

# 材料科学中的分形

褚武扬 宿彦京 高克玮 编著  
何健英 李金许 乔利杰



化学工业出版社  
材料科学与工程出版中心

· 北 京 ·

(京)新登字 000000 号

图书在版编目 (CIP) 数据

材料科学中的分形 / 褚武扬等编著. — 北京: 化学工业出版社, 1995.  
ISBN 7-122-00000-0

I. 材... II. 褚... III. 分形理论—应用—材料科学  
IV. 材料科学

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (95) 第 000000 号

材料科学中的分形

褚武扬等编著

责任编辑: 陈志良

文字编辑: 王清颖

责任校对: 顾淑云

封面设计: 潘峰

\*

化学工业出版社 出版发行  
材料科学与工程出版中心

(北京市朝阳区惠新里 5 号 邮政编码 100029)

发行电话: (010) 59051000

电报挂号: 61170

\*

新华书店北京发行所经销

北京市彩桥印刷厂印刷

北京市彩桥印刷厂装订

开本 787mm×1092mm 1/32 印张 4.5 字数 100 千字

1995 年 10 月第 1 版 1995 年 10 月北京第 1 次印刷

定价: 5.00 元

定 价: 5.00 元

版权所有 侵权必究

该书如有缺页、倒页、脱页者, 本社发行部负责退换

# 前 言

分形理论创建的分形理论已在包括材料科学在内的各学科获得了愈来愈广泛的应用。国内有关领域的专家已编写出版十多本专著，对分形理论及其应用进行系统的介绍。

对于材料科学工作者来说，最感兴趣的是以下三个问题：一是如何把材料科学中具有统计意义的自相似结构或体系找出来，并用分形的语言加以描述；二是如何找出该分形体的分维表达式，并通过实验测出其分维；三是如何把这个分维和材料性能（如断裂韧性，延伸率等）及制备工艺（如制备薄膜的温度和时间）相联系，即找到定量关系式，进而通过分形研究来改善材料性能，找到最佳制备工艺。

关于第一个问题已有很多成功的实例，例如，晶体和凝聚体的分形生长、断口的分形、马氏体和准晶的分形等。但是，这仅仅是个开始，在材料科学领域中还有很多分形问题等待发掘和研究。因此，掌握分形基本知识的材料科学家在这方面将有很大的发展空间。第二个问题的关键是如何把材料科学中的参量和分维定量联系起来，例如薄膜表面是个分形，为了用粗糙度来描述这

个分形，就要找到粗糙度和分维的关系。关于分维的测量，有各种现成方法，材料科学家只需加以选择即可。关于第三个问题，即分维和材料性能或制备工艺相联系的问题，现有工作少得可怜。研究得较多的是断裂韧性和分维的相关性，但至今仍有争议。材料科学家应当在这方面发挥其特长，从而有可能做出创新性的工作。

本书是在参考有关专著的基础上，从材料科学的角度，围绕上述三个问题进行编写，因此，本书前猿章介绍自相似分形和自仿射分形的基本概念以及分维的测量，为使内容通俗易懂，每一个基本概念及相关公式均给出详细的论述及推导，而所用的工具仅限于高等数学，不涉及严格的数学定理；本书的后猿章则介绍分形在材料科学中的应用以及分维和材料性能的定量关系。

总之，我们希望通过这本书能使更多的材料科学家了解和掌握分形的基本知识，并通过各种实例的启发，使材料科学家有兴趣从事分形问题的研究，进而做出创新性的工作。

作译者

圆年 圆月 圆日

# 目 录

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| 第 1 章 自相似分形和分维 .....        | 1 |
| 1.1 严格自相似分形 .....           | 1 |
| 1.2 分形曲线 .....              | 1 |
| 1.3 自相交的分形曲线 .....          | 1 |
| 1.4 在字形分形折线 .....           | 1 |
| 1.5 分形树 .....               | 1 |
| 1.6 分形集 .....               | 1 |
| 1.7 分形图 .....               | 1 |
| 1.8 分形曲面 .....              | 1 |
| 1.9 自相似分形的分维 .....          | 1 |
| 1.10 欧氏维数的对数形式 .....        | 1 |
| 1.11 自相似分维的对数形式 .....       | 1 |
| 1.12 分维的幂律形式 .....          | 1 |
| 1.13 曲线长度和分维 .....          | 1 |
| 1.14 自然界（近似自相似）的分形 .....    | 1 |
| 1.15 海岸线 .....              | 1 |
| 1.16 河流 .....               | 1 |
| 1.17 沿晶裂纹 .....             | 1 |
| 1.18 断口形貌 .....             | 1 |
| 1.19 其他分形结构 .....           | 1 |
| 1.20 严格自相似和近似自相似分形的异同 ..... | 1 |

|       |                        |   |
|-------|------------------------|---|
| 摇摇圆缘圆 | 有规分形和无规分形 .....        | 圆 |
| 摇摇圆缘圆 | 标度不变性 .....            | 圆 |
| 摇摇圆缘  | 拓扑维和分维 .....           | 圆 |
| 摇摇圆缘圆 | 欧氏维和拓扑维 .....          | 圆 |
| 摇摇圆缘圆 | 分维和拓扑维 .....           | 圆 |
| 摇摇圆   | 分维的定义 .....            | 圆 |
| 摇摇圆缘圆 | 匀葬葬葬葬分维 .....          | 圆 |
| 摇摇圆缘圆 | 计盒分维 .....             | 圆 |
| 摇摇圆   | 自相似分形定义 .....          | 猿 |
| 摇摇圆缘圆 | 分形的定义和特征 .....         | 猿 |
| 摇摇圆缘圆 | 自相似分形的幂律定义 .....       | 猿 |
| 第 圆章  | 分维的测量 .....            | 猿 |
| 摇摇圆缘  | 盒子计数法 .....            | 猿 |
| 摇摇圆缘圆 | 盒子计数法原理 .....          | 猿 |
| 摇摇圆缘圆 | 分维测量的可信度 .....         | 猿 |
| 摇摇圆缘圆 | 计盒分维和 匀葬葬葬葬分维的关系 ..... | 猿 |
| 摇摇圆缘  | 变码尺测长度法 .....          | 源 |
| 摇摇圆缘圆 | 变码尺法测曲线分维 .....        | 源 |
| 摇摇圆缘圆 | 垂直剖面法测断口分维 .....       | 源 |
| 摇摇圆缘圆 | 改变仪器分辨率测分维 .....       | 源 |
| 摇摇圆缘圆 | 码尺与分维的关系 .....         | 源 |
| 摇摇圆缘  | 小岛法 .....              | 源 |
| 摇摇圆缘圆 | 小岛法测表面分维 .....         | 源 |
| 摇摇圆缘圆 | 周长和面积的幂律 .....         | 源 |
| 摇摇圆缘圆 | 湖和云的分维 .....           | 源 |

|       |                     |   |
|-------|---------------------|---|
| 摇摇圆缘原 | 分维随码尺的变化 .....      | 源 |
| 摇摇圆缘缘 | 周界直径法测分维 .....      | 缘 |
| 摇摇圆缘远 | 截面约定 .....          | 缘 |
| 摇摇圆原  | 功率谱法 .....          | 缘 |
| 摇摇圆缘员 | 功率谱的幂律 .....        | 缘 |
| 摇摇圆缘圆 | 功率谱测分维 .....        | 缘 |
| 摇摇圆缘  | 质点分形体的分维测量 .....    | 缘 |
| 摇摇圆缘员 | 密度相关函数法 .....       | 缘 |
| 摇摇圆缘圆 | 砂盒 (葬葬葬葬) 法 .....   | 远 |
| 摇摇圆缘猿 | 回转半径法 .....         | 远 |
| 摇摇圆远  | 物理方法测分维 .....       | 远 |
| 摇摇圆远员 | 散射强度法 .....         | 远 |
| 摇摇圆远圆 | 汞浸入法 .....          | 远 |
| 第 猿章  | 自仿射分形 .....         | 苑 |
| 摇摇猿员  | 自仿射分形图形 .....       | 苑 |
| 摇摇猿圆员 | 自仿射分形曲线 .....       | 苑 |
| 摇摇猿圆圆 | 魔鬼台阶 .....          | 苑 |
| 摇摇猿圆猿 | 自相似分形和自仿射分形 .....   | 苑 |
| 摇摇猿圆  | 布朗 (月葬) 运动 .....    | 苑 |
| 摇摇猿圆员 | 自相似的布朗运动轨迹 .....    | 苑 |
| 摇摇猿圆圆 | 自仿射的布朗函数 .....      | 愿 |
| 摇摇猿圆猿 | 布朗运动概率函数的自仿射性 ..... | 愿 |
| 摇摇猿圆原 | 布朗函数均方差的自仿射性 .....  | 愿 |
| 摇摇猿圆缘 | 分数布朗函数 .....        | 愿 |
| 摇摇猿圆远 | 布朗曲面 .....          | 愿 |

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| 摇猿猿摇自仿射分形函数 .....           | 怨 |
| 摇摇猿猿猿摇匀范函数 .....            | 怨 |
| 摇摇猿猿圆摇宰范函数葬范函数 .....        | 怨 |
| 摇猿原摇分数布朗曲线的分维 .....         | 怨 |
| 摇摇猿猿猿摇盒子计数法测月(贼)曲线的分维 ..... | 怨 |
| 摇摇猿猿圆摇变码尺法测月(贼)曲线的分维 .....  | 怨 |
| 摇摇猿猿猿摇功率谱的分维 .....          | 员 |
| 摇猿猿摇砷毒方法和分形 .....           | 员 |
| 摇摇猿猿猿摇自然现象的砷毒方法 .....       | 员 |
| 摇摇猿猿圆摇砷毒方法的应用 .....         | 员 |
| 摇摇猿猿猿摇砷毒方法和分数布朗运动 .....     | 员 |
| <br>第 源章摇分形生长 .....         | 员 |
| 摇源猿摇分形生长模型 .....            | 员 |
| 摇摇源猿猿摇扩散受限制的凝聚(阅)模型 .....   | 员 |
| 摇摇源猿圆摇阅凝聚体的分维 .....         | 员 |
| 摇摇源猿猿摇集团凝聚模型 .....          | 员 |
| 摇摇源猿原摇表面沉积模型 .....          | 员 |
| 摇源圆摇电解沉积 .....              | 员 |
| 摇摇源猿猿摇阅模型下的电解沉积 .....       | 员 |
| 摇摇源猿圆摇电解沉积分形树 .....         | 员 |
| 摇摇源猿猿摇其他电解沉积形貌 .....        | 员 |
| 摇源猿摇薄膜沉积 .....              | 员 |
| 摇摇源猿猿摇溅射沉积 .....            | 员 |
| 摇摇源猿圆摇气相沉积 .....            | 员 |
| 摇源原摇结晶 .....                | 员 |

|                       |    |
|-----------------------|----|
| 摇摇摇水溶液结晶 .....        | 员愿 |
| 摇摇摇碘的蒸发 .....         | 员愿 |
| 第 缘章材料科学中的分形问题 .....  | 员园 |
| 摇摇摇薄膜和表面的分形 .....     | 员园 |
| 摇摇摇高度相关函数法测薄膜分维 ..... | 员员 |
| 摇摇摇功率谱法测薄膜分维 .....    | 员缘 |
| 摇摇摇面积周长法测薄膜分维 .....   | 员缘 |
| 摇摇摇吸附法测表面分维 .....     | 员愿 |
| 摇摇摇颗粒吸附剂表面的分维 .....   | 员愿 |
| 摇摇摇高分子的分形 .....       | 员园 |
| 摇摇摇高分子结构特征 .....      | 员园 |
| 摇摇摇无规行走模型的分维 .....    | 员源 |
| 摇摇摇自回避行走模型的分维 .....   | 员缘 |
| 摇摇摇高分子分维的测量 .....     | 员苑 |
| 摇摇摇非晶晶化和晶粒的分形 .....   | 员愿 |
| 摇摇摇非晶晶化的分形结构 .....    | 员愿 |
| 摇摇摇非晶晶化图形的分维 .....    | 员怨 |
| 摇摇摇晶界空间分布的分维 .....    | 员远 |
| 摇摇摇马氏体的分形结构 .....     | 员缘 |
| 摇摇摇用 杂 毯测马氏体分维 .....  | 员缘 |
| 摇摇摇马氏体的非均匀分形 .....    | 员怨 |
| 摇摇摇准晶体的分形 .....       | 员源 |
| 摇摇摇准晶结构 .....         | 员源 |
| 摇摇摇准晶的分维 .....        | 员愿 |

|                            |   |
|----------------------------|---|
| 第 1 章 断裂与分维 .....          | 1 |
| 1.1 断裂口和裂纹的分维 .....        | 1 |
| 1.2 断裂口分维的测量 .....         | 1 |
| 1.3 断裂口分维和断裂表面分维 .....     | 1 |
| 1.4 裂纹的分维 .....            | 1 |
| 1.5 断裂韧性与断口分维 .....        | 1 |
| 1.6 断裂韧性与断口分维的关系 .....     | 1 |
| 1.7 断裂和 相关性评述 .....        | 1 |
| 1.8 断裂和 相关性的实验研究 .....     | 1 |
| 1.9 断裂与分维 .....            | 1 |
| 1.10 临界 积分和断口分维 .....      | 1 |
| 1.11 延伸率和断口分维 .....        | 1 |
| 1.12 环境断裂与分维 .....         | 1 |
| 1.13 应力腐蚀门槛应力强度因子和分维 ..... | 1 |
| 1.14 沿晶应力腐蚀断口分维的各向异性 ..... | 1 |
| 1.15 氢致滞后断裂与分维 .....       | 1 |
| 1.16 氢致塑性损失和分维 .....       | 1 |
| 1.17 裂纹形核、扩展的分形特征 .....    | 1 |
| 1.18 裂纹扩展速率和分形 .....       | 1 |
| 1.19 裂纹扩展声发射的分形特征 .....    | 1 |
| 1.20 氢化物裂纹的分形 .....        | 1 |
| 参考文献 .....                 | 1 |

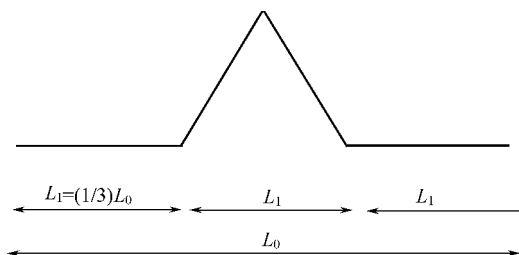
# 第 1 章 自相似分形和分维

## 1.1 严格自相似分形

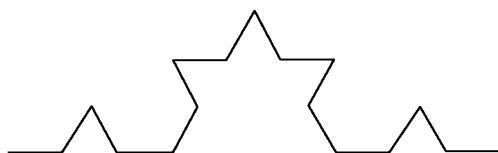
### 1.1.1 科赫曲线

把一条长为  $l$  的直线三等分，中间一段用夹角为  $60^\circ$  的两条长为  $\frac{l}{3}$  的折线来代替，就构成一个生成元，如图 1.1(1) 所示。曲线总长度为  $\frac{4}{3}l$ 。将图 1.1(1) 上的三段折线均用再缩小  $\frac{1}{3}$  的生成元（即图 1.1(1)）迭代，结果就得到图 1.1(2)，曲线总长  $\frac{16}{9}l$ 。经过第三次、第四次迭代后的嵌套结构如图 1.1(3) 和图 1.1(4) 所示。迭代过程可以不断进行下去，迭代次数（或结构层次）可以无限大。这种曲线称为科赫曲线，它处处连续，但各点均不可微分。

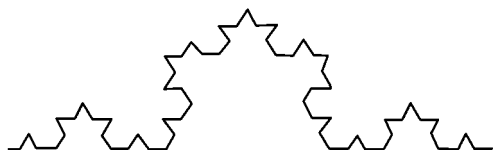
科赫曲线的最大特点就是每一个组成部分放大后就和整体相似，这种性质就叫做自相似性。例如，把图 1.1(4) 上的某段区间  $[a, b]$  放大  $3$  倍（沿方向与  $ab$  方向均放大  $3$  倍）就得到原来的图 1.1(4)。若把  $ab$  放大  $3$  倍，也会得到同样的结果。虽然图 1.1(3) 和图 1.1(4) 的图形是倾斜的，但把它放大  $3$  倍，也会得到同样的结果。若把  $ab$  即区间  $[a, b]$ ，的图形放大  $3$  倍，同样也可以产生和图 1.1(4) 相同的图



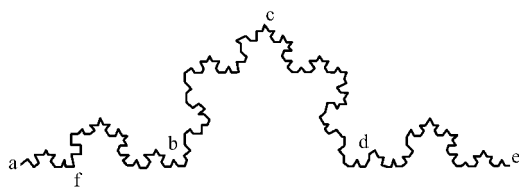
(a)  $n=1$



(b)  $n=2$



(c)  $n=3$



(d)  $n=4$

图 员 具有分形结构的 噪曲线

摇

形。对更小的部分进行放大，也是如此。不论多小的部分，若把它放大适当的倍数，均能得到与原来相同的图形。这就是说，用不同的放大倍数放大 噪曲线的某一部分，所得

曲线和原曲线相似，这种组成部分和整体的自相似性就称为分形，故这种曲线是分形曲线。应当指出，灶>圆的所有曲线均为分形曲线，但随 灶升高，曲线的弯折程度升高（细节愈多），总长度增大。

## 猿猿猿猿自相交的分形曲线

把图 猿圆(葬) 的直线三等分，用 猿猿个 猿猿的线段构成一个如图 猿圆(遭) 所示的生成元。把图 猿圆(遭) 上标有数字 猿~ 猿的 猿猿段折线均用再缩小 猿猿的生成元 猿猿代，得图 猿圆(糟)。图 猿圆(糟) 上标号 源~ 愿的 源个生成元较清楚，彼此只有少部分重叠。但其他生成元有很大

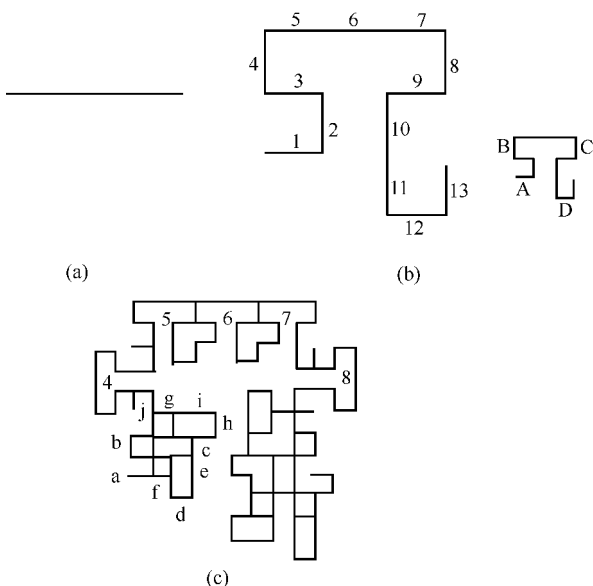


图 猿圆 猿猿猿猿在平面上自相交的分形曲线

重叠。例如线段猿 线段圆 线段猿的生成元分别为 猿, 圆, 猿, 这三个生成元重叠部分最多。同样, 线段怨~ 线段 猿生成元重叠也极多。类似的迭代可以不断进行下去。由于整体是由生成元构成, 每一个生成元或每一小部分均和整体具有自相似性, 故这种自相交的曲线也是分形曲线。

龘龘龘龘在字形分形折线

图 15.11 (或图 15.12) 所示为可以不断迭代的分形曲线族；每一个分形曲线的投影长度均相同；且每一分形曲线的组成部分和整体均有自相似性。投影长度不受限制的在字形折线也可以成为分形曲线。例如，夹角为  $\theta$  与  $\pi - \theta$  的两条折线作为生成元，由此可以构成在字形折线族……，如图 15.13 (a) 所示。它也是一条分形曲线，因为它

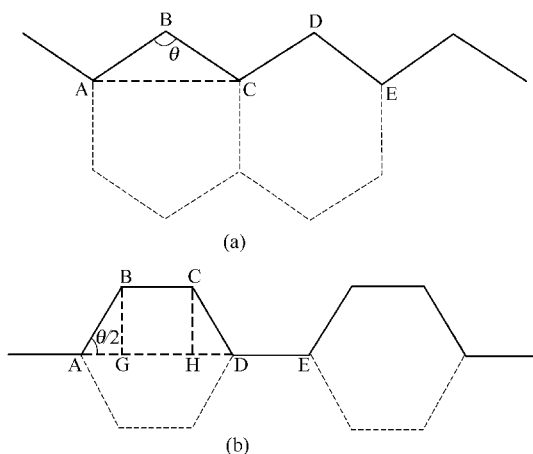


图 5-1-10 在字形分形折线

由一个生成元  $\frac{1}{3}$  段构成。图 1.1.1(b) 所示也是一条分形曲线，其生成元为  $\frac{1}{3}$  段。

## 1.1.2 分形树

把一根直线  $\frac{1}{3}$  等分，在  $\frac{1}{3}$  和  $\frac{2}{3}$  的高度处左右各添一条长为其长度的  $\frac{1}{3}$  段，夹角为  $60^\circ$  的两个分支，如图 1.1.2(a) 所示。这样一个生成元由缩小为  $\frac{1}{3}$  的  $\frac{1}{3}$  段小段构成。第二次迭代时对所有的  $\frac{1}{3}$  个分支均用再缩小为  $\frac{1}{3}$  的生成元代替，如图 1.1.2(b) 所示。第三次迭代后如图 1.1.2(c) 所示。迭代可以不断进行下去，获得自相似的分形结构（像一棵树），它的每一部分均和整体具有自相似性。

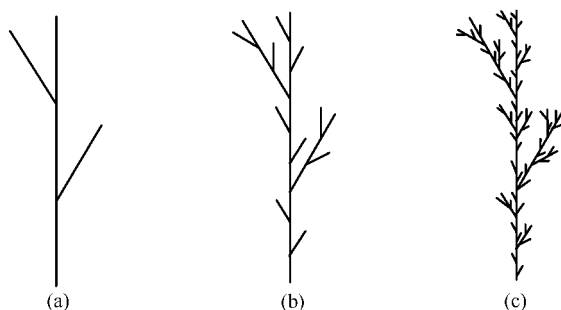


图 1.1.2 自相似分形树的生成过程

摇

## 1.1.3 科克曲线

把一条长为 1 的直线三等分，去掉中间一段，剩下两段，如图 1.1.3(a) 所示。将剩下的两条线段再三等分，各

去掉中间的一段，如图 1.1.1(a) 所示。再将剩下的四条线段三等分，并各去掉中间的一段，如图 1.1.1(b) 所示。这种操作可以不断地进行下去。当操作次数  $n \rightarrow \infty$  时，就可以获得一个离散的点集，称为康托尔集。很显然，这个结构（集合）是自相似的，区间  $[0, 1]$  和  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  的结构（小线段）和整体（大线段）在几何上是相似的，相似比为  $\frac{1}{3}$ 。在图 1.1.1(a) 的四个区域内，其组成部分（即四个小线段）也和整体相似，相似比为  $(\frac{1}{3})^2$ 。依次类推，这个集合包含许多不同比例的、与自身相似的小单元。因此，康托尔集是一个分形。

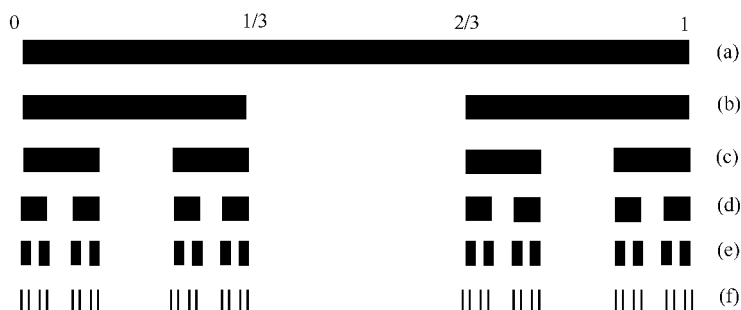


图 1.1.1 三分康托尔集

摇

如果把  $[0, 1]$  区间看成一个时间轴，康托尔集代表该时间轴上发生的无限多个“点”事件，那么电子通讯电路中出现误差的规律就可以近似地用康托尔集描述。误差是一簇簇不连续出现的，一段无误差的通讯出现之后，紧跟着—端有误差的通讯。进一步观察，在一簇簇有误差的区间中仍会有无误差的小段落。如此下去就构成了分形时间的实·远

例。配<sub>葬</sub>世<sub>葬</sub>葬<sub>葬</sub>发现<sup>[100]</sup>，员<sub>葬</sub>与员<sub>葬</sub>内无误差段落与有误差段落之比相同，是一个常数。这是悦<sub>葬</sub>集在现实中的一个实例。悦<sub>葬</sub>集可用来模拟间断性事件。

## 图 1-1-1 悦<sub>葬</sub>集的分形图形

将一个正三角形三条边的中点连接起来，就获得源个  
小三角形，去掉中间一个，留下其他三个，如图 1-1-1(a)  
所示。对留下的三个三角形每个再分成四份，并把中间的  
去掉，就剩下猿个涂黑的小正三角形，如图 1-1-1(b) 所  
示。这个操作继续下去，就可以获得图 1-1-1(c) 和图 1-1-1  
(d)，其中涂黑的小三角形分别为猿和猿。如此分割下去  
就获得 悦<sub>葬</sub>集。因为每个组成部分均是等边三角形，

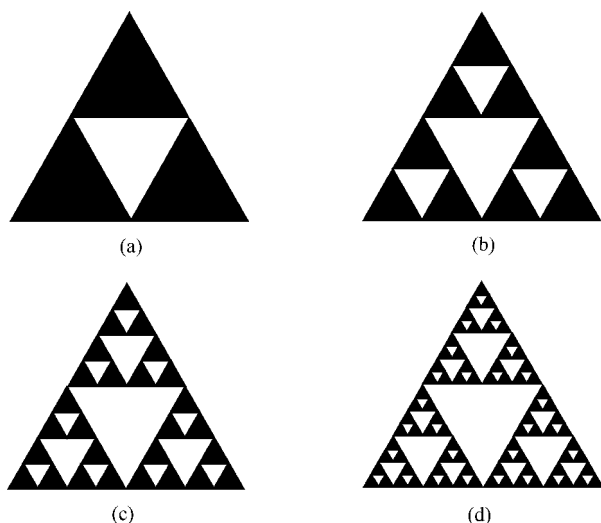


图 1-1-1 悦<sub>葬</sub>集的分形图形