图 8-6 所示为一悬臂梁,在其自由端受一集中力 P 的作用。试求此梁的转角方程和挠曲线方程,并求出 A 截面与 C 截面的转角和挠度。

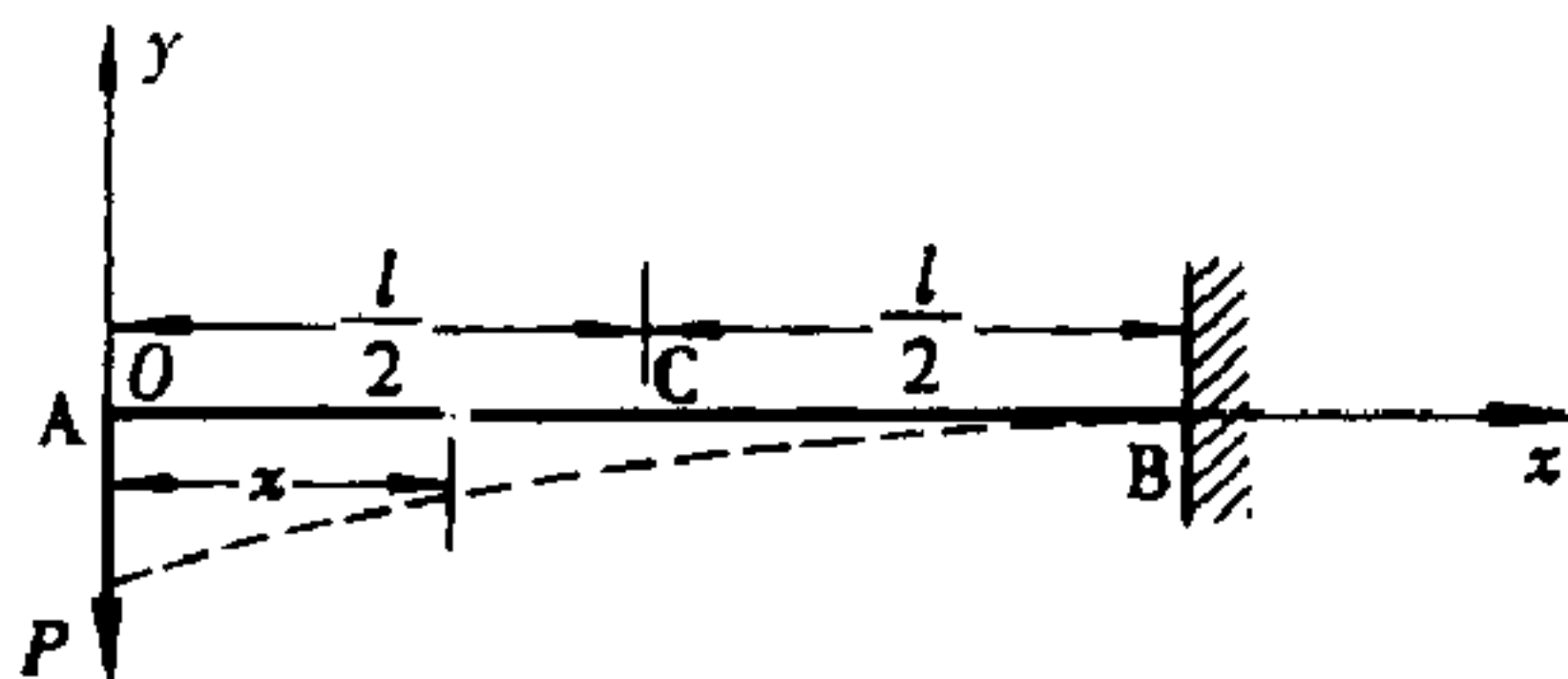


图 8-6

解 (1) 建立坐标系,如图 8-6 所示。写出梁的弯矩方程式:

$$M(x) = -Px$$

(2) 建立挠曲线近似微分方程,并对其积分两次:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{1}{EI}(-Px)$$

积分一次,得

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{Px^2}{2} + C\right) \quad (a)$$

再积分一次,得

$$y(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{Px^3}{6} + Cx + D\right) \quad (b)$$

(3) 利用边界条件确定积分常数 两个积分常数可由固定端的两个边界条件来确定,即

当 $x = l$ 时, $\theta_B = 0$, 代入式(a)得

$$C = \frac{Pl^2}{2}$$

当 $x = l$ 时, $y_B = 0$, 代入式(b):

$$\frac{1}{EI}\left(-\frac{Pl^3}{6} + \frac{Pl^2l}{2} + D\right) = 0$$

得

$$D = -\frac{Pl^3}{3}$$

(4) 建立梁的转角方程和挠曲线方程 将积分常数 $C = \frac{Pl^2}{2}$

和 $D = -\frac{Pl^3}{3}$ 代入式(a)和式(b), 使得梁的转角方程和挠曲线方程:

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{Px^2}{2} + \frac{Pl^2}{2} \right) \quad (c)$$

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{Px^3}{6} + \frac{Pl^2}{2}x - \frac{Pl^3}{3} \right) \quad (d)$$

(5) 求指定截面处的转角和挠度 为了求得 A 截面和 C 截面的转角和挠度值, 只要把它们的位置坐标 $x=0$ 和 $x=l/2$ 分别代入式(c)和式(d)即可。

当 $x=0$ 时

$$\theta_A = \frac{Pl^2}{2EI}, \quad y_A = -\frac{Pl^3}{3EI}$$

当 $x = \frac{l}{2}$ 时

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \left[-\frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} + \frac{Pl^2}{2} \right] = \frac{3Pl^2}{8EI}$$

$$y_C = \frac{1}{EI} \left[-\frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6} + \frac{Pl^2}{2} \times \frac{l}{2} - \frac{Pl^3}{3} \right] = -\frac{5Pl^3}{48EI}$$

计算的结果表明, 挠度均为负值, B, C 两截面都向下位移。而转角均为正值, B, C 两截面在梁变形都绕中性轴沿逆时针方向转动。

例 8-2 求图 8-7 所示梁的挠曲线方程、转角方程以及自由端的转角和挠度。

解 (1) 建立坐标系, 如图 8-7 所示。坐标原点仍设在梁的左端。列弯矩方程:

$$M(x) = R_A x - m_A = Px - Pl$$

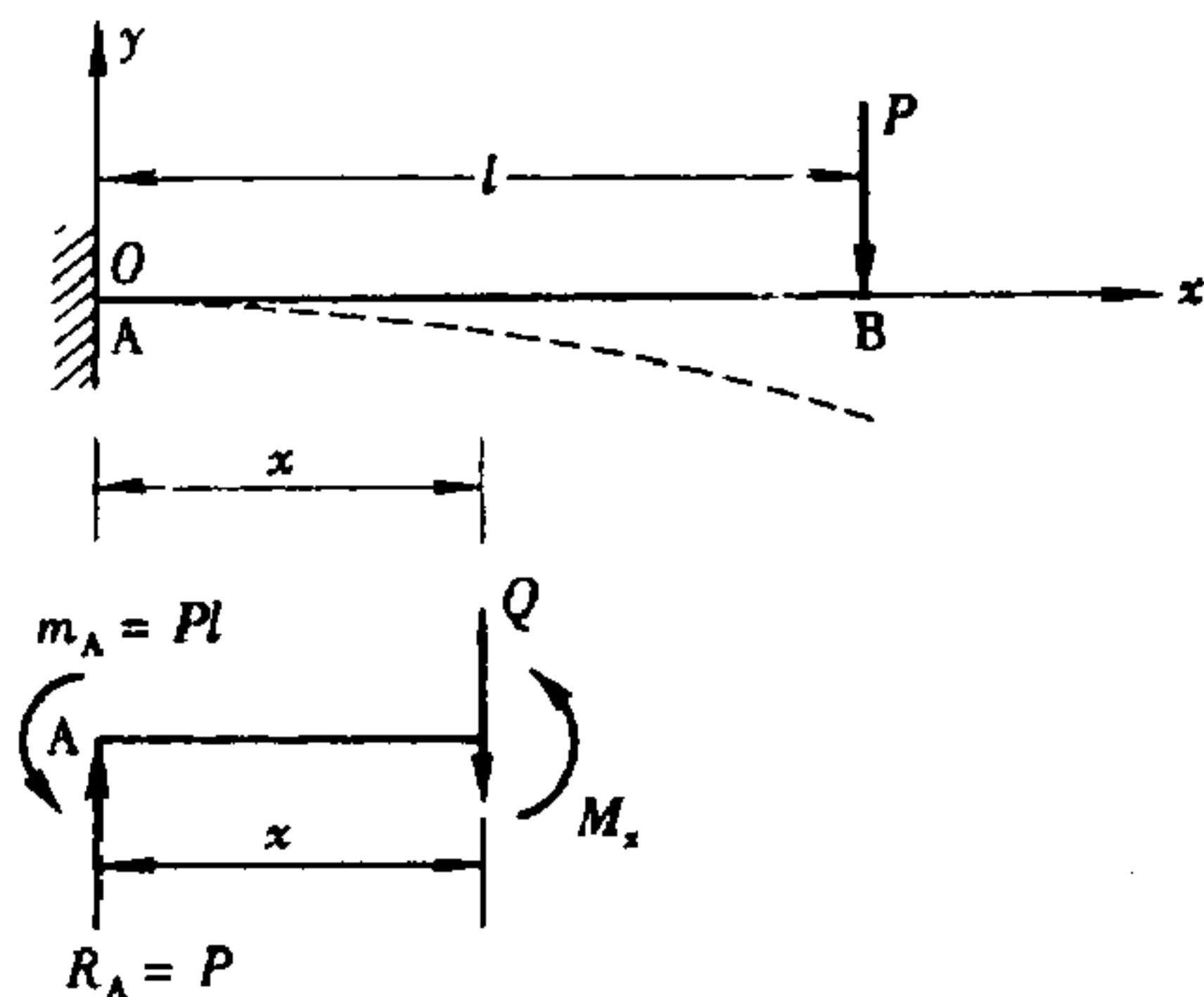


图 8-7

(2) 建立梁的挠曲线近似微分方程,并对其进行积分两次:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{1}{EI} (Px - Pl)$$

积分一次,得

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left(\frac{Px^2}{2} - Plx + C \right) \quad (a)$$

再积分一次,得

$$y(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{Px^3}{6} - \frac{Pl}{2} x^2 + Cx + D \right) \quad (b)$$

(3) 利用边界条件确定积分常数 两个积分常数 C 和 D 也可由固定端的两个边界条件来确定,即

当 $x = 0$ 时, $\theta_A = 0$, 代入式(a)

得 $C = 0$

当 $x = 0$ 时, $y_A = 0$, 代入式(b)

得 $D = 0$

(4) 建立梁的转角方程和挠曲线方程 将积分常数 $C = 0$ 和 $D = 0$ 代入方程式(a)和式(b), 使得梁的转角方程和挠曲线方程分别为:

$$\theta(x) = \frac{P}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - lx \right) \quad (c)$$

$$y(x) = \frac{P}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{l}{2} x^2 \right) \quad (d)$$

(5) 求 θ_B, y_B

当 $x = l$ 时, 代入方程式(c)

得
$$\theta_B = -\frac{Pl^2}{2EI}$$

当 $x = l$ 时, 代入方程式(d)

得
$$y_B = -\frac{Pl^3}{3EI}$$

(6) 分析与讨论

① 通过例 8-1 和例 8-2 的计算, 其所得的结果实际上是一致的, 只是转角的正负号不同, 那是符合实际变形情况的(见图 8-6 和图 8-7)。

② 我们比较这两个例子的结果, 还可以看到两例中的积分常数 C 和 D 并不对应地相等, 那是什么原因呢? 这要从积分常数所代表的几何意义来分析。我们知道, 积分常数 C, D 是根据已知的边界条件代入转角方程(a)和挠曲线方程(b)中而求得的。但从方程(a)、(b)可以看出, 若用 θ_0 和 y_0 分别代表 $x = 0$ 时, 坐标原点(梁的左端)处截面的转角和挠度值则为

$$EI\theta_0 = C \text{ 和 } EIy_0 = D$$

也就是说, 坐标原点处截面转角 θ_0 的 EI 倍就是积分常数 C , 坐标原点处截面的挠度 y_0 的 EI 倍就是积分常数 D 。这在例 8-1 和例 8-2 中都已得到了证实:

在例 8-1 中, 有

$$\theta_0 = \theta_A = \frac{Pl^2}{2EI}, \quad \text{故} \quad C = EI\theta_0 = \frac{Pl^2}{2}$$

$$y_0 = y_A = -\frac{Pl^3}{3EI}, \quad \text{故} \quad D = EIy_0 = -\frac{Pl^3}{3}$$

在例 8-2 中,有

$$\theta_0 = \theta_A = 0, \quad \text{故} \quad C = 0$$

$$y_0 = y_A = 0, \quad \text{故} \quad D = 0$$

例 8-3 图 8-8 所示简支梁,承受均布荷载 q 作用。试求此梁的挠曲线方程和转角方程,并求最大挠度 $y_{\max}$ 和最大转角 $\theta_{\max}$ 的计算式。

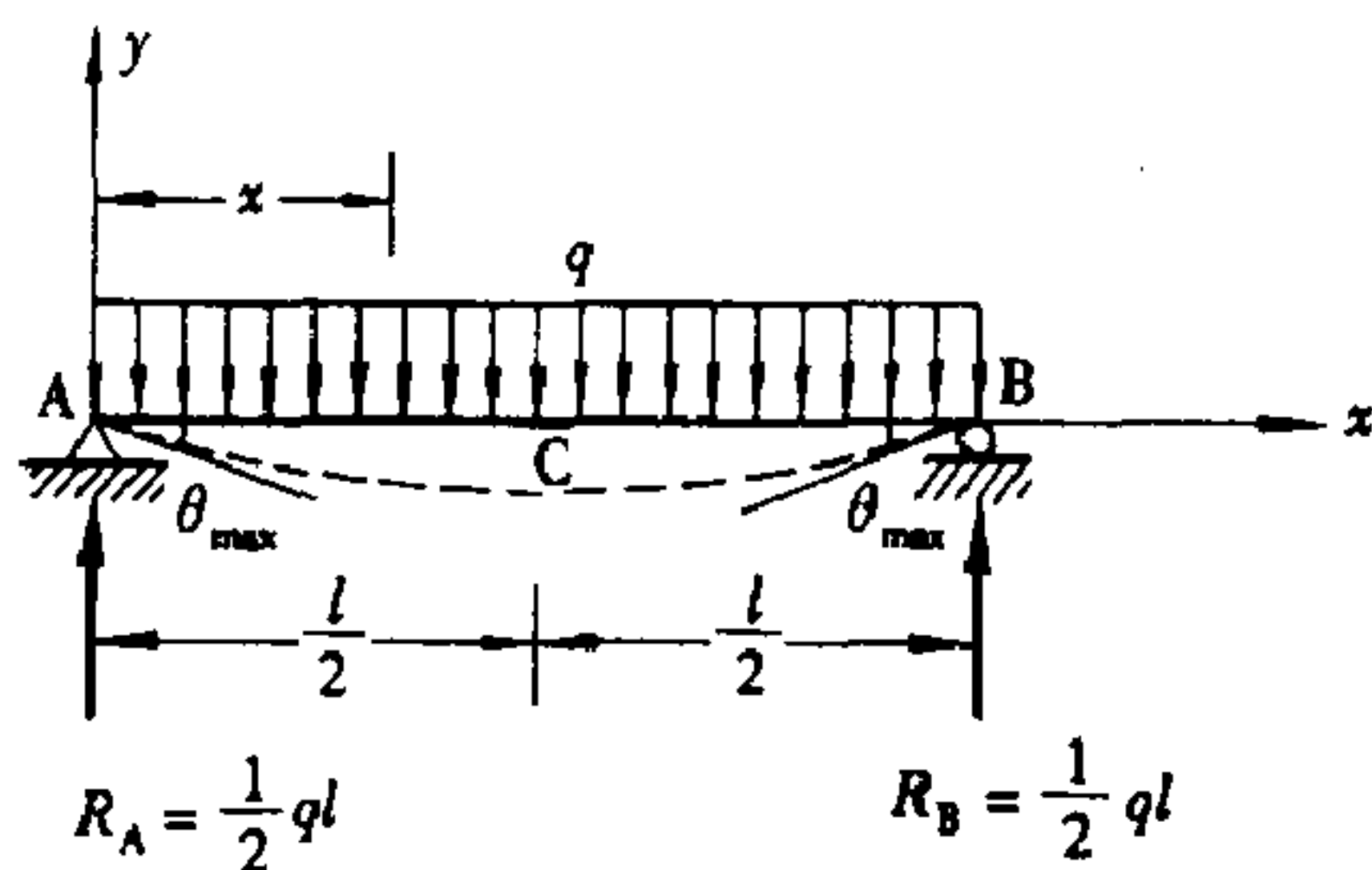


图 8-8

解 (1) 建立坐标系,如图 8-8 所示。列出梁的弯矩方程:

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

(2) 建立挠曲线近似微分方程,并对其积分两次:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right)$$

积分一次,得

$$\theta_{(x)} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left(\frac{ql}{4}x^2 - \frac{qx^3}{6} + C \right) \quad (a)$$

再积分一次,得

$$y_{(x)} = \frac{1}{EI} \left(\frac{ql}{12}x^3 - \frac{qx^4}{24} + Cx + D \right) \quad (b)$$

(3) 利用边界条件确定积分常数

在 A 支座 ($x=0$) 处, $y_A=0$, 代入式(b)