

材 料 力 学

李世清 舒 昶 编著

重 庆 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书系高等工科院校房屋建筑工程专业系列教材之一。内容包括绪论、轴向拉伸和压缩、剪切、扭转、弯曲内力、弯曲应力、梁的弯曲变形及简单超静定梁、应力状态分析和强度理论、组合变形、压杆稳定、杆件位移计算的能量方法、动荷载共十二章。叙述详尽,通俗易懂,例题多,便于自学。除第一章外,每章后附有小结、思考题、习题,书末附有习题答案。

本书除可作为房屋建筑工程专业教材外,还可作为电大、自考的教材,亦可供教学基本要求相同的建筑类其他本、专科专业使用及有关工程技术人员参考。

材 料 力 学

李世清 舒 昶 主编

责任编辑:梁 涛 版式设计:梁 涛

责任校对:邹 忌 责任印制:秦 梅

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:张鸽盛

社址:重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内

邮编:400030

电话:(023) 65102378 65105781

传真:(023) 65103686 65105565

网址:<http://www.cqup.com.cn>

邮箱:fxk@cqup.com.cn (市场营销部)

全国新华书店经销

重庆升光电力印务有限公司印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:16.5 字数:411千

1998年7月第1版 2005年9月第3次印刷

印数:9 001—12 000

ISBN 7-5624-1694-X/TB·16 定价:20.00元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换

版权所有,请勿擅自翻印和用本书

制作各类出版物及配套用书,违者必究。

前 言

本书是按讲授 64 学时(不含实验)编写。主要适用于各类房屋建筑工程专业,也可用作教学基本要求相同的建筑类其他本、专科专业的教材。本书在内容选择上,以本课程和后继课程之“必须”的知识为依据,在讲述深度上,以“够用”为度,弃去了不甚必要的“深”、“难”、“繁”的内容。以讲清概念及概念的应用为主,安排了较多形式的例题,从不同的侧面讲清概念的应用,加深学生对概念的理解。同时,对深入一步的内容作了必要的提示和指点,给想进一步深入学习该课程的学生指出了方向。全书包括绪论、轴向拉伸和压缩、剪切、扭转、弯曲内力、弯曲应力、梁的弯曲变形及简单超静定梁、应力状态分析和强度理论、组合变形、压杆稳定、杆件位移计算的能量方法、动荷载共十二章,对材料力学课程的基本理论和基本方法作了完整介绍。全书应安排三次实验,共 6 个学时,即低碳钢和铸铁的拉(压)试验,并测定低碳钢的 E 和 ν 低碳钢和铸铁的扭转试验,并验证剪切胡克定律,测定低碳钢的 G ;用电测法测定纯弯曲梁的正应力分布,并测定梁的挠度和转角。由于各校实验设备条件和试验方法不同,所以未把实验统一编入教材。全书编写中尽量做到理论联系实际,联系工程应用,注意内容更新。在压杆稳定部分,注意了同我国新颁布的《钢结构设计规范》(GBJ 17—88)的结合。本书内容叙述详尽,通俗易懂,便于自学,除第一章外,每章后有小结(自学指导)、思考题、习题,书末附有习题答案,便于读者自行检查和复习。

参加本书编写的都是从教多年,具有该门课程丰富教学经验的同志,在编写中,不仅吸取了现行同类教材各家之长,而且融进了各自的教学经验和体会。编写分工如下:李永盛编写第五、六、七章,余莉霞编写第二、三、十二章,舒昶编写第一、四、九章,李世清编写第八、十、十一章。全书由李世清、舒昶主编。本书由重庆建筑大学吴德伦教授审阅,并提出了不少宝贵意见,在此表示感谢。本书编写过程中,参阅了有关参考文献,并引用了其中部分习题和个别图表,谨向各文献的作者致谢。本书的编写和出版,得到了参编院校领导和同行的大力支持,一并在 此 表示 感谢。

限于编者水平,书中难免有缺点和欠妥之处,恳请使用本书的教师和读者批评指正。

编 者

1998 年 3 月

第一章 绪 论

1-1 材料力学的任务

建筑物和机械都是由若干单个部分组成,每一单个部分称为构件,或者零件。由它们组成的建筑物和机械的骨架叫做结构。结构和构件承受着外来力的作用,这些外力工程上称为荷载。结构和构件就是被用来承受外力并通过它们把这些外力由基础传递到地基上。

构件在承受荷载、传递荷载或传递运动时,都要发生变形并同时在内部产生抵抗变形的力。这个力与变形的大小和形式决定于荷载的大小和作用方式。随着荷载的改变,构件内的力与变形也要改变。在一些情况下,构件能安全正常地工作;但在另外一些状态下,构件不能安全正常地工作,这种情况必须避免。在什么情况下构件将不能安全正常地工作呢?首先,构件可能发生破坏。如梁、柱的断裂,就要引起严重的工程事故;机床的主轴发生断裂,整台机床就不能工作;构件发生了不可恢复的永久变形就不能继续使用。但是,即使构件未发生破坏,但发生了过大的弹性变形也不能正常工作。如吊车梁变形过大,吊车就不能在梁上顺利行驶;机床的主轴变形过大,将影响加工精度。还有一些构件,当荷载超过某一限度时,不能保持其原有形状的平衡。如受压的细长直杆,当压力不大时,能保持其直线状态下的平衡,但当压力超过某一限度时会突然变弯,这种现象称为受压直杆丧失了稳定,简称失稳。钢桁架中的细长压杆,房屋中的细长柱都可能失稳。压杆失稳的后果是十分严重的。

为了防止上述三种情况的发生,保证构件安全正常工作,在设计构件时,应满足三个方面的要求:

1) 强度要求 所谓强度是指构件抵抗破坏的能力。在荷载作用下,构件不允许发生破坏,这就要求构件应具有足够的强度。

2) 刚度要求 所谓刚度是指构件抵抗变形的能力。在荷载作用下,构件所产生的变形不允许超过工程所容许的范围,这就要求构件应具有足够的刚度。

3) 稳定性要求 所谓稳定性是指构件稳固地保持原有形状下平衡的能力。在一定数值的荷载范围内,不允许构件丧失稳定,这就要求构件应具有足够的稳定性。

构件的设计满足了强度、刚度和稳定性的要求,就能安全正常地工作。但若片面地追求安全,又会导致不必要的浪费。所以还要求设计构件必须尽可能地满足经济合理的要求,即要恰当地选用材料和构件的截面形状及尺寸,降低材料消耗,减轻自重以节约资金。而脱离实际地强调经济节约,又会降低构件的安全。这样,安全与经济二者之间就构成了矛盾。材料力学的任务就是要很好地解决这一对矛盾。在不断地解决这种矛盾的过程中,也促进了材料力学的不断发展。

构件的承载能力与所用材料的力学性能有关,这些力学性能均需由材料力学试验来确定;材料力学的一些计算公式和理论结果,也要通过试验进行检验;还有些问题靠现有理论尚不能

解决或很难解决, 亦需借助试验研究解决。因此, 实验研究同理论分析一样重要, 都是完成材料力学任务所必需的手段。

综上所述, 材料力学的任务是: 为构件设计时进行强度、刚度和稳定性计算提供有关的基本理论、计算方法和试验技术, 使能恰当地选用材料、截面的形状及尺寸, 以达到安全、经济的设计要求。

1-2 变形固体的基本假设

一、变形固体的概念

在理论力学中, 把物体当作刚体, 假定在外力作用下, 它的形状和尺寸绝对不变。实际上刚体并不存在。任何工程构件在外力作用下都要发生变形, 都会发生或多或少形状和尺寸的改变。由于工程构件所用的材料都是固体, 就称这些材料为变形固体。

材料力学主要研究的是受力构件的强度、刚度和稳定性, 而这些问题都与构件的变形直接相关。因此, 在材料力学中, 把变形看作是固体的主要性质。

在外力作用下组成固体物质的各微粒之间的相对位置发生了变化, 形成了固体的变形。如果在卸除荷载后, 固体能立刻恢复到原来的形状和尺寸, 这种性质就称为弹性, 把具有这种性质的变形固体称为完全弹性体。当荷载过大时, 在卸除荷载后固体不能完全恢复原状, 这时该变形固体称为部分弹性体, 其变形中的一部分随荷载的卸除而消失, 这部分变形称为弹性变形; 另一部分在荷载卸除后不能消失而保留下来, 这部分变形就称为塑性变形。

一般固体在荷载作用下, 总是既有弹性变形, 也有塑性变形。但对每一种变形固体来说, 当荷载大小在一定范围内时, 其变形很微小, 可以认为是完全弹性的。工程中, 大多数构件在正常工作条件下, 均要求只发生微小的弹性变形。所以在材料力学中所研究的大部分问题都是限于弹性变形范围内的问题。

二、变形固体的基本假设

实际固体物质的性质是十分复杂的, 每门学科只能从某一角度研究其性质的一个方面。为了方便, 常把那些和问题无关的或影响不大的次要因素忽略掉, 只保留与问题有关的主要性质。经过这样处理, 使问题大为简化。根据这个原则, 材料力学中对变形固体有如下几个基本假设。

1) 连续性假设 认为组成物体的物质是毫无空隙地充满物体的整个几何容积, 其结构是密实的。从物质结构来说, 组成固体的晶体或微粒之间实际上并不连续, 都存在着一定的空隙, 但这些空隙的大小和所研究构件的尺寸相比极其微小, 可以忽略不计, 而认为物体在整个体积内是连续的。另外, 在正常工作的条件下, 变形后的固体保持其连续性, 变形后既不引起“空隙”, 也不引起互相的“挤入”现象, 即所谓在几何上是相容的。

2) 均匀性假设 认为在物体内部所有各点处力学性能完全相同。这样可以从该物体取出任意一体积单元, 代表整个物体进行力学分析。实际固体的基本组成部分之间, 如金属或岩石的晶体之间, 混凝土的砂、石和水泥之间, 在力学性能上, 都存在着不同程度的差异。但由于这

些基本组成部分其尺寸与取出的体积单元相比极其微小, 又是随机排列, 所以体积单元的力学性能是所有这些基本组成部分力学性能的统计平均值, 因此, 可以认为, 物体的力学性能是均匀的。

3) 各向同性假设 认为物体沿各个方向的力学性能完全相同。实际晶体材料中, 晶体是有方向性的, 但由于所研究的体积单元远大于晶体, 无数晶体错综排列, 使材料在各个方向的力学性能必然趋于相同, 因而可以认为, 钢铁等多晶体金属材料是各向同性的。至于均匀的非晶体材料, 一般都是各向同性的。铸铁、玻璃、浇注很好的混凝土都是各向同性材料。而钢丝、各种轧制的钢材和纤维整齐の木、竹材是单向同性材料。胶合板、复合材料等则是各向异性材料。

4) 小变形假设 大多数工程构件, 在荷载作用下产生的变形与构件的最小原始尺寸相比很微小。因此, 在研究构件的平衡与运动、内力和变形等问题时, 均可按构件的原始尺寸和形状计算, 使计算工作大为简化。

综上所述, 材料力学是把实际的固体看作连续、均匀、各向同性的变形固体, 而且局限在弹性变形范围内和小变形状态下进行研究。

1-3 杆件变形的的基本形式

工程中的构件, 有各种不同的形状。按长、宽、高三个方向尺寸的比例关系, 可把所有构件分为杆、板、壳、块体四类。材料力学主要研究杆。

杆是纵向尺寸远大于横向尺寸的构件(图 1-1)。垂直于杆纵向的截面称为横截面。所有横截面形心的连线称为轴线。横截面和轴线是杆的两个主要几何特征。二者总是互相垂直。杆件的轴线为直线的称为直杆(图 1-1(a), (c)), 轴线为曲线的称为曲杆(图 1-1(b))。沿轴线杆的横截面形状大小处处相同的杆称为等截面杆(图 1-1(a), (b)), 各横截面不同的杆称为变截面杆(图 1-1(c))。在材料力学中, 主要是研究等截面直杆, 通常称为等直杆(图 1-1(a))。

房屋结构中, 梁、柱等和机械设备中的传动轴、立柱、吊钩等都可简化为杆件进行分析。

作用在杆件上的外力是各不相同的, 杆件产生的变形也各不相同。但任何杆件的变形, 总不外乎下列四种基本形式之一, 或是几种基本形式的组合。

1) 轴向拉伸或压缩 直杆在一对大小相等, 方向相反, 作用线与杆轴线重合的外力作用下, 直杆将发生轴向的伸长或缩短。这种变形形式称为轴向拉伸(图 1-2(a))或压缩(图 1-2(b))。

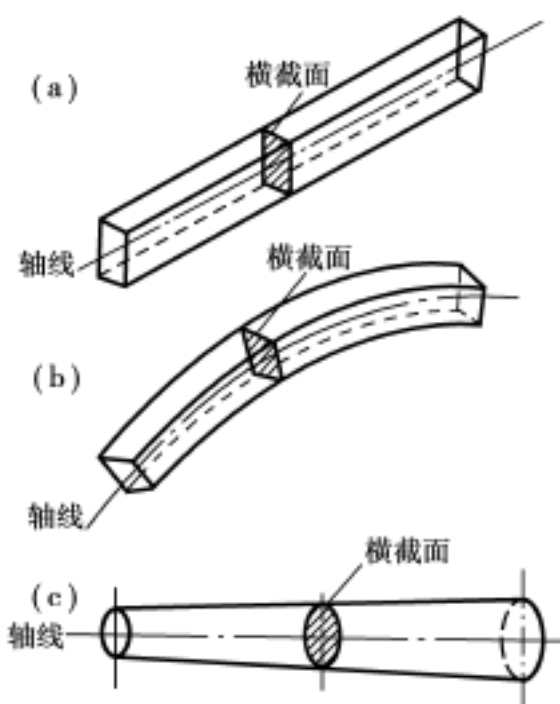


图 1-1

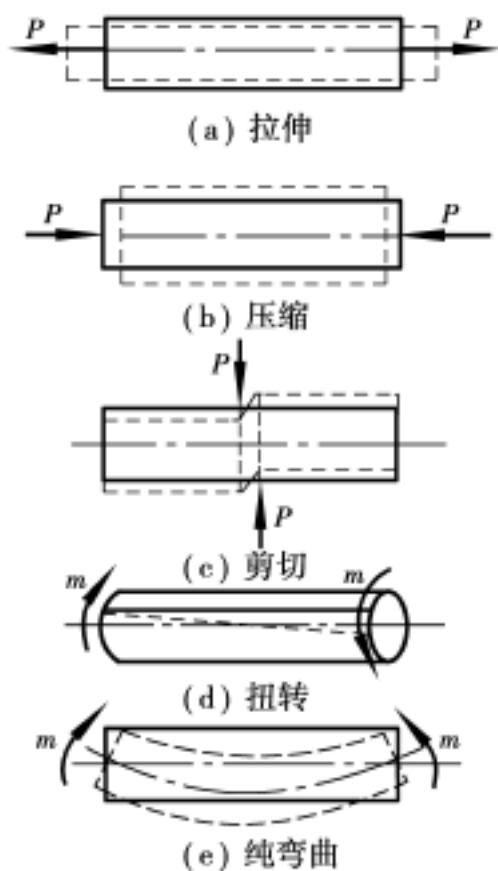


图 1-2

2) 剪切 直杆在一对相距很近, 大小相等, 方向相反的横向外力作用下, 直杆在两力作用线间的横截面将发生沿外力作用方向的相对滑移或错动。这种变形形式称为剪切(图 1-2(c))。

3) 扭转 直杆在垂直于杆轴线的两个平面内, 受到一对大小相等, 转向相反的力偶作用, 直杆的任意横截面将绕轴线发生一相对转动, 轴线仍保持直线, 这种变形形式称为扭转(图 1-2(d))。

4) 纯弯曲 直杆在纵向平面内受到一对大小相等, 转向相反的外力偶作用, 直杆的轴线将弯曲成为纵向平面内的一条平面曲线, 每一横截面都绕垂直于杆轴线的轴发生相对转动, 这种变形形式称为纯弯曲(图 1-2(e))。

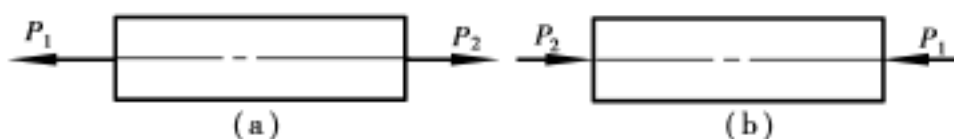
实际工程构件在荷载作用下, 只发生上述某一种基本变形的并不很多, 大多数工程构件在荷载作用下是同时发生两种以上基本变形的组合, 称为组合变形。对于组合变形, 若其中一种是主要的, 其他变形是次要的, 也可按基本变形处理; 但若都是主要变形, 则必须按组合变形计算。本书先研究基本变形, 然后再研究组合变形。

思考题

1-1 什么叫构件的强度、刚度、稳定性?

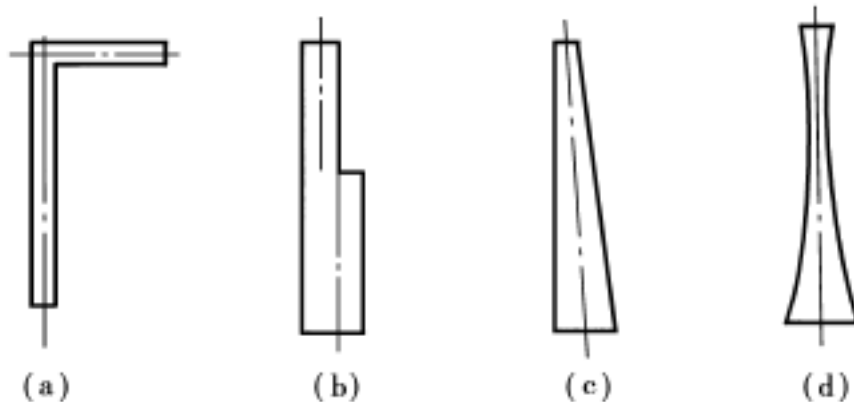
1-2 由碎石、砂子、水泥和水搅拌成的混凝土在材料力学中, 为何能看成连续、均匀、各向同性材料?

1-3 在理论力学中, 由于力的可移性原理, 可以将思图 1-3(a) 改变成思图 1-3(b) 进行研究, 而在材料力学中是否可以这样做?



思图 1-3

1-4 试根据杆件的几何特征, 为下列杆件取名。



思图 1-4

第二章 轴向拉伸和压缩

2-1 轴向拉伸和压缩的概念

在工程结构和机械设备中,经常会遇到一些承受拉力或压力的杆件。例如,房屋桁架中的各杆(图 2-1(a));起重架中的扒杆(图 2-1(b));油压千斤顶的丝杆(图 2-1(c))。它们在外力作用下,将受到拉伸或压缩,产生沿轴线方向的伸长或缩短变形。

这些在不同结构物与机械中的杆件,虽然其杆端的具体连接方式各有差异,外力作用在杆端的具体方式各有不同,有杆端销子传给的,有通过杆端螺纹传给的,但如果撇开杆件截面的具体形状和外力作用的具体方式,把杆件和受力情况加以简化,都可得到相同的图形(图 2-2)。此图称为计算简图。该计算

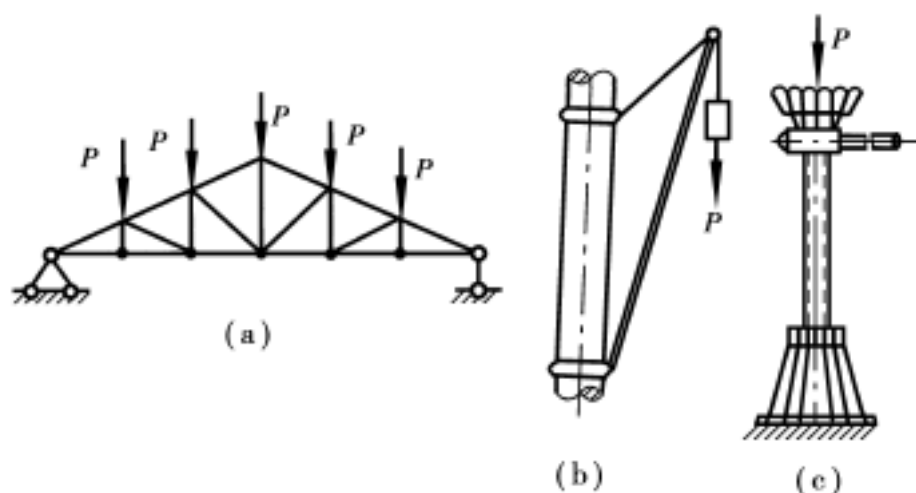


图 2-1

简图从几何上讲是等直杆。就其受力情况而论,它们都是在杆两端各受到一个其大小相等,方向相反,作用线与杆轴线重合的外力作用。其变形特点是:杆件发生了沿其轴线方向的伸长或缩短变形,具有这种受力和变形特点的变形形式称为轴向拉伸或压缩。

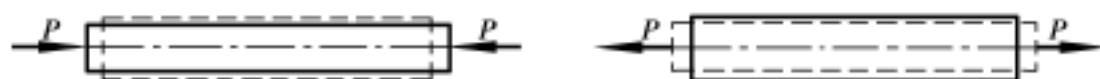


图 2-2

2-2 拉(压)杆的内力——轴力·轴力图

一、内力的概念

构件在外力作用下要发生变形,其内部各质点之间的相对位置要发生改变,与此同时,各质点之间的相互作用力也要发生改变,材料力学所说的内力就是指这种由于外力作用,在构件内引起的质点间相互作用力的改变量。由于物体是连续的,因此连接物体两相邻部分截面上的内力实际是连续分布在该截面上的内力系,这里所说的内力就是这种内力系的合成(力或

力偶)。因此也可以说, 构件的内力就是构件在外力作用下引起的构件内相邻部分之间分布内力系的合成。

二、内力的求法——截面法 轴力

为了研究构件的强度和刚度, 首先必须研究构件的内力。下面介绍求内力的一般方法——截面法。截面法是将内力转化成外力而进行求解的一种方法。它是材料力学中求内力的一个最基本的方法。

以图 2-3 所示拉杆为例, 说明用截面法求受轴向拉(压)杆件内力的步骤。

第一步: 截断。如果要求杆上任一横截面 $m-m$ 上的内力, 就用一假想平面从所求内力处将杆件截开为两部分(图 2-3(a))。

第二步: 取出。取出其中的任一部分(如左边部分) 弃去另一部分, 将原来作用在取出部分上的外力照样画出(图 2-3(b))。

第三步: 代替。弃去部分对保留部分的作用以作用在截面上的内力代替。根据共线力系的平衡条件可知, 内力的合力作用线必与杆的轴线重合, 该合力用 N 表示, 其指向画为背离截面的方向(图 2-3(b))。

第四步: 平衡求解。因总体平衡, 部分也应平衡, 列出静力学平衡方程求解未知内力。由左段的平衡条件:

$$\sum X = 0 \quad N - P = 0$$

得

$$N = P$$

结果为正, 表明所设内力方向正确。取右段计算结果也一样, 所得内力与由左段求得的大小相等, 但方向相反(图 2-3(c))。

对于压杆, 亦可通过上述步骤求得任一横截面上的内力, 但内力为负, 表明内力的实际方向是指向截面。

由上述可见, 直杆在轴向拉伸或压缩时, 横截面上只有作用线与杆轴线重合的内力, 这种内力称为轴力。轴力 N 的正负号规定为: 背离截面为正, 指向截面为负。

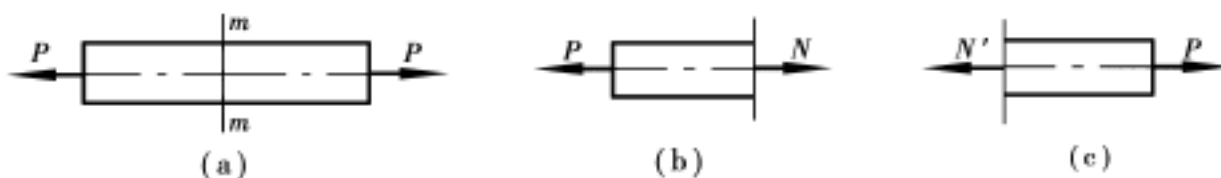


图 2-3

需要指出, 在使用截面法之前, 理论力学中关于力和力偶的可移性原理是有限制的。另外, 静力学中杆上的荷载可用一个静力等效的相当力系代替也是有所限制的。但在研究平衡时, 这些不受限制。

三、轴力图

当杆在不同部位受到两个以上轴向外力作用的时候, 在杆不同区段中的轴力是不相同的。为了表明各个横截面轴力的情况, 把轴力沿杆长度变化的规律用一个图形表示出来, 这个图形称为轴力图。从轴力图中可以找出强度计算时所需的最大轴力 $N_{\max}$ 。

为作轴力图, 首先必须用截面法求出各段的轴力, 然后以 x 轴表示截面位置, 使之与杆的

轴线平行对齐, 以垂直于 x 轴的坐标, 按选定的比例尺表示轴力 N 的大小。将正的轴力画在上侧, 负的轴力画在下侧。标出各段轴力的数值和正负号。

例 2-1 如例图 2-1 (a) 所示直杆在 A、B、C、D 四截面分别受到轴向外力, 试计算各段的轴力并作轴力图。

解 为求 AB 段内的轴力, 用一假想的截面 1-1 从 AB 段任一截面将杆截开并取出左段(图(b)), 设 1-1 截面的轴力 N_1 为正, 由此段的平衡

$$\sum X = 0 \quad -6 + N_1 = 0$$

得 $N_1 = 6 \text{ kN}$

N_1 为正, 说明 N_1 的方向与假设方向相同, 为拉力。由于 1-1 截面是在 AB 段内任取的, 所以 AB 段内任一截面的轴力都为 6 kN。

为求 BC 段内的轴力, 用一假想的截面 2-2 从 BC 段任一截面将杆截开, 研究其左段(图(c)), 同样, 假设轴力 N_2 为正, 由左段的平衡

$$\sum X = 0 \quad -6 + 18 + N_2 = 0 \quad N_2 = -12 \text{ kN}$$

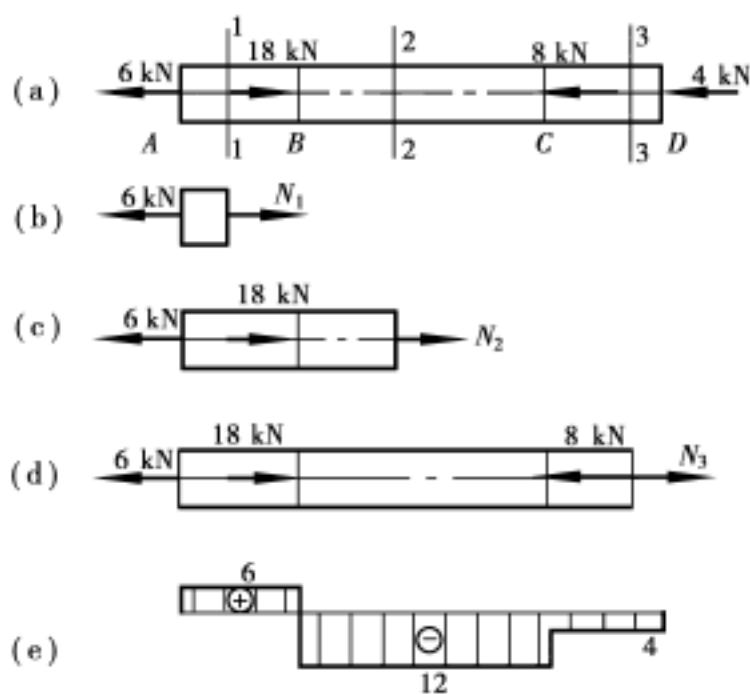
结果为负值, 说明 N_2 的真实方向应与图设方向相反, 为压力。

同理可求 CD 段内任一横截面上的内力 N_3 (图(d)), 由

$$\sum X = 0 \quad -6 + 18 - 8 + N_3 = 0 \quad N_3 = -4 \text{ kN}$$

各段内的轴力求出后, 在 x - N 坐标系中, 标出各段轴力的大小和正负, 即得轴力图如图(e)所示。

由此例可见, 应用截面法计算轴力时, 对未知轴力以正的方向假设其指向为好。计算结果为正号表示与假设方向相同, 轴力为拉力; 负号表示真实轴力方向与假设方向相反, 轴力为压力。另外, 根据所得结果作出的轴力图也不致出错。



例图 2-1

2-3 横截面及斜截面上的应力

一、应力的概念

通过截面法, 可以求出构件的内力, 同样的内力, 作用在不同大小的横截面上, 会产生不同的效果。如图 2-4 所示, 两根材料相同, 横截面面积不同的等直杆, 所受的轴向拉力相同(因此横截面上的内力也相同), 随着拉力的增加, 细杆将先被破坏。两杆的差别仅在于同样大小的内力分布在不同的横截面积上, 内力在横截面上聚集的程度不同。内力聚集的程度称为内力集度, 为单位面积上内力的大小, 称为应力。如果分布内力系与截面垂直, 则应力也必垂直于截面, 这种应力称为正应力, 用 σ 表示。

一般情况下,为了确切描述截面上某一点 M 处的正应力,就要围绕 M 点取一微面积元 ΔA , 设分布于其上的合内力为 ΔN (图 2-5), 定义

$$\sigma_m = \frac{\Delta N}{\Delta A}$$

为该点处的平均正应力。当 ΔA 趋于零时, 比值 $\frac{\Delta N}{\Delta A}$ 的极限

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \frac{dN}{dA}$$

称为 M 点处的正应力。显然, 当 ΔN 在 ΔA 上为均匀分布时, 一点处的平均正应力与该点的正应力相等。由于 ΔN 是矢量, 因此 σ 也是一个矢量, 其方向与 ΔA 趋于零时合内力 ΔN 的方向相同。 σ 的单位为 N/m^2 , 简记为 Pa(帕)。通常用 MPa(兆帕) ($1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa}$); 或 GPa(吉帕) ($1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa}$)。

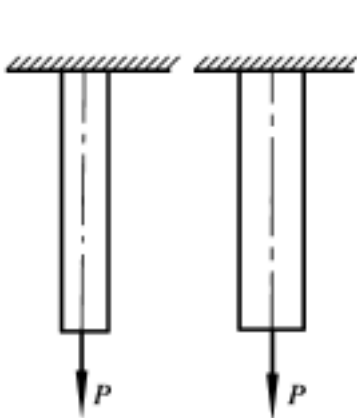


图 2-4

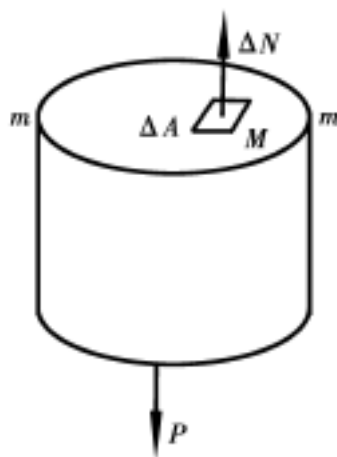


图 2-5

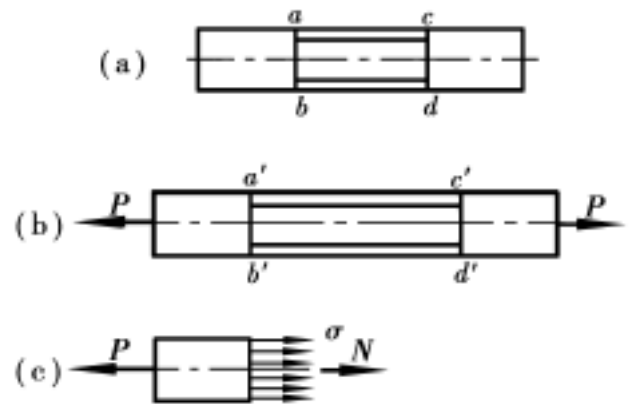


图 2-6

二、拉(压)杆横截面上的应力

内力是横截面上分布内力系的合力, 分布内力集度, 即应力在横截面上是怎样分布的呢? 内力是不能直接观察到的, 但构件在受力后引起内力的同时, 还要发生变形, 由于材料在受力与变形之间有一定的关系, 因此可以通过观察变形来了解内力的分布, 然后再根据其合力应该等于截面上的内力得到用内力表示应力的关系。

首先进行试验观察。为此在试验直杆的侧面划上两条横向周线 ab 、 cd , 并在两横向周线间划两条纵向线(图 2-6(a))。然后, 在杆两端加一对轴向拉力, 使其产生拉伸变形(图 2-6(b))。由观察发现, 横向周线仍彼此平行, 且垂直于轴线, 但其间的距离增大了; 各纵向线仍平行于轴线, 但都伸长了。上述现象是杆的变形在其表面上的反映, 由于横向周线是横截面的外周线, 假设内部变形情况也跟表面一样, 于是可假设杆件变形前的横截面在变形后, 仍保持为平面, 且仍垂直于轴线。这个假设称为平截面假设。如果设想杆是由无数纵向纤维所组成, 则由以上假设可以推之, 两横截面间各条纵向纤维的伸长相同, 即横截面上各点处的应力相等, 且垂直于横截面。若以 A 表示杆件的横截面面积, N 表示轴力, 按分布内力的合力应该等于横截面上的内力, 即

$$N = \int dN = \int \sigma dA = \oint \sigma dA = \sigma A$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (2-1)$$

当轴力为拉力时, 称拉应力; 轴力为压力时, 称为压应力。

式(2-1) 虽然是杆只在两端受到轴向力作用的情况下得出的, 但它也适用于杆同时在不同部位受到几个轴向外力作用的情况, 只是这时在杆的不同区段内, 由于内力 N 不同, 应力的大小也不相同。对于等直杆, 最大应力出现在最大轴力段内, 即

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A}$$

$\sigma_{\max}$ 称为最大工作应力, 其作用的横截面称为危险截面。

例 2-2 若例 2-1 中的杆为等直木杆, 其横截面积为 $25 \text{ mm} \times 25 \text{ mm}$ 的正方形, 试求杆中各段横截面上的应力。

解 杆的横截面面积

$$A = 25 \text{ mm} \times 25 \text{ mm} = 625 \text{ mm}^2 = 625 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

在例 2-1 中, 已求得杆各段的轴力分别为 $N_1 = 6 \text{ kN}$, $N_2 = -12 \text{ kN}$, $N_3 = -4 \text{ kN}$, 代入正应力计算式 $\sigma = \frac{N}{A}$, 可得:

AB 段任一横截面上的应力:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{6 \times 10^3 \text{ N}}{625 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 9.6 \times 10^6 \text{ Pa} = 9.6 \text{ MPa}$$

BC 段任一横截面上的应力:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{-12 \times 10^3 \text{ N}}{625 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = -19.2 \times 10^6 \text{ Pa} = -19.2 \text{ MPa}$$

CD 段任一截面上的应力:

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{-4 \times 10^3 \text{ N}}{625 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = -6.4 \times 10^6 \text{ Pa} = -6.4 \text{ MPa}$$

三、拉(压)杆斜截面上的应力

上面分析了拉(压)杆横截面上的正应力, 为了解决其强度计算, 有必要研究各斜截面上的应力。仍以拉杆为例, 设与横截面成任意 α 角的斜截面 K-K 的面积为 A_α , 它与横截面积 A 的关系为

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha} \quad (\text{a})$$

要求 α 截面的应力, 必须先求该截面上的内力。用截面法, 沿斜截面 k-k 将杆截分为二, 研究其左段(图 2-7(b)), 假设 α 斜截面上的内力为 P_α , 方向为背离斜截面的方向, 与轴线重合。由平衡条件可知

$$P_\alpha = P \quad (\text{b})$$

P_α 是斜截面上的合内力。采用与前面一样的

试验分析, 可知斜截面上的应力也是沿斜截面均匀分布, 且平行于杆的轴线。若以 p_α 表示

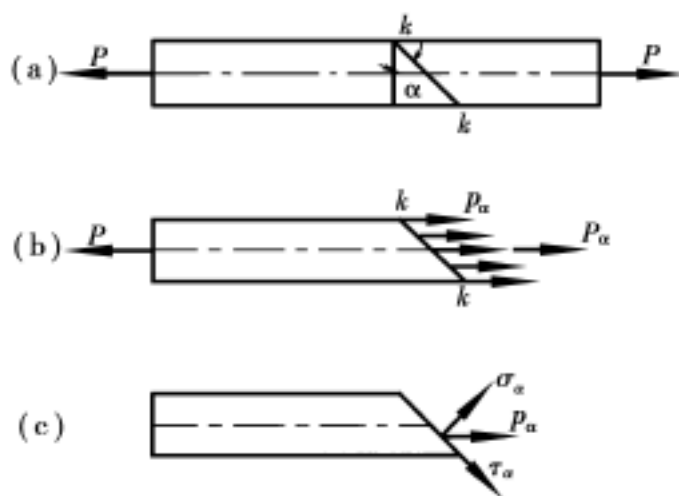


图 2-7

斜截面 k-k 上的应力, 于是有

$$p_{\alpha} = \frac{P_{\alpha}}{A_{\alpha}} = \frac{P}{A_{\alpha}}$$

利用式 (a), 得

$$p_{\alpha} = \frac{P}{A} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha$$

由于 $\cos \alpha < 1$, 所以斜截面上的应力总是小于横截面上的应力。 p_{α} 称为总应力, 也是一个矢量。为分析计算方便, 常把它分解成垂直于斜截面的分量 σ_{α} , 即正应力, 和与斜截面相切的分量 τ_{α} , 称为剪应力。由图可得

$$\sigma_{\alpha} = p_{\alpha} \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha \quad (2-2a)$$

$$\tau_{\alpha} = p_{\alpha} \sin \alpha = \sigma \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \quad (2-2b)$$

以上公式是在直杆受轴向拉伸情况下得到的, 对于受轴向压缩的直杆也适用。

在计算 σ_{α} 和 τ_{α} 时, 应代入 α 的正负号。 α 的正负号为, 从 x 轴方向向斜截面的外法线量去, 逆时针向为正, 顺时针向为负。

若要将 σ_{α} 和 τ_{α} 按正确方向标在斜截面上, 应按下面的正负号规定: σ_{α} 为拉正, 压负; τ_{α} 为绕截面内侧一点作顺时针转向者为正, 反之为负。

从式 (2-2a) 及式 (2-2b) 可看出, 斜截面上的正应力 σ_{α} 和剪应力 τ_{α} 是 α 的函数, 斜截面的方位不同, 其上的应力也不相同。当 $\alpha=0$ 时, $\sigma_{\alpha} = \sigma_0 = \sigma$, 即在拉(压)杆内某一点, 横截面上的正应力是通过该点所有不同方位截面上正应力的最大者。当 $\alpha=45^{\circ}$ 时, $\tau_{\alpha} = \tau_{45^{\circ}} = \frac{\sigma}{2}$, 即与横截面成 45° 的斜截面上的剪应力是拉(压)杆所有不同方位截面上剪应力的最大者。

2-4 拉(压)杆的变形

一、拉(压)杆的变形

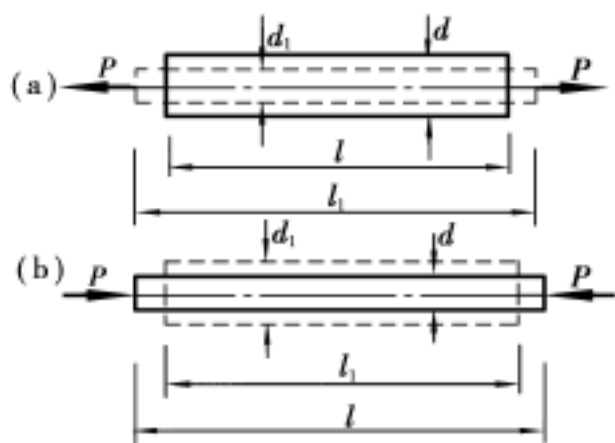


图 2-8

实验表明, 直杆在受到轴向拉伸时, 纵向要伸长, 横向要缩短; 反之, 在受到轴向压缩时, 纵向要缩短, 横向要伸长。通常用纵向伸长或缩短来度量直杆轴向拉伸或压缩时的变形。

设一等直杆受到轴向拉力 P 作用, 如图 2-8 (a) 所示, 其杆长由 l 变到 l_1 , 则

$$\Delta l = l_1 - l \quad (a)$$

称为杆的纵向伸长, 其值为正。纵向伸长只反映了杆的纵向总变形量, 无法说明杆各部分变形的程度。

为了反映杆的变形程度, 需要消除杆长度的影响, 用杆单位长度伸长量来量度。杆某截面处的单位长度伸长量称为该截面处的纵向线应变。实验表明, 拉(压)杆各部分的变形是均匀

的, 因此纵向线应变又等于杆的总伸长除以杆变形前的长度, 用 ε 表示, 即

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (2-3)$$

ε 是一无量纲量, 其正负号与 Δl 的相同。上述概念同样适用于压杆(图 2-8(b)), 只是 ε 与 Δl 均为负值。

如前所说, 杆在发生纵向变形的同时, 其横向尺寸也要发生改变, 设杆原来的横向尺寸为 d , 受力后变为 d_1 , 则

$$\Delta d = d_1 - d \quad (b)$$

称为横向变形, 受拉时为负, 受压时为正。单位横向尺寸的改变量称为横向线应变, 用 ε' 表示

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d} \quad (c)$$

ε 的正负号与 Δd 相同。

二、胡克定律

对于一般工程材料制成的轴向受拉(压)杆, 实验证明: 当杆所受的外力未超过材料的某一极限值时(下节将介绍这一极限值就是材料的比例极限), 杆的伸长(缩短) Δl 与杆所受的外力 P 及杆的原长 l 成正比, 而与其横截面积 A 成反比, 即

$$\Delta l \propto \frac{Pl}{A}$$

引进比例常数 E , 则有

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA} \quad (2-4a)$$

由于 $P = N$, 故上式又可写为

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad (2-4b)$$

这一比例关系称为胡克定律。式中的比例常数 E 称为弹性模量。它表示材料在拉伸(压缩)时抵抗弹性变形的能力。其值随材料而异, 由实验测定。单位是 Pa (MPa 或 GPa)。式中的 EA 称为抗拉(压)刚度。对于长度和受力均相同的拉(压)杆, 其抗拉(压)刚度愈大, 则杆的变形愈小, 所以它是反映杆件抵抗拉伸(压缩)变形能力大小的一个力学量。

应用式(2-4a)或式(2-4b)即可根据外力 P 或轴力 N 求杆的伸长或缩短, Δl 的正负号与 N 一致。

把式(2-4)稍加改写, 有

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{N}{A}$$

$$\text{即} \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{或} \quad \sigma = E \varepsilon \quad (2-5)$$

这是胡克定律的另一形式, 它比式(2-4)具有更普遍的意义。于是胡克定律也可叙述如下: 在比例极限内, 杆的正应力 σ 与线应变 ε 成正比。

实验还表明, 对于同一材料的杆件, 当应力未超过材料的比例极限时, 杆件的横向线应变与纵向线应变之比的绝对值为一常数, 即

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \quad (d)$$

ν 称为横向变形系数或泊松比。它是一个无量纲量,其值随材料不同而异,通过实验测定。由于 ε 与 ε' 的正、负号总是相反的,故上式又可写为

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon \quad (2-6a)$$

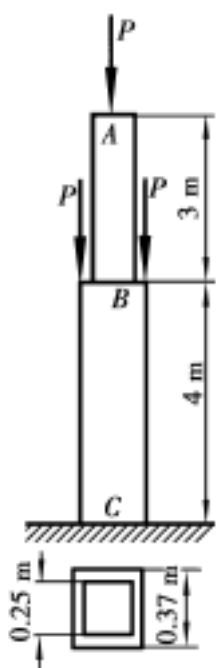
若将公式(2-5)中的 ε 代入上式,则得

$$\varepsilon' = -\nu \frac{\sigma}{E} \quad (2-6b)$$

弹性模量 E 和横向变形系数 ν 都是材料的弹性常数。表 2-1 给出几种常用材料的 E 和 ν 的约值

表 2-1 几种常用材料的 E 和 ν 的约值(在常温静载下)

材料名称	牌 号	E / GPa	ν
低 碳 钢	Q235	200 ~210	0.24 ~0.28
中 碳 钢	45	205	
低 合 金 钢	16Mn	200	0.25 ~0.30
合 金 钢	40CrNiMoA	210	
灰 口 铸 铁		60 ~162	0.23 ~0.27
球 墨 铸 铁		150 ~180	
铝 合 金	LY12	71	0.33
硬 质 合 金		380	
混 凝 土		15.2 ~36	0.16 ~0.18
木材(顺纹)		9 ~12	



例图 2-3

例 2-3 有一横截面为正方形的阶梯形砖柱,分上下两段 AB、BC。各段的长度、横截面尺寸和受力如图所示。已知砖砌体的弹性模量 $E = 3 \text{ GPa}$, 外荷载 $P = 50 \text{ kN}$ 。试求砖柱顶面的位移。

解 砖柱顶面 A 下降的位移等于全柱的缩短 Δl 。由于柱是由上、下两段组成,两段的长度、横截面尺寸和轴力都不相等,故用公式(2-4b)时,应分段使用。

各段轴力为 $N_1 = -50 \text{ kN}$, $N_2 = -3 \times 50 \text{ kN} = -150 \text{ kN}$ 。柱的总压缩量为

$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} + \frac{N_2 l_2}{EA_2} \\ &= \frac{(-50 \times 10^3) \times 3}{3 \times 10^9 \times 0.25^2} \text{ m} + \frac{(-150 \times 10^3) \times 4}{3 \times 10^9 \times 0.37^2} \text{ m} \\ &= -0.00233 \text{ m} = -2.33 \text{ mm} \end{aligned}$$

即柱顶向下位移为 2.33 mm。

例 2-4 在例图 2-4(a)所示的结构中,杆 1 为钢杆,横截面为圆形,直径 $d = 34 \text{ mm}$;杆 2 为木杆,横截面为正方形,边长 $a = 170 \text{ mm}$ 。二杆在 B 点铰接,已知钢的弹性模量 $E_1 = 210 \text{ GPa}$,木材顺纹的抗压弹性模量 $E_2 = 10 \text{ GPa}$,试求当结构在点 B 作用有荷载 $P = 40 \text{ kN}$ 时,

点 B 的水平位移及铅垂位移。

解 1) 求各杆的轴力

应用截面法, 取结点 B 进行分析, 并以 N_1 、 N_2 分别表示杆 1 和杆 2 的轴力, 根据 B 点的平衡条件(图(b)):

$$\sum Y = 0 \quad N_1 \sin 30^\circ - P = 0$$

$$\text{得 } N_1 = \frac{P}{\sin 30^\circ} = 2P$$

$$= 2 \times 40 \text{ kN} = 80 \text{ kN(拉)}$$

$$\sum X = 0 \quad -N_1 \cos 30^\circ + N_2 = 0$$

$$\text{得 } N_2 = N_1 \cos 30^\circ = 69.3 \text{ kN(压)}$$

2) 求各杆的变形

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{80 \times 10^3 \text{ N} \times 1.15 \text{ m}}{210 \times 10^9 \text{ Pa} \times \frac{\pi}{4} (34 \times 10^{-3} \text{ m})^2} = 0.00048 \text{ m} = 0.48 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{(-69.3 \times 10^3 \text{ N}) \times 1 \text{ m}}{10 \times 10^9 \text{ Pa} \times (170 \times 10^{-3} \text{ m})^2} = -0.00024 \text{ m} = -0.24 \text{ mm}$$

3) 求结点 B 的位移

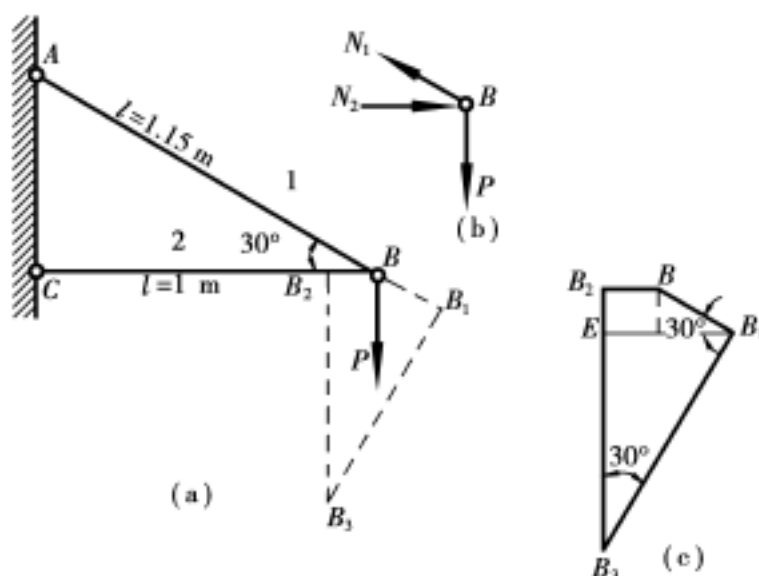
如设两杆分别自由伸缩, 则杆 1 在变形后其点 B 移到 B_1 , 杆 2 变形后其点 B 移到点 B_2 , 由二杆变形后, 仍应保持在 B 点铰接的几何条件, 以点 A 为圆心, AB_1 为半径画一圆弧; 再以点 C 为圆心, CB_2 为半径画一圆弧, 这两圆弧的交点即为点 B 位移后的位置。由于杆的变形很小, 可近似地用切线来代替圆弧, 即自点 B_1 作 BB_1 的垂线, 自点 B_2 作 BB_2 的垂线, 它们交于 B_3 点, B_3 即为点 B 位移后的位置。将此变形的几何关系图放大如图(c)所示, 由此可得到

水平位移为:

$$\overline{BB_2} = 0.24 \text{ mm(向左)}$$

铅垂位移为:

$$\begin{aligned} \overline{B_2 B_3} &= \overline{B_2 E} + \overline{EB_3} \\ &= \Delta l_1 \sin 30^\circ + \frac{\Delta l_2 + \Delta l_1 \cos 30^\circ}{\tan 30^\circ} \\ &= 0.48 \text{ mm} \times 0.5 + \frac{0.24 \text{ mm} + 0.48 \text{ mm} \times 0.866}{0.577} \\ &= 0.24 \text{ mm} + 1.136 \text{ mm} = 1.376 \text{ mm} \end{aligned}$$



例图 2-4

2-5 材料在拉伸和压缩时的力学性能

在设计构件时, 必须考虑合理选用材料的问题, 这就要了解材料的力学性能, 所谓材料的力学性能, 是指材料在外力作用下所表现的有关强度和变形方面的特性。

材料的力学性能, 需通过力学试验测定, 如果试验是在室温下, 以缓慢的加载速度(静力

加载) 进行, 得到的是材料在常温、静载下的力学性能。

材料的力学性能会随外界因素改变。材料所处的工作环境可能是常温、高温或低温, 所承受的荷载可能是静荷载或动荷载等, 这些因素都会影响材料的力学性能。因为建筑物一般多在常温、静载条件下工作, 所以本章主要讨论常温、静载条件下, 材料在拉伸和压缩时的力学性能。

一、材料的拉伸和压缩试验

为了比较各种不同材料的力学性能, 以及对同一种材料各次所作的试验能进行比较, 必须统一试验条件, 因此, 规定把试验研究的材料做成标准试件。对于金属材料的拉伸试件, 常做成圆形或矩形截面标准试件(图 2-9)。在试件中部标出一段作为工作段, 用于测量变形, 其长度称为标距 l 。拉伸试件又分为长试件和短试件, 对圆截面试件, 这两种标准试件的标距 l 与横截面直径的比例分别规定为

$$l = 10d \text{ 和 } l = 5d$$

对矩形截面试件, 这两种标准试件的标距 l 与横截面面积 A 的比例分别规定为

$$l = 11.3 \sqrt{A} \text{ 和 } l = 5.63 \sqrt{A}$$

压缩试件通常采用圆截面或方截面的短柱体(图 2-10)。为了避免试件在试验过程中被压弯, 其长度与横截面直径 d 或边长 b 的比值, 一般规定为 $1 \sim 3$ 。

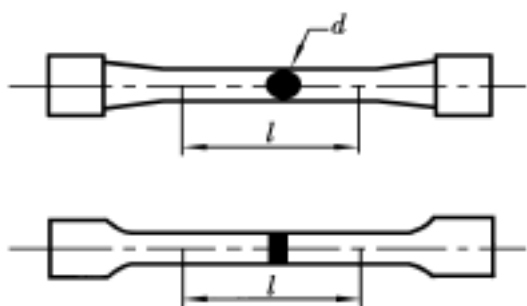


图 2-9

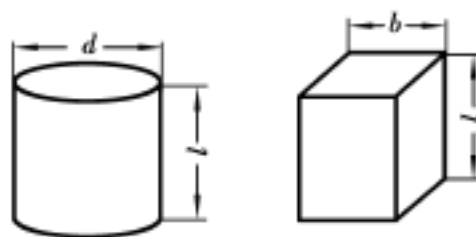


图 2-10

在拉伸和压缩试验时, 用到两类主要设备: 一类是对试件施加荷载使它发生变形, 并能测定出试件的抗力的设备, 这类设备称为万能试验机; 另一类是测量试件变形的, 它们的主要作用是将微小变形放大, 能在所需的精度范围内量测试件的变形。关于试验设备的具体构造原理和使用方法, 可参看力学试验教材, 并在试验中通过操作熟悉了解。

本节将主要介绍工程中常用的两类材料, 低碳钢和铸铁的力学性能。

二、低碳钢拉伸时的力学性能

(1) 低碳钢的拉伸图

低碳钢是建筑结构工程中应用最广的一种金属材料。低碳钢在拉伸试验中所表现出的变形与内力间的关系也最为典型和全面, 所以, 首先讨论这种材料的力学性能。试验时, 将试件安装在万能试验机的上下夹头中, 然后开动试验机, 使试件受到缓慢增加的拉力, 直到拉断为止。不同荷载 P 与试件标距内的绝对伸长量 Δl 之间的关系, 可通过试验机上的自动绘图仪绘出相应的关系曲线(图 2-11), 这一关系曲线称为低碳钢的拉伸图。

(2) 低碳钢拉伸时的应力-应变图及其力学性能