高中快车道同步辅导训练

高 二 数 学

下 册

图书在版编目（CIP）数据

高中快车道同步辅导训练．高二数学·下册/马昌安主编．—北京：机械工业出版社，2003.12

ISBN 7-111-01444-8

Ⅰ．**高**...　Ⅱ．**马**...　Ⅲ．**数学课-高中-教学参考资料**　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP **数据核字**（2003）**第** 105773 **号**

机械工业出版社（**北京市百万庄大街** 22 **号　邮政编码**　100037）

策划编辑：周中华　　责任编辑：郑文斌

封面设计：鞠　杨　　责任印制：施　红

北京铭成印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2004 **年** 1 **月第** 1 **版·第** 1 **次印刷**

890mm×1240mm 1/16·9.5 **印张**·337 **千字**

定价：12.00 **元**

内 容 特 色

正确处理听课与做课堂笔记的矛盾，是学生提高学习效率的诀窍之一。本丛书将名师摘记的课堂教学要点和心得荟萃成“课堂札记”，不但可以解除学生做课堂笔记之苦，而且有助于提高学生学习效率。

明确知识的重点、难点、高考热点和拓展考点空间，掌握规律、方法和技巧，是学生提高学习效率的又一诀窍。丛书“课堂札记”中的“要点与焦点”栏目，将知识要点、重点、难点、高考热点一目了然地展示出来；“拓展与点悟”栏目，围绕高考要求，拓展考点空间，揭示知识规律，点悟学习窍门；“举一反三”栏目，选解典型考题，指引解题思路，归纳解题方法，点拨解题技巧，总结解题规律，示范解题格式。以上栏目都以教学课时内容或节(课)内容为单位设置编写，它将使学生学习得快，把握得准，领悟得好，运用得巧。

丛书的“课后练习”分“基础题”、“综合题”和“创新（开放、探究）题”，“单元测试题”分“基本分题组”、“前茅分题组”和“状元分题组”，均体现新课程理念，强调联系现实生活、学生经验、实际应用，突出对学生开放性、探究性、创新精神和实践能力的培养，符合素质教育要求，紧跟高考新形势。

由于该丛书集独创性、科学性、适应性、实用性和高效性于一体，从而赢得了“黄金教辅”的美誉。

高中快车道·同步辅导训练编写组

2003 年 12 月

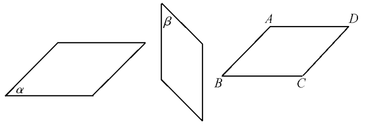
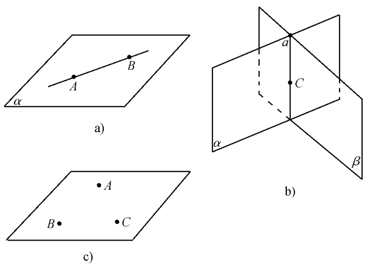
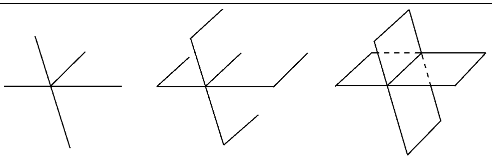
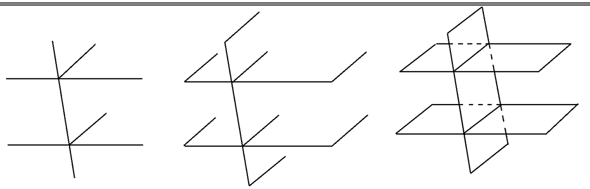
目　录

第九章　直线、平面、简单几何体

第 1 课时　9.1 平面基本性质(一)

课堂札记

要点与焦点

项　目	内　　容
平面表示法	1. 平面是向四周无限伸展的. 2. 平面常画成平行四边形(如图 9-1). 3. 平面记法：平面一般用 α、β、$\gamma\cdots$来表示，如记为平面 α，平面 β、平面 AC 等.  图 9-1
平面的基本性质	1. 如果一条直线的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有的点都在这个平面内(如图 9-2a). 2. 如果两个平面有一个公共点，那么它们还有其他公共点，这些公共点的集合是一条直线(如图 9-2b). 3. 经过不在同一条直线上的三点有且只有一个平面(简单地说，不共线的三点确定一平面)(如图 9-2c).  图 9-2
平面相交及交线	如果两个平面有一条公共直线，则称这两个平面相交，这条公共直线叫做这两个平面的交线(如图 9-2b).
画相交平面的步骤	 

拓展与点悟

1. 平面的基本性质是立体几何的最基础的内容，熟练掌握平面的基本性质是学好立体几何的第一步.

2. 公理 1 是判断直线在平面内的依据. 在以后作几何体的简单截面和延伸平面或作相交平面确定两平面的交线时必定用公理 1.

3. 公理 2 是确定两个平面是否有交线的依据. 只要两个平面有一个交点，则这两个平面必然有一过该点的交线，具体做法是将两平面分别延伸，先找到这两个平面的两个公共点，再将该两点作连线.

4. 公理 3 是空间中确定平面及其位置的依据，阐明了存在平面的条件.

5. 注意：在同一直线上的三点不能确定惟一的平面，而是存在无数多个平面.

举一反三

【例 1】已知 $P\in\alpha$，直线 AP 与 BP 不在 α 内，画出 AP、BP 所确定的平面 β 及直线 AB 和 α 的交点.

分析：由题设结合公理 1，2 知 α 与 β 的交线是 PC，则作图 9-3 和图 9-4.

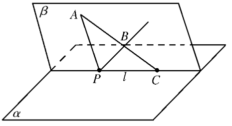


图 9-3

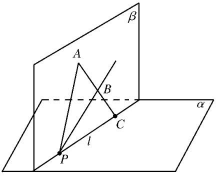


图 9- 4

小结：(1) 立体几何中的作图形式虽然不是惟一的，但同一问题中相关的点线关系、线面关系是确定的. 如本题中的两种图式均有：α 与 β 的交线为 l，l 必过直线 AB 与 α 的交点 C.

(2) 为了尽快而有效地建立和培养立体结构及空间想象能力，对书中的识图和画图要十分重视.

【例 2】将一块三角板任意放在你的书桌面的上方但与桌面不接触，若该三角板三边所在直线与你的桌面分别有三个交点，请研究这三个交点具有什么样的良好特性？

答：该三个交点共线.

设该三角板为$\triangle ABC$，AB、AC、BC 分别交平面 α(即桌面)于 P、Q、R(如图 9-5)，则 P、Q、R 既在$\triangle ABC$ 所在的平面内又在平面 α 内，由公理 2 知 P、Q、R 在$\triangle ABC$ 所在的平面与平面 α 的交线上，故 P、Q、R 三点共线.

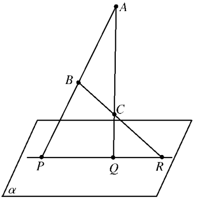


图 9-5

【例 3】在长方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 中，画出平面 $ABC'D'$ 和平面 $A'B'CD$ 的交线.

解：如图 9-6.

连结 AD'和 $A'D$ 交于点 S，连结 BC'和 $B'C$ 交于点 T.

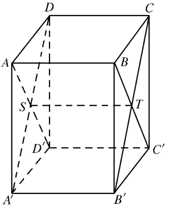


图 9- 6

∵ S 在直线 AD'上，AD 又在平面 $ABC'D'$内，

∴ S 在平面 $ABC'D'$内.

又 S 在直线 $A'D$，$A'D$ 在平面 $A'B'CD$，故 S 又在平面 $A'B'CD$ 内.

因此，点 S 是平面 $ABC'D'$和平面 $A'B'CD$ 的公共点.

同理，点 T 也是平面 $ABC'D'$与平面 $A'B'CD$ 的公共点.

由公理 2 知连结 ST，即 ST 为平面 $ABC'D'$与平面 $A'B'CD$ 的交线.

小结：要确定两个平面的交线，关键在于确定两个平面的两个公共点. 这两个公共点的连线就是这两个平面的交线.

【例 4】当你骑自行车出门时，在你打算离开自行车去办事之前，你必须把自行车放稳，为什么你只要把安装在自行车后轮旁的支撑脚放下就可将自行车放稳？你能用数学理论解释吗？你还能例举三个生活中类似的例子吗？

答：地面可近似地看成一个平面，自行车上的前、后轮再加上支撑脚可看成是三个不在同一直线上的三点，由公理 3 知不在同一直线上的三点确定一个平面，故自行车可放稳.

例子 1. 安装在房屋墙壁上的门.

例子 2. 安装在房屋墙壁上的窗户.

例子 3. 三脚凳.

小结：我们的社会生活中处处都用到数学理论和原理，请同学多用数学知识去观察我们生活中所用的产品或商品，其实万事万物无不用到数学，请同学们注意学好数学，将来对你有无穷无尽的益处.

课后练习

基础题

1. 下列说法正确的是　　　　（　　）

(A) 直线 l 长 3 米，宽 0.01 米

(B) 平面 α 长 3 米，宽 2 米

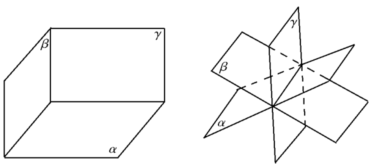
(C) 平面就是平行四边形

(D) 平面是无厚度且向四周无限伸展的，我们常用平行四边形来表示平面

答：D.

解析：由平面的定义可知.

2. 对于图 9-7a、b 而言，下列描述正确的是　　　　（　　）



a)　　　　b)

图 9-7

(A) a 表示 3 个平面，b 表示 6 个平面

(B) a、b 都表示 3 个相交平面

(C) a 将空间分成 4 个部分，b 将空间分成 6 个部分

(D) a 将空间分成 2 个部分，b 将空间分成 6 个部分

答：B.

解析：由平面定义可得. 平面是无限延伸的.

3. 平面 α、β 的公共点多于 2 个则 α、β　　　　（　　）

(A) 重合　　(B) 有一条公共直线

(C) 有无数个公共点　　(D) 有两条相交的公共直线

答：C.

解析：有一条相交的公共直线或 α 与 β 重合.

4. 一个平面经过三点则这三点　　　　（　　）

(A) 在一条直线上　　(B) 不在一条直线上

(C) 可能在一条直线上　　(D) 不能在一条直线上

答：C.

解析：也可能不在同一直线上.

5. 给出下列命题，将假命题的序号填在________上.

(1) 如果平面 α 与平面 β 相交，那么它们只有有限个公共点；

(2) 过一条直线的平面有无数多个；

(3) 两个平面的交线可能是一条线段；

(4) 两个相交平面有不在同一条直线上的三个公共点；

(5) 经过空间任意三点有且只有一个平面；

(6) 如果两个平面有三个不共线的公共点，那么这两个平面就重合为一个平面.

答：(1)(3)(4)(5).

解析：由平面的基本性质可知.

综合题

6. 在正方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 中，点 P 在棱 CC' 上，画出直线 AP 和平面 $A'B'C'D'$ 的交点.

解：连 AP 并延长，连 $A'C'$ 并延长与 AP 的延长线交于点 M，则 M 为 AP 与面 $A'B'C'D'$ 的交点.

7. 已知梯形 $ABCD$ 的四条边 AB、BC、CD、DA 所在直线分别与另一平面内的梯形 $A'B'C'D'$ 的四条边 $A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'A'$ 所在的直线交于点 E、F、G、H. 则 E、F、G、H 这四点共线吗？试说明之.

解：因为 E、F、G、H 四点共线. 因为 E 既在 AB 上又在 $A'B'$ 上，又 AB 在平面 $ABCD$ 内，$A'B'$ 又在平面 $A'B'C'D'$ 内，故 E 在平面 $ABCD$ 内又在平面 $A'B'C'D$ 内. 则 E 在平面 $ABCD$ 与平面 $A'B'C'D'$ 的交线上. 同理，F、G、H 也在平面 $ABCD$ 与平面 $A'B'C'D'$ 的交线上. 故共线.

创新题

8. 请拿出你的一对直角三角板，将斜边完全重合，然后在它们的直角边上各取一个点，再将它们各自的直角边上的点用直线连结起来，若两直线相交，请考察其交点有什么意外的特性呢？并用数学理论证明之. 若以重合的斜边为轴转动三角板，其交点是否有相同的特性呢？

解：其交点刚好在重合的斜边的延长线上. (其证明与第 7 题相似，略). 转动三角板交点有相同的特性.

第 2 课时　9.1 平面基本性质(二)

课堂札记

要点与焦点

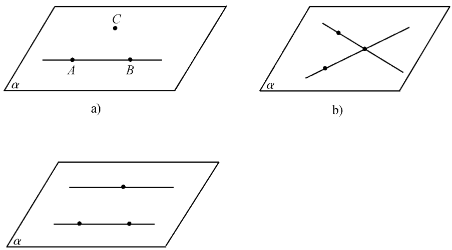
公理3的推论

推论 1——经过一条直线和直线外的一点有且只有一个平面(如图 9-8a).

推论 2——经过两条相交直线有且只有一个平面(如图 9-8b).

推论 3——经过两条平行直线有且只有一个平面(如图 9-8c).

(高考热点)



a)　b)　c)

图 9-8

拓展与点悟

1. 三个推论是空间里确定平面的具体位置的依据. 这三个推论提供了把空间问题转化为平面问题的条件. 解决立体图形的问题离不开平面几何中的定义、公理、定理、公式，因此我们必须确定平面，将空间图形问题转化为平面图形问题是研究立体图形的基本思路.

2. 推论 3 是立体图形中确定平行四边形、矩形、正方形、菱形、梯形这些平面图形必须使用的公理.

3. 公理和推论中的“确定”和“有且只有一个”其意义是相同的，都包含两层含义：“有”说明图形存在；“只有一个”说明图形是惟一的.

4. 正确使用“$\in$、$\subset$、$\notin$、$\not\subset$、$\cap$”等数学符号来表示点、直线和平面三种图形之间的关系.

5. 熟悉符号语言、文字语言和图形语言的等价转换.

举一反三

【例 1】已知直线 l 与三条平行直线 a、b、c 都相交，这四条直线 a、b、c、l 共面吗？若共面请证明，若不共面，请说明理由.

答：四直线 a、b、c、l 共面. 如图 9-9，设 $a\cap l=A$，$b\cap l=B$，$c\cap l=C$. 因为 $a/\!/b$，所以 a、b 可确定一个平面 α.

因为 $A\in a$，$B\in b$，所以 $A\in\alpha$，$B\in\alpha$，故 $AB\subset\alpha$ 即 $l\subset\alpha$.

因为 $b/\!/c$，所以 b、c 可确定一个平面 β.

同理可证 $l\subset\beta$.

所以 α、β 均过相交直线 b、l. 所以 α 与 β 重合，所以 $c\subset\alpha$. 故 a、b、c、l 共面.

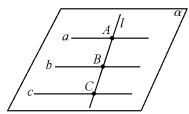


图 9-9

小结：证明直线共面的一般方法有两种：

方法一：先由两条平行直线或相交直线确定一个平面，再依据平面的基本性质证明其他直线在此平面内.

方法二：先分别确定两个平面，再依据平面的基本性质证明这两个平面重合.

【例 2】请做实验，思考得出结论并用数学原理说明理由：请找四条细铁丝进行任意摆放，要求它们要两两相交但不通过同一点，则这四条细铁丝是否在同一平面内？

答：四线在同一个平面内.

设这四条细铁丝为代表四条直线 a、b、c、d.

分析：利用部分条件由推论先确定一个平面，然后再证明其他元素也在该平面内.

证明：(1) 若无三线共点，如图 9-10，设 $a\cap d=M$，$b\cap d=N$，$c\cap d=P$，$a\cap b=Q$，$a\cap c=R$，$b\cap c=S$.

因为 $a\cap b=M$，所以 a、b 确定一个平面，设为 α，因为 $N\in d$，$Q\in a$，a，$d\subset\alpha$，所以 N、$Q\in\alpha$，所以 $b\in\alpha$，

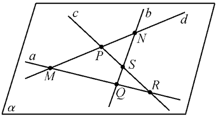


图 9-10

同理，$c\subset\alpha$.

故 a、b、c、d 共面.

(2) 有三线共点的情形，如图 9-11，设 b，d，c 三线交于点 K，$a\cap d=M$，$a\cap b=N$，$a\cap c=P$，且 $K\notin a$，因为 $K\notin a$，所以 K 与 a 确定一个平面 β，因为 $N\in a$，$a\subset\beta$，所以 $N\in\beta$.

又 $K\in b$，$N\in b$，所以 $b\subset\beta$

同理，$c\subset\beta$，$d\subset\beta$

故 a、b、c、d 共面.

小结：分类讨论是中学数学中的重要思想方法.

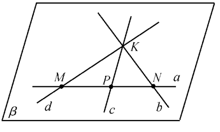


图 9-11

【例 3】四边形 $ABCD$ 为空间四边形，E、H 分别是 AB、AD 的中点，F、G 分别是 CB、CD 上的点，且 $\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$，

(1) 求证：四边形 $EFGH$ 是梯形；

(2) 延长 FE、GH 交于点 P，证明 P、A、C 三点共线.

分析：证明梯形首先找两平行边.

证明：(1) $\because$ EH 是$\triangle ABD$ 的中位线，

$\therefore$ $EH/\!/BD$，

又 $\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$，

$\therefore$ $FG/\!/BD$，故 $EH/\!/FG$.

又 $EH=\frac{1}{2}BD$，$FG=\frac{2}{3}BD$

$\therefore$ $EH\neq FG$，故 $EHFG$ 是梯形.

(2) 如图 9-12，平面 ABC 与平面 ADC 交于直线 AC，P 为直线 EF 与直线 GH 的交点.

$\because$ $P\in EF$，$EF\in$ 平面 ABC，故 $P\in$ 平面 ABC，

又 $\because$ $P\in GH$，$GH\subset$平面 ACD，故 $P\in$ 平面 ACD.

$\therefore$ P 必在二面的交线 AC 上，即 P、A、C 共线.

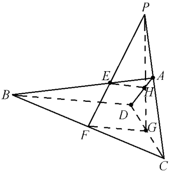


图 9-12

小结：证明点共线只要证明点同时在两个平面内即可.

【例 4】定线段 AB 所在直线与定平面 α 相交，P 为直线 AB 外的任一点，且 $P\notin\alpha$，直线 AP、BP 与 α 交于 A'、B'. 求证：不论 P 在什么位置，$A'B'$ 过一定点.

证明：如图 9-13，设定线段 AB 所在直线与定平面 α 相交于定点 O.

$\because$ AP、AB 相交于 A 点，又 AP、AB 可确定平面 β，又 $AP\cap\alpha=A'$，$PB\cap\alpha=B'$，$AB\cap\alpha=O$，

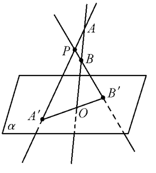


图 9-13

$\therefore$ A'、O、B' 是平面 α 与 β 的公共点，故三点 A'、O、B' 共线. 即 $A'B'$必过一定点 O.

小结：证明直线过定点，首先确定出一个与定直线有关而与 P 的位置无关的定点，再转化为证三点共线.

课后练习

基础题

1. 一条直线和这条直线外的三点最多可以确定的平面的个数是　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

（A） 3 个　　（B） 4 个　　（C） 5 个　　（D） 6 个

答：B.

解析：第一类，三个点确定 1 个平面；

第二类，一点一线可以确定 3 个平面，故共 4 个.

2. 三条平行直线所确定的平面个数是　　　　　　（　　）

（A） 1 个　　（B） 2 个

（C） 3 个　　（D） 1 个或 3 个

答：D.

解析：分三平行直线共面或不共面求之.

3. 空间四个点所确定的平面的个数是　　　　　　（　　）

（A） 4 个　　（B） 2 个

（C） 3 个　　（D） 1 个或 4 个

答：D.

解析：分四点共面与不共面求之.

4. 空间四个点，三点共线是四点共面的（　　）条件.

（A） 充分不必要　　（B） 必要不充分

（C） 充分必要　　（D） 非充分也非必要

答：A.

解析：三点共线，四点必共面，反之四点共面，三点不一定共线.

5. 在空间四边形 $ABCD$ 各边 AB、BC、CD、DA 上分别取 E、F、G、H 四点，若 EF、HG 交于一点 M，则点 M 在直线（　　）上.

（A） AC　　（B） BD

（C） AC 或 BD　　（D） 以上都不对

答：A.

解析：E、FE 面 ABC，G、HE 面 ADC，则 EF 与 GH 的交点在 AC 上.

6. 与空间不共面的四个点距离相等的平面有　　　（　　）

（A） 3 个　　（B） 4 个

（C） 7 个　　（D） 无数个

答：C.

解析：第一类：1 点在一侧另 3 点在一侧，共有 4 个；

第二类：2 点在一侧另外 2 点在一侧有 3 个，故共有 7 个.

7. 空间四个平面两两相交，以其可能的交线的条数为元素构成的集合是__________.

答：{1，4，6}.

解析：第一类，四平面交于同一线；第二类，有三个平面交于同一线则有 4 条交线，第三类，四个平面两两相交，任何三个不交于同一线则有 6 条.

8. P、Q 两点分别是正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AA_1，CC_1 的中点，则四边形 $PDQB_1$ 是__________.

答：菱形.

解析：在 B_1B 上取中点 M，则 $PD \mathrel{\underline{\parallel}} MC \mathrel{\underline{\parallel}} B_1$、$Q$. 又 $\triangle A_1PB_1 \cong \triangle C_1QB_1$.

9. 三个平面将空间可能分成的部分设为 t，则由 t 为元素形成的集合为__________.

答：{4，6，7，8}.

分四种可能情况：第一类，三个平面互相平行；

第二类，三个平面交于一公共直线；第三类，三平面两两相交，且三个平面不共线且交线平行；第四类，三个平面交一个公共点.

综合题

10. 如图 9-14，已知直线 AB、BC、CA 两两相交，交点分别是 A、B、C. 求证：直线 AB、BC、CA 共面.

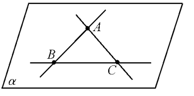


图 9-14

证明：

设 AB 与 AC 确定平面 α，又 $B\in AB$，$AB\subset\alpha$，$\therefore B\in\alpha$，

同理：$C\in\alpha$

$\therefore BC\subset\alpha$

故 AB、BC、CA 共面.

11. 如图 9-15，E 是正方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 的棱 BB' 的中点，

（1） 画出平面 AEC' 与平面 $ABCD$ 的交线.

（2） 求出（1）中所画的交线与 AB 所成的夹角的大小.

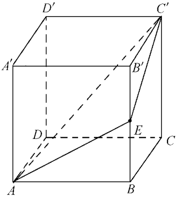


图 9-15

解：（1）延 $C'E$、CB 交于 F，连 AF，即为所求.（2）可证得 BE 为 $\triangle FCC'$ 的中位线，则 $BC=BF=AB$，又 $\angle ABF=90°$，

则$\angle FAB=45°$，即为所求.

创 新 题

12. 四边形 $ABCD$ 中，若 $AB=BC=CD=DA=BD=2$，

（1）你认为 $ABCD$ 是什么图形？

（2）若 A、C 两点的距离为 2，则四边形 $ABCD$ 是什么图形呢？

（3）试求 A、C 两点的距离的取值范围.

解：(1)可能是菱形也可能是空间四边形. (2)对角线与边都相等的空间四边形. (3)$0<AC\leqslant 2\sqrt{3}$. 若 $ABCD$ 是一个平面图形时 AC 的长最大为 $2\sqrt{3}$，若 $ABCD$ 是空间四边形时 $AC>0$.

13. 不在同一平面内的两个三角形，它们的边两两对应平行，针对以下问题写出猜想并证明.

（1）三条边对应顶点的连线有什么关系？

（2）这两个三角形有什么关系？

解：(1) 平行或相交于同一点. 证明：若$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$则 $AA'\parallel BB'\parallel CC'$；若$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$不全等，则 $A'A$ 与 $B'B$ 必相交. 设 $AA'\cap BB'=O$. $\because BC\parallel B'C'$，则 $O\in$ 平面 BC'. 同理，$O\in$ 平面 AC'. 则 $O\in CC'=$平面 $BC'\cap$ 平面 AC'. 故 AA'、BB'、CC'共点 O.

(2) 若 $AB=A'B'$，则$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$. 若 $AB\neq A'B'$. 则由 $A'B'\parallel AB$，$B'C'\parallel BC$ 得$\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{B'C'}{BC}$.

同理，$\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{A'C'}{AC}$. $\therefore$ $\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$.

第 3 课时 9.1 空间图形直观图的画法

课堂札记

要点与焦点

项 目	内 容
直观图	表示空间图形的平面图形
斜二测画法规则	（1）在已知图形中取水平平面，取互相垂直的轴 Ox、Oy，再取 Oz 轴，使$\angle xOz=90°$，且$\angle yOz=90°$.（简单地说，选取坐标系.） （2）画直观图时，把它们画成对应的轴 $O'x'$、$O'y'$、$O'z'$，使$\angle x'O'y'=45°$(或 135°)，$\angle x'O'z'=90°$. $x'O'y'$所确定的平面表示水平平面；(即画坐标系). （3）已知图形中平行于 x 轴、y 轴或 z 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x'轴、y'轴或 z'轴的线段；(即画平行线段) （4）已知图形中平行于 x 轴和 z 轴的线段，在直观图中保持长度不变；平行于 y 轴的线段，长度为原来的一平.（即简单地说，截取长度）

拓展与点悟

1. 以上画法可简记为："平行者仍平行，竖半横不变".

2. 画水平放置的平面图形的直观图，关键是确定直观图的顶点，而顶点应放在轴上或与轴平行的直线上.

3. 斜二测法从理论上建立了从实图到直观图的过渡方法，要合理选择 xOy 坐标系的坐标原点的位置，有利于作图.

4. 将直观图还原成原图形时，关键要作出与 $O'y'$与 $O'x'$平行的线段，即互相垂直的线段，作原图形时平行 $O'x'$的线段长度不变，而平行于 $O'y'$的线段要伸长为原来的 2 倍.

举一反三

【例 1】画等腰三角形 ABC 的直观图.

画法：(1) 如图 9-16，以 AB 为 x 轴，AB 中点 O 为坐标原点建立直角坐标系 xOy.

(2) 如图 9-17，画相应的坐标系 $x'O'y'$，并使$\angle x'O'y'=45°$.

(3) 以 O'为中点在 $x'O'y'$轴上取 $A'B'=AB$，在 $O'y'$轴上取 $O'C'=\frac{1}{2}OC$，连 $A'C'$、$B'C'$，则$\triangle A'B'C'$就是等腰三角形 ABC 的直观图.

【例 2】把图 9-18 水平放置的直观图 $P'Q'R'S'$还原为真实

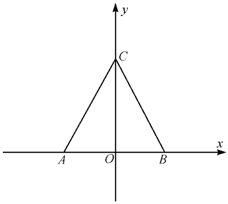


图 9-16

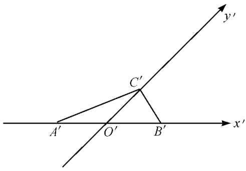


图 9-17

图形.

解：由斜二测画法知，由 $P'Q'/\!/O'x'$，$P'S'/\!/O'y'$，$R'S'/\!/O'x'$ 知 $PQ/\!/Ox$，$PS/\!/Oy$，$RS/\!/Ox$，且 $PS=2P'S'$，$PQ=P'Q'$，$RS=R'S'$.

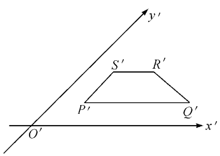


图 9-18

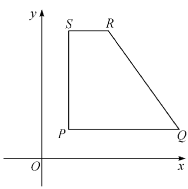


图 9-19

故真实图形是如图 9-19 所示.

小结：返还真实图形特别注意 $x=x'$，$y=2y'$.

【例 3】画边长为 1cm 的水平放置的正五边形的直观图(图 9-20).

画法：(1) 在已知正五边形 $ABCDE$ 中，取边 AB 所在直线为 x 轴，以线段 AB 的垂直平分线为 y 轴. 分别过点 C、E

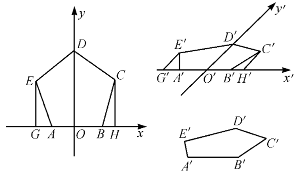


图 9-20

作 $CH/\!/Oy$、$EG/\!/Oy$，与 x 轴分别交于点 H、G. 再画对应的轴 $O'x'$、Oy'，使 $\angle x'O'y'=45°$.

(2) 以点 O' 为中点、在 x' 轴上分别取 $G'H'=GH$，$A'B'=AB$. 分别过 G'、H' 在 x' 轴的上方作 $G'E'/\!/O'y'$，$H'C'/\!/O'y'$，并使 $G'E'=\frac{1}{2}GE$，$H'C'=\frac{1}{2}HC$；在 y' 轴、x' 轴上方，取 $O'D'=\frac{1}{2}OD$.

(3) 连结 $B'C'$、$C'D'$、$D'E'$、$E'A'$，即得正五边形的直观图 $A'B'C'D'E'$.

【例 4】画底面边长为 2cm，高为 3cm 的长方体的直观图.

画法：(1) 作水平放置的正方形的直观图 $ABCD$(如图 9-21a)，使 $\angle BAD=45°$，$AB=2\text{cm}$，$AD=1\text{cm}$.

(2) 过 A 作 z' 轴使 $\angle BAz'=90°$，分别过点 A、B、C、D，沿 z' 轴的正方向取 $AA'=BB'=CC'=DD'=3\text{cm}$.

(3) 连结 $A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'A'$，得到的图形就是所求的长方体的直观图(如图 9-21b).

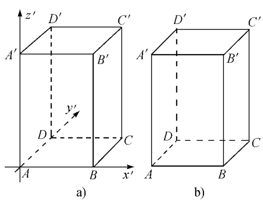


图 9-21

注：如果对作图要求不太严格，为了简便，长度和角度可以“适当地”选取，只要有一定的立体感就可以了.

课后练习

基础题

1．用斜二测法画水平放置的平面图形的直观，对其中三条线段结论错误的是　（　　）

（A）原相交的仍相交　　（B）原垂直的仍垂直

（C）原平行的仍平行　　（D）原共点的仍共点

答：B.

解析：由斜二测画法知，原垂直的画成 $45°$ 角或 $135°$ 角.

2．若一个长、宽、高分别为 2cm、1cm、4cm 的长方体，用斜二测法画成直观图以后，与该长方体的直观图相同的几何体的体积为　（　　）

（A）8cm^3　　（B）$4\sqrt{2}\text{cm}^3$

（C）$2\sqrt{2}\text{cm}^3$　　（D）4cm^3

答：C.

解析：与直观图相同的几何体体积为：

$$V=2\times\frac{1}{2}\sin45°\times4=2\sqrt{2}\text{cm}^2.$$

3．若一个三角形用斜二测法画出水平放置的直观图，其直观图的面积是原图形面积的　（　　）

（A）$\frac{1}{2}$倍　　（B）2 倍

（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$倍　　（D）$\sqrt{2}$倍

答：A.

解析：高度变为原来的一半.

4．已知 $\triangle ABC$ 的平面直观图 $\triangle A'B'C'$ 是边长为 a 的正三角形，那么原三角形 ABC 的面积为　（　　）

（A）$\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$　　（B）$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

（C）$\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$　　（D）$\sqrt{6}a^2$

答：D.

解析：取 $B'C'$ 为 x' 轴，过 $B'C'$ 中心 O' 与 $O'x'$ 成 $45°$ 的直线为 y' 轴，作 $A'N'\perp y'$ 轴，作 $A'M'\perp x'$ 轴，在 $\mathrm{Rt}\triangle A'O'M'$ 中．有 $M'O'=A'N'=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$A'M=\frac{\sqrt{6}}{2}a$，在直角坐标中，$\triangle ABC$ 底 $BC=a$，高为 $\frac{\sqrt{6}}{2}a$.

5．一个水平放置的平面图形的斜二测直观图是一个底角为 $45°$、腰和上底长均为 1 的等腰梯形，则这个平面图形的面积为　（　　）

（A）$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（B）$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

（C）$1+\sqrt{2}$　　（D）$2+\sqrt{2}$

答：D.

解析：在直观图 $ABCD$ 中，AB、CD 为下底和上底，过 C 作 $CE/\!/AD$，则 $CE=1$，$\angle CEB=\angle CBE=45°$．故 $EB=\sqrt{2}$，还原成平面图后为高为 2，上底为 1，下底为 $1+\sqrt{2}$ 的直角梯形．其面积为 $2+\sqrt{2}$.

6．已知图形中平行于 x 轴和 z 轴的线段，在直观图中保持长度________，平行于 y 轴的线段，长度为原来的________.

答：不变、一半.

7．如图 9-22 中，$\triangle A'B'C'$ 是某等边 $\triangle ABC$ 在直角坐标系 $x'O'y'$ 中水平放置的直观图．该图中 $B'O'=O'C'$，$\angle A'O'C'=45°$，$A'C'=\sqrt{6}-1$，则原图形中 $AB=$________　$S_{\triangle ABC}=$________.

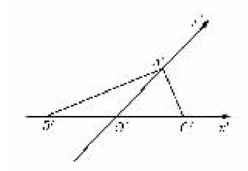


图 9-22

答：4，$4\sqrt{3}$.

解析：设原 $\triangle ABC$ 的边长为 $2a$，则 $O'C'=a$，$O'A'=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，在 $\triangle O'C'A'$ 中

由余弦定理可求得 $a=2$，则 $AB=4$，$\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=4\sqrt{3}$.

综合题

8．画水平放置的边长为 2cm 的正方形的直观图.

提示：根据斜二测画法画直观图.

9．画水平放置的边长为 4cm 的正三角形的直观图.

提示：根据斜二测画法画直观图.

10．画水平放置的等腰梯形的直观图，其上、下底长分别是 2cm、4cm，高为 3cm.

提示：根据斜二测画法画直观图.

11．画棱长是 2.4cm 的正方体的直观图.

提示：根据斜二测画法画直观图.

12．如图 9-23 是 $\triangle ABC$ 的水平放置的直观图，$\angle y'O'x'=45°$，请将直观图 $\triangle A'B'C'$ 还原成 $\triangle ABC$.

解：如图 9-23.

过 A' 作 $A'D'/\!/y'$ 轴，交 $C'B'$ 的延长线于 D'，作 $AD\perp DC$，取 $AD=2A'D'$，$DB=D'B'$，$DC=D'C'$，连 AB、AC 得 $\triangle ABC$.

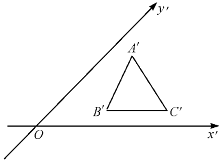


图 9-23

创新题

13. 如图 9-24 是四边形 $ABCD$ 的水平放置的直观图，试还原成四边形 $ABCD$. 其中 $\angle y'O'x'=135^\circ$，$A'B'=2$，$A'D'=\sqrt{2}$，试求四边形 $ABCD$ 的面积.

解：如图 9－24. 过 A' 作 $A'E'\,/\!/\,O'y'$. 交 $C'D'$ 的延长线于 F'，再另作 $AF\perp AB$，作 $FC\,/\!/\,AB$，取 $AF=2A'F'$，$AB=A'B'$，$FD=F'D'$，$FC=F'C'$. 连 AD，BC，得四边形 $ABCD$. 其面积为 8.

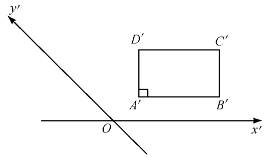


图 9-24

第 4 课时　9.2 空间平行直线

课堂札记

要点与焦点

平行线的性质（高考重点）→ 公理 4（空间平行线的传递性）—— 平行于同一直线的两条直线互相平行.

↓

平行线的性质 → 等角定理 —— 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等（如图 9-25）

平移 → 如果空间图形 F 的所有点都沿同一方向移动相同的距离到 F' 的位置，则说图形 F 在空间作了一次平移.

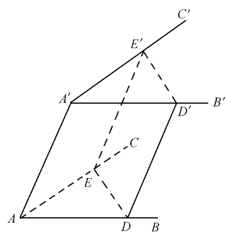


图 9-25

拓展与点悟

1. 等角定理的推论：如果两条相交直线和另外两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角（或直角）相等.

2. 公理 4 的推广：空间平行于一条已知直线的所有直线都互相平行.

3. 判断两条直线是平行直线的方法：寻找第三条直线，证明这条直线分别与前两条直线平行.

4. 如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行，有一组边方向相同，有一组边方向相反，那么这两个角互补.

5. 在平移变换下，角的大小不改变.

6. 公理 4 是论证平行问题的主要依据.

7. 寻找第三条平行线特别注意用中位线定理（特别是三角形的中位线）以及平行四边形的对边平行性质.

【例 1】已知：E、F 分别是正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的棱 AA'、CC' 上的点，若 E 从 A 点，F 从 C' 点同时出发运动，则四边形 $BED'F$ 是一个什么样的图形？

解：(1) 若 E 点与 F 点的运动速度相同，则有 $AE=C'F$.

如图 9-26 所示，在 DD' 上任取一点 G，使 $DG=AE$，

则 $DG \parallel AE$.

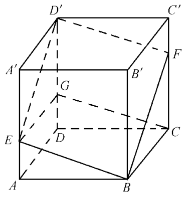


图 9-26

所以四边形 $AEGD$ 为▱.

∴ $EG \underline{\parallel} AD$.

又 $AD \underline{\parallel} BC$. 由公理 4 知 $EG \underline{\parallel} BC$.

故四边形 $BEGC$ 是▱.

∴ $BE \underline{\parallel} CG$.　又∵ $CF \underline{\parallel} GD'$.

故四边形 $CGD'F$ 是▱.

∴ $CG \underline{\parallel} FD'$，　∴ 由公理 4 知 $BE \underline{\parallel} FD'$.

∴ 四边形 $BED'F$ 是▱.

特别地当 E、F 刚处在 AA'、CC' 的中点时，四边形 $BED'F$ 是菱形.

∴ 若 E 点与 F 点的运动速度相同时，四边形 $BED'F$ 是平行四边形.

(2) 若 E 点与 F 点的运动速度不相同时，四边形 $BED'F$ 是一个空间四边形.

设 E 点速度大于 F 点的速度，则 $AE>C'F$.

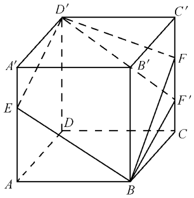


图 9-27

如图 9-27 所示.

我们若取 $C'F'=AE$，

则由(1)可知，

四边形 $BED'F'$ 为▱.

而 $F \notin$ 平面 $BED'F'$.

故四边形 $BED'F$ 为空间四边形.

小结：1. 两点运动，速度不一定相同，故要分类求解. 分类思想是中学数学中一个重要思想方法.

2. 证明线平行学会找平行四边形、矩形、菱形、正方形的对边.

【例 2】已知空间四边形 $ABCD$ 中，E、H 分别是 AB、AD 的中点.

(1) 如图 9-28 中，F、G 分别是 BC、CD 的中点，求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形；若四边形 $EFGH$ 是菱形，该命题将作如何论述？

(2) 若要使四边形 $EFGH$ 是梯形，F、G 的位置应满足何种条件？此时你还能知道 EF、GH、AC 有什么关系吗？

证明：如图 9-28 中，连 BD.

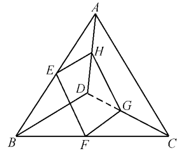


图 9-28

∵ EH 是△ABD 的中位线，

∴ $EH \underline{\parallel} \frac{1}{2}BD$.

同理，$FG \underline{\parallel} \frac{1}{2}BD$.

由公理 4，$EH \underline{\parallel} FG$，

∴ 四边形是平行四边形.

若四边形 $EFGH$ 是菱形，只需 $EH=EF$.

又 $EF \underline{\parallel} \frac{1}{2}AC$，　∴ 只需要 $AC=BD$.

因此在(1)的条件中再加上"$AC=BD$".

(2) 要使 $EFGH$ 是梯形，只要 $EH \neq FG$，且 FG 与 EH 平行，而 $EH \underline{\parallel} \frac{1}{2}BD$.

故 FG 必须与 BD 平行.

从而 F、G 只要满足：$\frac{CF}{FB}=\frac{CG}{GD}\neq 1$.

此时 EF、GH、AC 三直线共点.

设 $EF \cap GH=T$，而 $T \in$ 平面 ABC，$T \in$ 平面 ADC.

故 $T \in AC$.

∴ EF、GH、AC 三直线共点.

【例 3】如图 9-29 中，已知 AC 的长度不变，$D \in$ 面 ABC，△DAB 和△DBC 的重心分别为 M、N. 求证：无论 B、D 如何变换其位置，线段 MN 的长度也不变.

证明：取 AB、AC 的中点 E、F.

连 DE、DF，则 $M \in DE$，$N \in DF$.

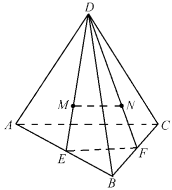


图 9-29

$MN \subset$ 平面 DEF 且 $MN=\frac{2}{3}EF$，

又 $EF=\frac{1}{2}AC$，　故　$MN=\frac{1}{3}AC$.

从而 MN 长度也不变.

课后练习

基础题

1. 在空间中，以下命题正确的个数是　　　　(　　)

(1) 若两条直线和第三条直线成等角，则这两条直线平行；

(2) 若两条直线都和第三条直线垂直，则这两条直线必平行；

(3) 若两条直线都和第三条直线平行，则这两条直线必平行；

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

答：B. 平行于同一直线的两直线平行.

2. 在空间四边形 $ABCD$ 中，S、T 分别为 AB、CD 的中点，则 ST 与 $BC+AD$ 的大小关系是　　　　(　　)

(A) $ST>\frac{1}{2}(BC+AD)$　(B) $ST=\frac{1}{2}(BC+AD)$

(C) $ST<\frac{1}{2}(BC+AD)$　(D) $ST\leqslant\frac{1}{2}(BC+AD)$

答：C. 取 BC 的中点 R，连 SR、TR，由三角形中位线定理知：

$$ST<SR+TR=\frac{1}{2}(BC+AD).$$

3. 空间四边形 $ABCD$ 中，E、H 分别是 AB、AD 的中点，F、G 分别是 CB、CD 上的点，且 $\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$，若 $BD=6\text{cm}$，梯形 $EFGH$ 的面积为 28cm^3，则平行线 EH、FG 间的距离为　　　　(　　)

(A) 4cm　　(B) 8cm　　(C) 10cm　　(D) 12cm

答：B. 由梯形的面积公式可计算.

4. 角 α 和角 β 的两边分别平行，若 $\alpha=44°$ 时，β 角的大小是________.

答：$44°$，$136°$.

解析：$\alpha=\beta$ 则 $\beta=44°$，若 $\alpha+\beta=180°$，则 $\beta=136°$.

5. 四条直线两两平行，任何三条直线不共面，则它们可以确定的平面有________个.

答：6.

解析：每两条可确定一个平面.

6. 若空间四边 $ABCD$ 中，E、H 分别是 AB、AD 的中点，F、G 分别是 CB、CD 的中点，若 AC 与 BD 是关于 x 的方程 $x^2-px+q=0$ 的两根. 则 $EG^2+FH^2=$________.

答：$\frac{1}{2}(p^2-2q)$.

解析：由三角形中位线定理可证 $EFGH$ 是平行四边行. 则由已知有 $AC+BD=p$. $AC\cdot BD=q$，$EG^2+FH^2=2(HG^2+EH^2)=\frac{1}{2}(AC^2+BD^2)$.

综合题

7. 如图 9-30，已知：正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $P\in$ 面 A_1C_1，$Q\in$ 平面 AC，现要把方块沿点 P、点 Q 锯开，要求过 P 点的锯痕与 BC 平行. 问怎样画线？锯开后得到的截面是什么图形？并证明之.

提示：过 P 作 $MN \parallel B_1C_1$ 交 A_1B_1 于 M、交 C_1D_1 于 N，过 Q 作 $ST \parallel BC$，交 AB 于 S，交 CD 于 T，连 MS、NT，截面是一个矩形. 证明略.

8. 在长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别为 CD、A_1B_1 的中点. 试比较 $\angle B_1C_1F$ 与 $\angle EAD$ 的大小. 并说明理由.

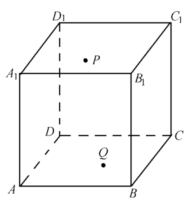


图 9-30

答：相等.

由等角定理可得.

9. 如图 9-31. 两个三角形 ABC 和 $\triangle A'B'C'$ 的对应顶点的

连线 AA'、BB'、CC' 交于一点 O，且 O 在线段 AA' 上，若 $OA:OA'=OB:OB'=OC:OC'$，

（1）求证：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

（2）要使 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle A'B'C'}=1:16$，试求 $OA:OA'$ 的值.

解：（1）由 $\dfrac{OA}{OA'}=\dfrac{OB}{OB'}$，

又 $\angle AOB=\angle A'O'B'$，

则 $\triangle AOB \backsim \triangle A'OB$，

$\therefore \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{OA}{OA'}$，

同理可证：

$\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{OB}{OB'}$，

$\dfrac{CA}{C'A'}=\dfrac{OC}{OC'}$，则 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}$，

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

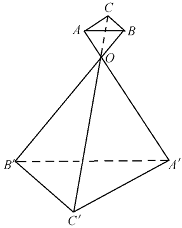


图 9-31

（2）易得：$\left(\dfrac{OA}{OA'}\right)^2=\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\dfrac{1}{16}$

$\therefore$ $\dfrac{OA}{OA'}=\dfrac{1}{4}$.

创 新 题

10．过空间一点 O 作不在同一平面内的三条直线，一共可成 6 个角，在这 6 个角的角平分线中，能否找出某三条是共面的，若能找到，请证明，若不能找到，请说明理由.

解：可找到 $\angle AOB$、$\angle BOC$ 的角平分线和 $\angle COA$ 的邻补角的平分线在同一平面内．在 OA、OB、OC 上分别取 $OD=OE=OF$，设 $\angle AOB$、$\angle BOC$ 的角平分线分别交 DE、EF 于 G、H，则 $GH // DF$．又设 OM 是 $\angle COA$ 的邻补角平分线，则 OM 也是 $\triangle ODF$ 的外角平分线，$\therefore OM // DF$，$\therefore GH // OM$．即 OG、OH、OM 在同一平面内.

第 5 课时 9.2 空间异面直线及其夹角（一）

课堂札记

要点与焦点

异面直线的定义	高考重点	指不同在任何一个平面内的两条直线．如图 9-32 中 AA' 与 BC.
异面直线的判定		连结平面内一点与平面外一点的直线，和这个平面内不经过此点的直线是异面直线．如图 9-33.

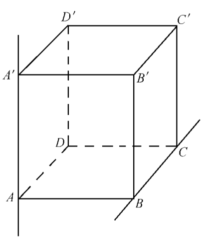


图 9-32

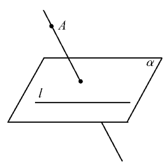


图 9-33