

## 内 容 简 介

本书以材料力学课程教学基本要求的内容为主,共分 14 章:轴向拉伸与压缩;剪切;扭转;截面的几何性质;弯曲内力;弯曲应力;弯曲变形;应力、应变分析;强度理论;组合变形;塑性极限分析;能量法;压杆稳定;动载荷与交变应力。每章均包括“内容提要”和“习题解析”两部分。其中:“内容提要”以提纲挈领的形式,列出该章的基本概念和基本公式,以及相关的物理意义和注意事项,可作为学习该章的小结;“习题解析”选取较为典型、概念性强、具有一定启发思考性和扩展性的习题 400 余道,每道习题均予以解答,在解答中着重解题思路和分析讨论,而适当简化数字运算过程。

本书可供高等院校工科各专业本科生,参加函授、远程教育和高等教育自学考试以及报考硕士研究生的学生选用;也可作为研究生、教师和科技工作者的参考书。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

### 图书在版编目(CIP)数据

材料力学学习题解析/胡增强编. —北京:清华大学出版社,2005.2

(高等院校力学学习辅导丛书)

ISBN 7-302-09449-7

I. 材… II. 胡… III. 材料力学—高等学校—解题 IV. TB301-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 091440 号

出 版 者:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

客户服务:010-62776969

责任编辑:杨 倩

印 刷 者:北京世界知识印刷厂

装 订 者:三河市金元装订厂

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:175×245 印张:36 插页:1 字数:722 千字

版 次:2005 年 3 月第 1 版 2006 年 5 月第 2 次印刷

书 号:ISBN 7-302-09449-7/O·403

印 数:4001~7000

定 价:39.80 元

---

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770175-3103 或(010)62795704

# 序 言

材料力学课程是一门与机械、土建、交通、航空等工程实际密切相关的技术基础课。学习材料力学,一是要理解材料力学的基本概念,掌握基本理论和基本方法;二是要重视实践,掌握材料力学的解题思路及其工程应用。通过分析、演算一定数量的习题,加深对基本概念的理解,以及对基本理论和基本方法的应用,从而培养分析、解决工程实际问题的能力,并扩展、延伸知识面。希望本书能有助于激发学生自主学习的积极性,提高学生的分析、综合和创新能力。

本书以材料力学课程教学基本要求的内容为主,共分为 14 章:轴向拉伸与压缩;剪切;扭转;截面的几何性质;弯曲内力;弯曲应力;弯曲变形;应力、应变分析;强度理论;组合变形;塑性极限分析;能量法;压杆稳定;动载荷与交变应力。每章均包括“内容提要”和“习题解析”两部分。其中:

“内容提要”以提纲挈领的形式,列出该章的基本概念和基本公式,以及相关的物理意义和注意事项。这一部分既是对该章内容的归结,也是对该章主要概念和公式的强调。希望有益于对基本概念、基本公式的理解和巩固。

“习题解析”选编了一些较为典型、概念性较强、具有一定启发思考性和扩展性的习题。每道习题均予以解答,在解答中着重于解题思路和分析讨论,而适当简化数字运算过程。为此,每道习题的解答都列出了解题步骤,并叙述解题所依据的概念和方法;分析讨论中包含有该题的不同解法、工程应用或所涉及概念的延伸等内容。本书习题的编号按章、节的序号编排,以便于读者阅读、查找和与相关理论的对照。习题中带有 \* 号的习题(约占习题总量的 25%),主要是一些概念性较深、综合性较强、难度较大或带有扩展性的题目,以供教学要求较高、学有余力并有兴趣的读者参考。希望通过这些习题,能够藉以深化理解、拓展视野、提高求解能力和工程应用能力;

并对学习材料力学的学生以及有志于报考研究生的学生均有所裨益。

最后,本书的附录Ⅳ“材料力学基本内容的回顾”,是对材料力学整个内容的总结,相信读者通过基本内容的回顾表能联想起材料力学的全部内容,而且对材料力学的基本理论和基本方法会有更深入的理解和更清晰的掌握。

值本书出版之际,谨向编写本书所参考的各书的编著者,致以深切的谢意。限于编者水平,书中难免有错漏、不足之处,敬请广大读者和同行专家批评指正。

编 者

2003 年 10 月

# 目 录

|                     |   |
|---------------------|---|
| 第 1 章 轴向拉伸与压缩 ..... | 1 |
|---------------------|---|

[内容提要] [习题解析]

|                          |               |
|--------------------------|---------------|
| 1.1 轴向拉伸(压缩)杆的内力 .....   | (1).....(12)  |
| 1.2 轴向拉伸(压缩)杆的应力 .....   | (2).....(16)  |
| 1.3 材料在拉伸、压缩时的力学性能 ..... | (5).....(22)  |
| 1.4 轴向拉伸(压缩)杆的强度条件 ..... | (7).....(25)  |
| 1.5 轴向拉伸(压缩)杆的变形 .....   | (8).....(31)  |
| 1.6 轴向拉伸、压缩时的静不定问题 ..... | (10).....(45) |

|                |    |
|----------------|----|
| 第 2 章 剪切 ..... | 62 |
|----------------|----|

[内容提要] [习题解析]

|                    |               |
|--------------------|---------------|
| 2.1 剪切及其实用计算 ..... | (62).....(65) |
| 2.2 挤压及其实用计算 ..... | (63).....(72) |
| 2.3 纯剪切的观念 .....   | (64).....(77) |

|                |    |
|----------------|----|
| 第 3 章 扭转 ..... | 84 |
|----------------|----|

[内容提要] [习题解析]

|                         |                |
|-------------------------|----------------|
| 3.1 圆杆扭转时的内力 .....      | (84).....(93)  |
| 3.2 圆杆扭转时的应力 强度条件 ..... | (85).....(95)  |
| 3.3 圆杆扭转时的变形 刚度条件 ..... | (87).....(106) |

|                          |                  |
|--------------------------|------------------|
| 3.4 非圆截面杆的扭转 .....       | ( 89 ).....(120) |
| 3.5 圆柱形密封圈螺旋拉(压)弹簧 ..... | ( 91 ).....(125) |

## 第4章 截面的几何性质..... 130

[内容提要] [习题解析]

|                        |                 |
|------------------------|-----------------|
| 4.1 静矩 形心 .....        | (130).....(135) |
| 4.2 惯性矩 惯性积 惯性半径 ..... | (131).....(138) |
| 4.3 平行移轴定理与转轴公式 .....  | (133).....(143) |
| 4.4 主惯性轴 主惯性矩 .....    | (134).....(148) |

## 第5章 弯曲内力..... 155

[内容提要] [习题解析]

|                                      |                 |
|--------------------------------------|-----------------|
| 5.1 平面弯曲的概念 .....                    | (155).....(159) |
| 5.2 梁横截面上的内力分量 .....                 | (156).....(161) |
| 5.3 载荷集度与剪力、弯矩间的平衡微分关系<br>及其应用 ..... | (157).....(177) |

## 第6章 弯曲应力..... 186

[内容提要] [习题解析]

|                         |                 |
|-------------------------|-----------------|
| 6.1 弯曲正应力 正应力强度条件 ..... | (186).....(193) |
| 6.2 弯曲切应力 切应力强度条件 ..... | (188).....(215) |
| 6.3 开口薄壁截面的弯曲中心 .....   | (191).....(226) |

## 第7章 弯曲变形..... 234

[内容提要] [习题解析]

|                       |                 |
|-----------------------|-----------------|
| 7.1 弯曲变形与位移 .....     | (234).....(239) |
| 7.2 通过积分求梁的位移 .....   | (236).....(242) |
| 7.3 应用叠加原理求梁的位移 ..... | (236).....(252) |
| 7.4 弯曲的静不定问题 .....    | (237).....(264) |

## 第8章 应力、应变分析..... 281

[内容提要] [习题解析]

|                   |                 |
|-------------------|-----------------|
| 8.1 应力状态的概念 ..... | (281).....(290) |
|-------------------|-----------------|

|     |                      |                 |
|-----|----------------------|-----------------|
| 8.2 | 平面应力状态下的应力分析 .....   | (283).....(295) |
| 8.3 | 空间应力状态的概念 .....      | (285).....(307) |
| 8.4 | 平面应力状态下的应变分析 .....   | (287).....(312) |
| 8.5 | 各向同性材料的应力—应变关系 ..... | (289).....(320) |

## 第9章 强度理论..... 334

[内容提要] [习题解析]

|     |                      |                 |
|-----|----------------------|-----------------|
| 9.1 | 强度理论的概念 .....        | (334).....(336) |
| 9.2 | 四个常用的强度理论 .....      | (334).....(337) |
| 9.3 | 莫尔强度理论 强度理论的应用 ..... | (335).....(346) |

## 第10章 组合变形 .....

[内容提要] [习题解析]

|      |                                |                 |
|------|--------------------------------|-----------------|
| 10.1 | 组合变形的概念 .....                  | (350).....(355) |
| 10.2 | 两相互垂直平面内平面弯曲的组合<br>——斜弯曲 ..... | (351).....(358) |
| 10.3 | 轴向拉、压与弯曲的组合 .....              | (353).....(369) |
| 10.4 | 扭转与弯曲的组合 .....                 | (354).....(383) |

## 第11章 塑性极限分析 .....

[内容提要] [习题解析]

|      |                   |                 |
|------|-------------------|-----------------|
| 11.1 | 塑性变形 塑性极限分析 ..... | (400).....(404) |
| 11.2 | 拉、压杆系的极限分析 .....  | (401).....(404) |
| 11.3 | 受扭圆杆的极限分析 .....   | (402).....(412) |
| 11.4 | 梁的极限分析 塑性铰 .....  | (402).....(416) |

## 第12章 能量法 .....

[内容提要] [习题解析]

|      |                  |                 |
|------|------------------|-----------------|
| 12.1 | 应变能 余能 .....     | (427).....(434) |
| 12.2 | 卡氏定理 .....       | (429).....(439) |
| 12.3 | 虚位移原理 单位力法 ..... | (430).....(449) |
| 12.4 | 互等定理 .....       | (431).....(460) |
| 12.5 | 用能量法解静不定系统 ..... | (432).....(463) |

|                              |                 |
|------------------------------|-----------------|
| 第 13 章 压杆稳定 .....            | 481             |
|                              | [内容提要] [习题解析]   |
| 13.1 弹性平衡稳定性的概念 .....        | (481).....(486) |
| 13.2 轴向受压等直杆的临界压力与临界应力 ..... | (482).....(490) |
| 13.3 压杆的稳定性计算 .....          | (484).....(503) |
| 13.4 纵横弯曲的概念 .....           | (485).....(512) |
| 第 14 章 动载荷与交变应力 .....        | 517             |
|                              | [内容提要] [习题解析]   |
| 14.1 动载荷与交变应力 .....          | (517).....(524) |
| 14.2 动应力的计算 .....            | (518).....(527) |
| 14.3 疲劳破坏与疲劳强度校核 .....       | (520).....(543) |
| 附录 I 型钢规格表 .....             | (550)           |
| 附录 II 常用截面的几何性质 .....        | (558)           |
| 附录 III 简单载荷作用下梁的挠度和转角 .....  | (560)           |
| 附录 IV 材料力学基本内容的回顾 .....      | (插页)            |
| 参考文献 .....                   | (565)           |

# 第 1 章

## 轴向拉伸与压缩

### 【内容提要】

#### 1.1 轴向拉伸(压缩)杆的内力

##### 1. 轴向拉伸(压缩)的力学模型

轴向拉伸(压缩)是杆件的基本变形之一,其力学模型如图 1-1 所示。

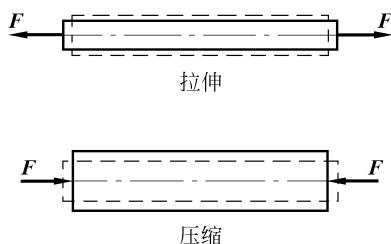


图 1-1

**构件特征** 构件为等截面的直杆。

**受力特征** 外力(或外力合力)的作用线与杆件的轴线相重合。

**变形特征** 受力后杆件沿其轴线方向伸长(缩短),即杆件任意两横截面沿杆件轴线方向产生相对的平行移动。

##### 2. 内力 截面法

**内力** 由外力(或其他外界因素)所引起的、构件本身两部分之间的相互作用。

**截面法** 截面法是求内力的普遍方法,用截面法求内力的步骤为

- (1) **截开** 在需求内力的截面处,假想地沿该截面将构件截分为二;
- (2) **替代** 任取一部分,其弃去部分对留下部分的作用,以作用在截开面上相应的内力来代替;
- (3) **平衡** 由于平衡物体的任一部分均应保持平衡,由平衡条件求出该截面上的未知内力值。

**内力的特征**

- (1) 内力定义在构件的某一假想截面上,等效于截面两侧部分间的相互作用。
- (2) 内力是指由外力(或外界因素)作用引起构件变形、而产生的某一截面上分布内力系的合成。
- (3) 内力是矢量,内力沿坐标轴的分量是标量。内力分量的正、负号与构件的变形趋势相联系。

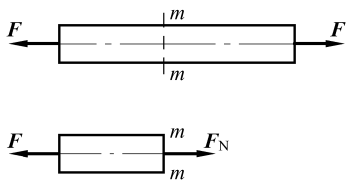


图 1-2

**轴力** 轴向拉(压)杆横截面上的内力,其作用线必定与杆件轴线相重合,称为轴力(图 1-2),记为  $F_N$ 。

**轴力的特征**

- (1) 轴力实质上为内力分量(沿杆件轴线的分量),轴向拉(压)杆横截面上仅该内力分量不为零。
- (2) 轴力  $F_N$  规定以拉力为正、压力为负,即引起杆件伸长的轴力为正。注意,列平衡方程时,力的正负,以其使物体产生的运动趋势规定;内力的正负,以其使物体产生的变形趋势规定。两者的物理意义不同。若未知内力的方向始终假定为其正向,则由平衡方程求得的内力正负号,就直接反映了内力的正负。

**轴力图** 表示沿杆件轴线各横截面上轴力变化规律的图线。注意,轴力图应与杆件轴线等长,且在图中标注各段轴力的正、负号和数值。

## 1.2 轴向拉伸(压缩)杆的应力

### 1. 应力

**应力的定义** 由外力(或外界因素)引起的,构件某一截面上某一点处的内力集度(图 1-3)。

**全应力** 截面  $m-m$  上点  $O$  处的应力,记为  $p$ 。

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (1-1)$$

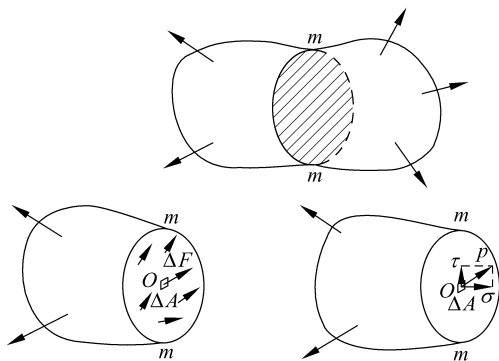


图 1-3

正应力 垂直于截面的应力分量,记为  $\sigma$ 。

切应力 相切于截面的应力分量,记为  $\tau$ 。

应力的特征

(1) 应力定义在构件的某一假想截面或其边界上的某一点处。等效于材料质点间的相互作用。

(2) 应力的物理因次是单位面积上的力;应力的单位为帕(Pascal),其代号为 Pa ( $1\text{Pa}=1\text{N/m}^2$ )。由于帕的单位较小,常用 MPa 表示(词冠 M 表示  $10^6$ )。

(3) 应力为矢量,而应力分量为标量,并规定:

正应力  $\sigma$ ——以离开截面的拉应力为正,指向截面的压应力为负;

切应力  $\tau$ ——以其对截面内一点产生顺时针转向的力矩时为正,反之为负。

## 2. 轴向拉(压)杆横截面上的应力

分布规律 轴向拉(压)杆横截面上仅有垂直于截面的正应力,且正应力在整个横截面上均匀分布(图 1-4)。

正应力公式

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \quad (1-2)$$

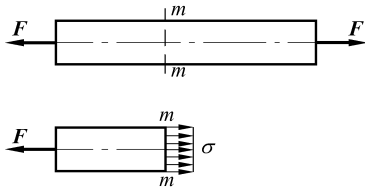


图 1-4

式中,  $F_N$  为该横截面上的轴力;  $A$  为横截面的面积。

正应力公式的讨论

(1) 在外力作用点附近,其应力分布与外力的作用方式有关;在杆件几何外形骤然改变(或局部不规则)处,将引起局部应力骤增的应力集中现象,都不能应用式(1-2),但其影响范围均不超过杆件的最大横向尺寸,即圣维南(St. Venant)原理。

(2) 对于阶梯形杆(图 1-5(a)),在各段中部各横截面上的正应力,可按式(1-2)计算;对于截面连续变化的锥形杆(图 1-5(b)),当杆件两侧棱边的夹角  $\alpha \leq 20^\circ$  时,应

用式(1-2)所得的正应力,其误差不超过3%(参见习题1.2-7)。

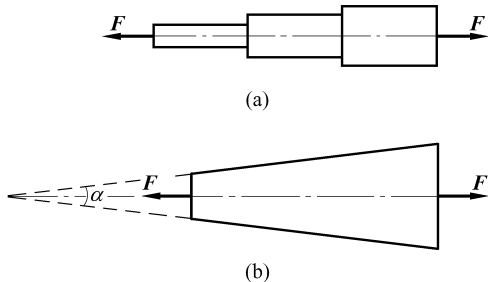


图 1-5

### 3. 轴向拉(压)杆斜截面上的应力

**斜截面应力** 任意斜截面  $m-m$  (图 1-6) 的截面积为  $A_\alpha$ , 斜截面上的应力均匀分布, 其全应力及应力分量分别为

$$\text{全应力} \quad p_\alpha = \frac{F}{A_\alpha} = \sigma_0 \cos \alpha \quad (1-3a)$$

$$\text{正应力} \quad \sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha \quad (1-3b)$$

$$\text{切应力} \quad \tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha \quad (1-3c)$$

式中,  $\sigma_0$  表示横截面上的正应力;  $\alpha$  为横截面外法线至斜截面外法线的转角, 以逆时针转动为正。

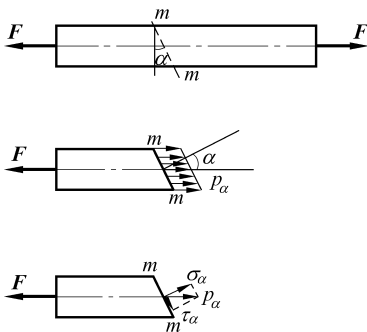


图 1-6

**轴向拉(压)杆内的最大、最小应力**

正应力的最大、最小值分别为

$$\sigma_{\alpha, \max} = \sigma_{\alpha=0^\circ} = \sigma_0$$

$$\sigma_{\alpha, \min} = \sigma_{\alpha=90^\circ} = 0$$

切应力的最大、最小值分别为

$$|\tau_{\alpha}|_{\max} = \tau_{\alpha=\pm 45^{\circ}} = \frac{\sigma_0}{2}$$

$$|\tau_{\alpha}|_{\min} = \tau_{\alpha=0^{\circ}, 90^{\circ}} = 0$$

注意,切应力的正、负,仅表示其指向不同,而对于剪切强度来说是相同的。

## 1.3 材料在拉伸、压缩时的力学性能

### 1. 低碳钢的静拉伸试验

**应力—应变曲线** 以一定规格的试样,在规定的试验条件下<sup>①</sup>,通过试验机施加力  $F$ ,测量试样标距  $l$  的伸长  $\Delta l$ 。然后,以应力  $\sigma$ (力除以试样的原始横截面面积)为纵坐标;以应变  $\varepsilon$ (伸长除以标距的原始长度)为横坐标,得表征材料力学性能的应力—应变曲线。低碳钢的应力—应变曲线如图 1-7 所示。

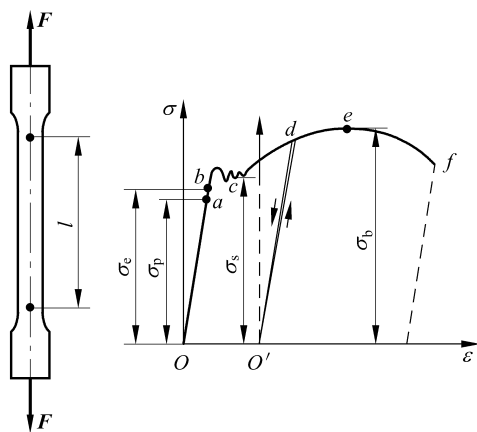


图 1-7

#### 弹性变形与塑性变形

**弹性变形** 卸除外力后能完全消失的变形。

**塑性变形** 卸除外力后不能消失的永久变形。通常所说的塑性变形,是指由外力作用引起的、与时间无关的不可恢复的永久变形。

#### 变形的四个阶段

**弹性阶段  $Ob$**  只产生弹性变形,不引起塑性变形。

**屈服阶段  $bc$**  应力在很小范围波动,应变显著增加,且主要为塑性变形。

<sup>①</sup> 关于试样的具体要求和测试条件,可参阅国家标准 GB/T 228—2002《金属材料室温拉伸试验方法》。该标准中,有些名词术语和符号有所变动。本书为与国内教材取得一致,仍采用原标准。

强化阶段  $ce$  必须增大应力,才能增加应变。

缩颈阶段  $ef$  试样发生缩颈,变形集中在缩颈区。

三类力学性能指标:

强度指标 比例极限  $\sigma_p$ ——应力与应变成正比的最大应力值。

弹性极限  $\sigma_e$ ——只产生弹性变形的最高应力值<sup>①</sup>。

屈服极限  $\sigma_s$ ——应变显著增加,应力微小波动时的最低应力值<sup>②</sup>。

强度极限  $\sigma_b$ ——试样在断裂前所能达到的最高应力值。

$$\text{弹性指标 弹性模量} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (1-4)$$

$$\text{塑性指标 伸长率} \quad \delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\% \quad (1-5)$$

$$\text{断面收缩率} \quad \psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\% \quad (1-6)$$

式中,  $l_1$  为试样拉断后的标距长度;  $A_1$  为试样拉断后缩颈处的最小横截面面积。

卸载定律及冷作硬化

卸载定律 试样达到强化阶段(或强化阶段前),卸载时的应力与应变呈线性关系(如图 1-7 中  $dO'$ )。

冷作硬化 试样加载达到强化阶段后卸载,再次加载时,材料的比例极限(或弹性极限)提高,而塑性降低的现象(如图 1-7 中曲线  $O'def$ )。

## 2. 铸铁的静拉伸试验

应力—应变曲线 应力与应变间无明显的直线段,在应变很小时就突然断裂,其应力—应变曲线如图 1-8 所示。

力学性能 试验中只能测得强度极限  $\sigma_b$ ,无屈服阶段和缩颈现象。弹性模量通常以总应变为 0.1% 时的割线斜率来度量(如图 1-8 中的  $Oa$ )。

## 3. 低碳钢的压缩试验

应力—应变曲线 屈服阶段前与拉伸时的应力—应变曲线基本相同,屈服阶段后,试样越压越扁,测不到强度极限,其应力—应变曲线如图 1-9 所示。

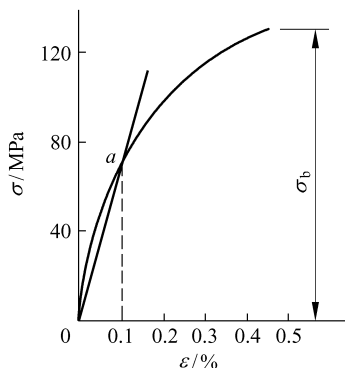


图 1-8

① 弹性极限与比例极限在实测中很难区分,工程中一般不加区分。

② GB/T 228—2002 对应力微小波动中首次下降前的最高应力称为“上屈服强度”;而对不计初始瞬时效应的最低应力称为“下屈服强度”。试验表明,加载速度等因素对上屈服强度有影响,而下屈服强度较为稳定。

力学性能 弹性模量  $E$ 、比例极限  $\sigma_p$ 、屈服极限  $\sigma_s$  分别与拉伸时的相同,无强度极限  $\sigma_b$ 。

#### 4. 铸铁的压缩试验

应力—应变曲线 应力与应变间无明显的直线阶段和屈服阶段,但有明显的塑性变形。其应力—应变曲线如图 1-10 所示。

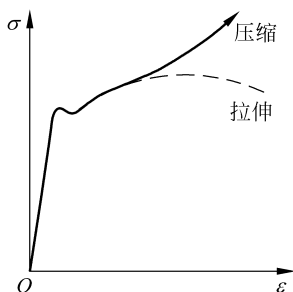


图 1-9

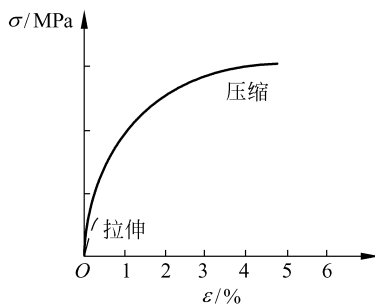


图 1-10

力学性能 压缩时的强度极限远大于拉伸时的强度极限,  $\sigma_{b,t} \approx (4 \sim 5) \sigma_{b,c}$ 。弹性模量以某一应力值的割线斜率来度量,通常取拉伸和压缩的弹性模量相同。

## 1.4 轴向拉伸(压缩)杆的强度条件

### 1. 许用应力与安全因数

许用应力 在保证正常工作的条件下,材料容许承受的最高应力值。

$$\text{塑性材料} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s} \quad (1-7a)$$

$$\text{脆性材料} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b} \quad (1-7b)$$

若为许用切应力,则用  $[\tau]$  表示。

安全因数 安全因数是考虑理论计算中的差异和构件强度储备的要求后,而规定的大于 1 的因数。理论计算的差异中包括材料材质、载荷值确定、构件几何尺寸及计算简图的误差等因数;强度储备的要求中包含构件使用中的意外、构件的重要性及构件损坏后的危害性等因数。

### 2. 轴向拉(压)杆的强度计算

强度条件 为保证使用安全,构件内的最大工作应力不得超过材料的许用应力。即

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{F_N}{A} \right)_{\max} \leq [\sigma] \quad (1-8)$$

强度计算的三类问题

强度校核

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{F_N}{A} \right)_{\max} \leq [\sigma]$$

截面设计

$$A \geq \frac{F_{N,\max}}{[\sigma]}$$

许可载荷计算

$$F_N \leq [\sigma]A \quad \text{由 } F_N \text{ 计算 } [F]$$

## 1.5 轴向拉伸(压缩)杆的变形

### 1. 位移、变形与应变

位移的定义

**线位移** 受力物体形状改变时,一点(或一截面)位置移动的直线距离。图 1-11(a)中点  $A$  的线位移为  $u$ ; 点  $B$  的线位移为  $u + \Delta u$ 。

**角位移** 受力物体形状改变时,一线段(或一截面)方向转动的角度。图 1-11(b)中线段  $\overline{AB}$  的角位移为  $\alpha$ ; 线段  $\overline{AC}$  的角位移为  $\beta$ 。

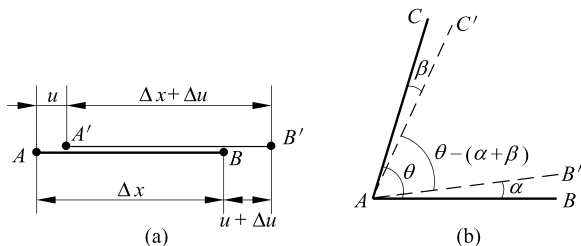


图 1-11

变形的定义

**线变形** 受力物体形状改变时,线段长度的改变量(或线段两端点间的相对线位移)。图 1-11(a)中线段  $\overline{AB}$  的线变形为  $\Delta u$ 。

**角变形** 受力物体形状改变时,两线段间夹角的改变量(或两线段间的相对角位移)。图 1-11(b)中线段  $\overline{AB}$  与  $\overline{AC}$  间的角变形为  $(\alpha + \beta)$ 。

应变的定义

**线应变** 受力物体形状改变时,一点处沿某一方向微小线段相对线变形的极值,即

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad (1-9a)$$

切应变 受力物体形状改变时,一点处沿某个方向两相互垂直微小线段的直角改变量。若图 1-11(b)中  $\angle CAB$  为直角,则其切应变为

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left( \frac{\pi}{2} - \angle C'AB' \right) \quad (1-9b)$$

### 位移、变形与应变的特征

(1) 线位移的单位为 m(或 mm)、角位移的单位为度(或弧度);线变形的单位为 m(或 mm)、角变形的单位为度(或弧度);线应变无单位(其量纲为 1),通常用 % 表示、切应变的单位为度(或弧度)。

(2) 位移为矢量,变形为标量,而应变本身是以其分量的形式来定义的。线位移沿  $x, y, z$  三个坐标轴的分量通常分别用  $u, v, w$  表示,角位移的分量为在三个坐标平面内的转角。其指向和转向通常用图示方式表示;在工程实际中通常仅计算线变形(简称为变形),而不计算其角变形。(线)变形以伸长为正、缩短为负;线应变分量以伸长应变为正,而切应变分量以第一象限的直角减小为正。

(3) 位移、变形与应变三者间既有联系,又有区别,是三个不同的概念。

## 2. 轴向拉(压)杆的变形与应变

杆件在轴向拉伸(压缩)时,在平行和垂直杆轴方向产生均匀的线变形,而没有角变形。拉伸时沿轴向伸长,横向缩短(如图 1-12),压缩时反之。

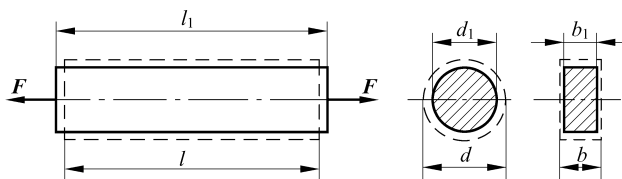


图 1-12

$$\text{轴向线变形} \quad \Delta l = l_1 - l \quad (1-10a)$$

$$\text{轴向线应变} \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (1-10b)$$

$$\text{胡克(Hooke)定律} \quad \Delta l = \frac{F_N l}{EA} \quad \text{或} \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (1-11)$$

### 胡克定律的特征

(1) 胡克定律适用于应力不超过比例极限的线弹性范围。

(2) 在计算  $\Delta l$  的  $l$  长度内,  $F_N$ 、 $E$ 、 $A$  均应为常数。

(3)  $EA$  表征杆件抵抗拉伸(压缩)弹性变形的能力,称为杆件拉伸(压缩)刚度。

$$\text{横向线变形} \quad \Delta d = d_1 - d \quad \text{或} \quad \Delta b = b_1 - b \quad (1-12a)$$

$$\text{横向线应变} \quad \epsilon' = \frac{\Delta d}{d} \quad \text{或} \quad \epsilon' = \frac{\Delta b}{b} \quad (1-12b)$$

$$\text{泊松(Poisson) 比} \quad \nu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right| \quad (1-13)$$

泊松比的特征

- (1) 泊松比适用于应力不超过比例极限的线弹性范围。
- (2) 各向同性材料泊松比的范围为  $0 < \nu < 0.5$ 。
- (3) 对于各向同性材料, 横向应变  $\epsilon'$  与轴向应变  $\epsilon$  恒为异号。

位移的计算

- (1) 由静力平衡条件, 求杆件横截面上的轴力(或应力);
- (2) 由力—变形间物理关系(胡克定律), 计算杆件的变形(或应变);
- (3) 由变形的几何相容条件(约束条件及连续条件), 求解位移值。

### 3. 轴向拉(压)杆内的应变能

**应变能** 杆件在外力作用下引起变形, 同时在杆内储存的能量, 称为应变能。若变形是弹性变形, 则称为弹性应变能, 通常简称为应变能。在静载荷作用下, 杆内应变能在数值上等于外力所作的功。即

$$V_\epsilon = W \quad (1-14)$$

轴向拉(压)杆内的应变能

$$V_\epsilon = \frac{1}{2} F_N \Delta l = \frac{F_N^2 l}{2EA} = \frac{EA \Delta l^2}{2l} \quad (1-15)$$

应变能的单位为焦耳(Joule), 其代号为 J ( $1\text{J} = 1\text{N} \cdot \text{m}$ )。

**应变能密度** 杆件单位体积内储存的应变能, 称为应变能密度。轴向拉(压)杆内的应变能密度为

$$v_\epsilon = \frac{1}{2} \sigma \epsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E \epsilon^2}{2} \quad (1-16)$$

## 1.6 轴向拉伸、压缩时的静不定问题

### 1. 静不定的概念

**静不定问题** 未知的约束反力数(图 1-13(a))或未知的杆件内力数(图 1-13(b))多于独立的静力平衡方程数, 单凭静力平衡方程不可能确定全部未知数的问题, 统称为静不定问题(或超静定问题)。

**静不定次数** 未知力数(包括未知反力和未知内力)超过独立平衡方程数的数