

第一章 非线性悬索结构

1.1 单索的一般方程

设有如图 1.1 所示的单索微段，微段水平长 dx 受荷载 $q(x)$ 作用。由静力平衡条件可以列出悬索的平衡方程：

由 $\sum x = 0$ 有

$$\frac{d}{dx}(N\cos\theta) = 0 \quad (1.1)$$

由 $\sum y = 0$ 有

$$\frac{d}{dx}(N\sin\theta)dx + q(x)dx = 0 \quad (1.2)$$

引入悬索的水平张力 H ，它与悬索的张力 N 之间有 $N\cos\theta = H$ 。由式 (1.1) 可知

$$N\cos\theta = H = \text{const (常数)}$$

将 $N = H/\cos\theta$ 代入式 (1.2) 中可得

$$H \frac{d}{dx}(\text{tg}\theta) = -q(x) \quad (1.3)$$

如果设索的竖向位移为 w 则 $\text{tg}\theta = \frac{dw}{dx}$ ，代入式 (1.3) 中，可得

$$H \frac{d^2w}{dx^2} = -q(x) \quad (1.4)$$

式 (1.4) 即为悬索的基本平衡方程式。

在式 (1.4) 中，悬索张力 N 的水平分量 H 尽管是常数，但目前是未知的；悬索竖向挠度 w 也是未知的，因此式 (1.4) 属超静定方程。当 H 可以确定时，式 (1.4) 就成为关于 w 的二阶常微分方程，结合边界条件可以确定出 w 的形式，并进而获得悬索的新的变形位置。因此有必要再研究悬索的变形及其协调方程。

悬索变形协调方程的物理意义是：在初始状态时，外荷载为 $q_0(x)$ ，索中张力的水平分量为 H_0 ，对应的索张力为 N_0 ，由垂直挠度 $w_0(x)$ 产生的索长为 S_0 ，而在荷载为 $q(x)$ 的某一瞬时，以上各量变成 H, N, S ，则索的增长为

$$\Delta S = S - S_0 \quad (1.5)$$

各 x 点处的索张力增加为

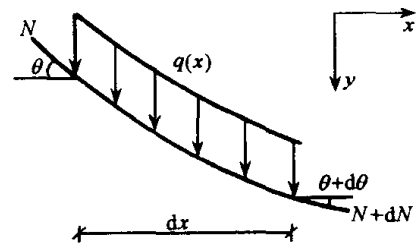


图 1.1 单索微段

$$\Delta N = N(x) - N_0(x) \quad (1.6)$$

从物理意义来看，索长度的增长 ΔS 是由于荷载增加导致索中各点张力 ΔN 增加，因而可以导出其间的关系式。设索在弹性变形阶段的弹性模量为 E 横截面为 A 则 $\Delta N(x)$ 产生的伸长为

$$d\Delta S = \frac{dS_0}{EA} \Delta N(x) = \frac{1}{EA} [N(x) - N_0(x)] dS_0 \quad (1.7)$$

则索的伸长与张力之间有关系式

$$\Delta S = \int d\Delta S = \frac{1}{EA} \int [N(x) - N_0(x)] dS_0 \quad (1.8)$$

式(1.8)即为索变形的协调方程。

与索的变形有关的是索的几何方程。索的挠度用 $w(x)$ 表示时 索长度 S 与 w 之间的关系式为

1) 悬索的两支点在相同高度上时，

$$dS = \sqrt{dx^2 + dw^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} dx \quad (1.9)$$

2) 悬索的两支点相差高度为 C 时，

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{C}{l}\right)^2} dx \quad (1.10)$$

式中 l 为悬索两端点之间的水平距离。

以上两式还有另外的表达方法，即将悬索看作两端铰支的简支梁，引入相应的梁的弯矩 M 及剪力 V 则由图 1.2 可知 x 段左隔离体在 $C=0$ 时，

$$M = R_A x + \left[- \int_0^x (x - \xi) q(\xi) d\xi \right] = H w(x) \quad (1.11)$$

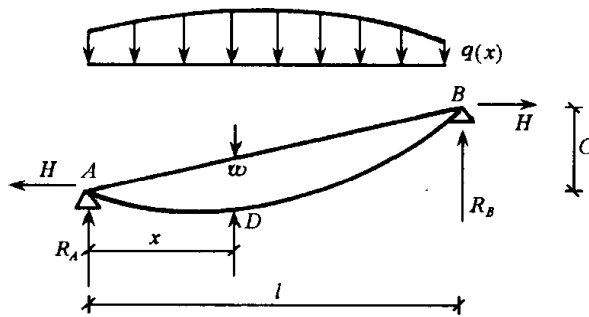


图 1.2 支点不同高的单索

式中 R_A 为 A 点支反力 类似地 B 点支反力为 R_B 。由式(1.11)可以得

$$w(x) = \frac{M(x)}{H} \quad (1.12)$$

即将悬索 AB 视为简支梁时弯矩 $M(x)$ 与挠度 $w(x)$ 成比例。

当 $C \neq 0$ 时 依据 $\sum M_A = 0$ 有

$$\int_0^l xq(x)dx + HC - R_B l = 0$$

求得

$$R_B = \frac{1}{l} \int_0^l xq(x)dx + \frac{HC}{l} \quad (1.13)$$

将悬索 AB 看作简支梁时 荷载 $q(x)$ 在支点产生的支反力用 R'_A, R'_B 表示 即有悬索支反力

$$\left. \begin{aligned} R_A &= R'_A - \frac{HC}{l} \\ R_B &= R'_B + \frac{HC}{l} \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} R'_A &= \frac{1}{l} \int_0^l q(x)(l-x)dx \\ R'_B &= \frac{1}{l} \int_0^l xq(x)dx \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

图 1.2 中 在 $C \neq 0$ 时依然截取 x 段左隔离体 取 $\sum M_D = 0$ 则有

$$R_A x - \int_0^x q(\xi)(x-\xi)d\xi + H \left[\frac{HC}{l} - w(x) \right] = 0 \quad (1.16)$$

通过运算 简化为

$$Hw(x) = R'_A x - \int_0^x q(\xi)(x-\xi)d\xi \quad (1.17)$$

如此求得 D 点的挠度为

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{M(x)}{H} \\ M(x) &= R'_A x - \int_0^x q(\xi)(x-\xi)d\xi \end{aligned} \quad (1.18)$$

按梁理论中剪力 $V(x)$ 与弯矩 $M(x)$ 之间关系

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$

可引入悬索变形协调方程的另一表达式, 即将梁理论中的剪力 V 代入式(1.9)和式(1.10)中, 分别得出索长公式:

1) 在悬索两支点有相同高度时,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2} dx \\ &= \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2} dx \end{aligned} \quad (1.19)$$

2) 在悬索两支点相差高度 C 时,

$$S = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{V}{H} + \frac{C}{l}\right)^2} dx \quad (1.20)$$

对于小挠度索，即悬索近于水平状，由于 $H = N \cos \theta$ 在 $\cos \theta \approx 1$ 时 则 N 与 H 近似 可认为 N 亦为常数。这时由于

$$\frac{dw}{dx} = \frac{V}{H} = 0$$

将式(1.19)被积函数展开，略去高阶导数项，得索长近似公式为

$$S \approx l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l V^2 dx \quad (1.21)$$

类似地 式(1.20)改为

$$S \approx \left(1 + \frac{C^2}{2l^2}\right)l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l V^2 dx \quad (1.22)$$

现考察竖向荷载 $q(x)$ 为常数时悬索的变形情况。在索两端高差为 C 时 将 w 改为 z 由式(1.4)有

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{q}{H}$$

积分两次后 得

$$z = -\frac{q}{2H}x^2 + C_1 x + C_2$$

显然这是抛物线表达式。积分常数由边界条件确定，即

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad z = 0 \\ x = l & \quad z = C \end{aligned}$$

从而解出

$$z = \frac{q}{2H}x(l-x) + \frac{C}{l}x$$

在此抛物线方程中，索张力的水平分量 H 是未知的，所以此方程代表一族抛物线。因为通过 A 、 B 两点可以有不同长度的索，它们在均布荷载作用下形成一族不同垂度的抛物线，具有不同 H 值。由补充条件确定出 H 值后 抛物线形状可以惟一确定。例如曲线在跨中垂度为 f 那么索内张力为

$$H = \frac{ql^2}{8f}$$

相应的挠度 z 为

$$z = \frac{4fx(l-x)}{l^2} + \frac{C}{l}x$$

按索长公式可以求出 S 为

$$S = l \left(1 + \frac{C^2}{2l^2} + \frac{8f^2}{3l^2}\right)$$

在两端支座等高时 S 为

$$S = l \left(1 + \frac{8f^2}{3l^2} \right)$$

在分析和求解悬索问题时，应将变形协调方程具体化，表达成悬索几何尺寸及内力的相关形式。由于悬索材料的延伸率不大，所以初始荷载下各变量下标加零表示 其中 S_0 及加载下的 S 亦相差不大 可表达成

$$N_0(x) = H_0 \sec \theta = H_0 \frac{dS_0}{dx}$$

$$N(x) = H \frac{dS}{dx} \approx H \frac{dS_0}{dx}$$

那么

$$\begin{aligned} \int_0^l [N(x) - N_0(x)] dS_0 &\approx \int_0^l (H - H_0) \frac{dS_0}{dx} dS_0 \\ &= \int_0^l (H - H_0) \left(\frac{dS_0}{dx} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (1.23)$$

根据 $\frac{dS_0}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{V_0}{H_0} + \frac{C_0}{l_0} \right)^2}$ ，式(1.8)可以改写为

$$S - S_0 = \frac{1}{EA} \int_0^l (H - H_0) \left[1 + \left(\frac{V_0}{H_0} + \frac{C_0}{l_0} \right)^2 \right] dx \quad (1.24)$$

小挠度情况下，可以进一步简化式(1.24)。因在小挠度时 $w(x) = \frac{M(x)}{H}$ ， $\frac{dw}{dx} = \frac{V}{H}$ 值都很小，实用中一般 $\frac{C}{l}$ 也很小，而且有近似式

$$\begin{aligned} N_0(x) &\approx H_0 & N(x) &\approx H \\ l_0 &\approx l & l_0 &\approx S_0 \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{1}{EA} \int [N(x) - N_0(x)] dS_0 &\approx \frac{1}{EA} (H - H_0) S_0 \\ &= \frac{H - H_0}{EA} l_0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

将关系式

$$\begin{aligned} S &\approx \left(1 + \frac{C^2}{2l^2} \right) l + \frac{1}{2H^2} \int_0^l V^2 dx \\ S_0 &\approx \left(1 + \frac{C_0^2}{2l_0^2} \right) l_0 + \frac{1}{2H_0^2} \int_0^{l_0} V_0^2 dx \end{aligned}$$

与式(1.25)结合，可以得出变形协调式为

$$\frac{C^2 - C_0^2}{2l_0} + \frac{1}{2H^2} \int_0^l V^2 dx - \frac{1}{2H_0^2} \int_0^{l_0} V_0^2 dx = \frac{H - H_0}{EA} l_0 \quad (1.26)$$

式(1.26)在积分之后 化为 H 的三次代数方程，一般用迭代法等数值方法求解 H 值。

悬索问题可归结为求式(1.4)的平衡方程与式(1.26)的变形协调方程。由于式(1.26)通常用数值方法求解，故悬索问题一般用迭代法等求解。这里以承受均布荷载的抛物线悬索为例，说明它的解法。

设在初始状态荷载 q_0 作用下，索中有水平张力 H_0 ，抛物线索跨中垂度 f_0 已确定，即有

$$f_0 = \frac{q_0 l^2}{8H_0}$$

在某一瞬时 q 荷载作用下，抛物线方程为

$$z = \frac{4fx(l-x)}{l^2} + \frac{C}{l}x$$

由剪力公式求出

$$V_0 = \frac{q_0}{2}(l-2x)$$

$$V = \frac{q}{2}(l-2x)$$

将以上两式代入式(1.26)可求出 C 值不变时的 H 为

$$H = H_0 + \frac{EA l^2}{24} \left(\frac{q^2}{H^2} - \frac{q_0^2}{H_0^2} \right)$$

用直接推导 H 的方法，也能获得上式。即在均布荷载下，初始状态和终态下索曲线长度分别为

$$S_0 = l \left(1 + \frac{C_0^2}{2l^2} + \frac{8f_0^2}{3l^2} \right)$$

$$S = l \left(1 + \frac{C^2}{2l^2} + \frac{8f^2}{3l^2} \right)$$

索之伸长量在 C 值不变时为

$$\Delta S = S - S_0 = \frac{8}{3} \times \frac{f^2 - f_0^2}{l^2}$$

于是索的变形协调方程为

$$\frac{H - H_0}{EA} l = \frac{8}{3} \times \frac{f^2 - f_0^2}{l}$$

而由梁的理论及平衡方程可得出

$$f = \frac{ql^2}{8H}$$

最后整理出

$$H - H_0 = \frac{EA l^2}{24} \left(\frac{q^2}{H^2} - \frac{q_0^2}{H_0^2} \right)$$

算例 1.1 两端等高承受均布荷载的抛物线索，截面积 $A = 67.4 \text{ mm}^2$ ， $E = 180 \text{ kN/mm}^2$ ， $l = l_0 = 8 \text{ m}$ ， $H_0 = 10 \text{ kN}$ ， $q_0 = 0.2 \text{ kN/m}$ ， $q = 0.5 \text{ kN/m}$ 。求初始状态时

最大垂度 f_0 以及最后状态时水平张力 H 最大垂度 f 。

解 根据荷载情况可知, 初始状态时,

$$M_0(x) = \frac{q_0 x}{2}(l-x) = 0.1x(8-x)$$

$$f_0 = \frac{M\left(\frac{l}{2}\right)}{H_0} = 0.16\text{m}$$

由 $M_0(x)$ 微分得

$$V_0(x) = 0.8 - 0.2x$$

$$\int_0^l V_0^2 dx = 1.707\text{kN}^2 \cdot \text{m}$$

在最后状态,

$$M(x) = \frac{qx}{2}(l-x) = 0.25x(l-x)$$

$$V(x) = 2 - 0.5x$$

$$\int_0^l V^2 dx = 10.667\text{kN}^2 \cdot \text{m}$$

将以上结果代入关于 H 的协调方程 得出 H 的三次代数方程为

$$H^3 + 2.94H^2 - 8088 = 0$$

可用迭代法解出索的水平张力 H 为

$$H = 19.14\text{kN}$$

而 f 为

$$f = \frac{M\left(\frac{l}{2}\right)}{H} = 0.209\text{m}$$

式 (1.26) 是求索中张力经常遇到的式子, 除了以上提到的迭代法外, 还可以用其他比较准确的数值方法求解。这里给出另一种近似解法。如果借用 D 和 D_0 分别表示为

$$D_0 = \int_0^{l_0} V_0^2 dx$$

$$D = \int_0^l V^2 dx$$

式 (1.26) 可改写为

$$\frac{C^2 - C_0^2}{2l_0} + \frac{D}{2H^2} - \frac{D_0}{2H_0^2} = \frac{H - H_0}{EA} l_0 \quad (1.27)$$

如果令 $H - H_0 = \Delta H$ 那么式 (1.27) 可进一步写为

$$\Delta H = \frac{EA(C^2 - C_0^2)}{2l_0^2} - \frac{D_0 EA}{2H_0^2 l_0} + \frac{DEA}{2(H_0 + \Delta H)^2 l_0}$$

在一般情况下, ΔH 与 H_0 相比是很小的, 因此上式右方可以略去 ΔH 而求出 ΔH

的一级近似式

$$\Delta H_1 = \frac{EA(C^2 - C_0^2)}{2l_0^2} - \frac{D_0EA}{2H_0^2l_0} + \frac{DEA}{2H_0^2l_0}$$

将这一级近似值代替式 (1.27) 中右方 $H - H_0$ 可以得出 ΔH 的二级近似值为

$$\Delta H_2 = \frac{EA(C^2 - C_0^2)}{2l_0^2} - \frac{D_0EA}{2H_0^2l_0} + \frac{DEA}{2(H_0 + \Delta H_1)^2l_0}$$

依次类推 可以求得 ΔH 至精确值。这种方法称为渐近法或逼近法。由精确值 ΔH 可以求出精确值 H 。

1.2 辐射式悬索结构

辐射式悬索结构是悬索结构中常用的形式，一般由外环、内环及辐射索系组成 如图 1.3 所示。本节讨论它在弹性范围内的内力及位移。

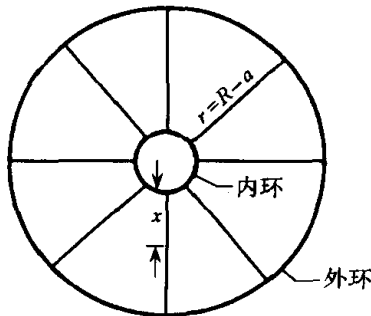


图 1.3 辐射式悬索结构

辐射式结构设计和计算中，每根悬索的两个支承点都是一个在外环上，一个在内环上。外环的支座是不能产生变位的，内环的支座则可能产生位移。一般情况下，加载后内环移到某一固定位置时，即可决定各索在内环的位置，从而可以决定所有索的内力。辐射式悬索结构的求解核心是内环的位移。

如果考虑内环重心 3 个线位移，即垂直位移 $\Delta(z)$ 、水平位移 $h(x)$ 和 $v(y)$ 同时有 3 个角位移 分别用 α_x 、 α_y 、 α_z 表示，则辐射式悬索的内环共有 6 个独立的位移。如果以上 6 个位移已知，则每索张力可以求得。当每索张力为已知时，即可求得各索对内环在 x 、 y 和 z 轴的分力以及对内环 3 个轴的力矩。

这时可以列出求解 6 个位移的静力平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i &= 0 & \sum M_{xi} &= 0 \\ \sum Y_i &= 0 & \sum M_{yi} &= 0 \\ \sum Z_i &= 0 & \sum M_{zi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

式中 X_i 、 Y_i 、 Z_i 、 M_{xi} 、 M_{yi} 、 M_{zi} 都可表为 Δ 、 h 、 v 、 α_x 、 α_y 、 α_z 的函数。

一般地， α_z 是高阶小量，对索中张力影响可以略去，位移能减少到 5 个。

当结构具有一个对称轴 例如 y 轴时 内环仅有 3 个位移 Δ 、 h 、 α_y 。式(1.28) 改为

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i &= 0 \\ \sum Z_i &= 0 \\ \sum M_{yi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

在辐射式悬索结构中，最常见的是结构与荷载都关于 z 轴为轴对称的情形 即关于垂直位移的几何中心轴为轴对称的情形，下面着重对此进行分析。

设内环圆半径为 a 外环圆半径为 R 每索平面长度为 r 并有 $r=R-a$ 。考虑到轴对称情况，每根索的应力和变形都是相同的，故计算时只须考虑一根索就可以了。如果内外环高差在加载前为 C 加载后外环固定 内环下移为 Δ 则新的内外环高差为 $C_1=\Delta+C$ 。

设每根索的截面积为 A 分配于每索内环重度为 g 索上承受 $q_0(x,\theta)$ 的面荷载 如果共有 n 根索作为承力构件，那么每根索单位长度承受的面荷载 $q(x)$ 为

$$q(x) = \frac{2\pi(x+a)}{n} q_0(x,\theta) \quad (1.30)$$

沿每索 dx 段上的荷载为 dq 并有

$$dq = q(x)dx = \frac{2\pi(x+a)}{n} q_0(x,\theta)dx \quad (1.31)$$

如将索看作简支梁，可以求得 x 处剪力为

$$V(x) = \frac{1}{r} \int_0^r (r-x)q(x)dx - \int_0^x q(x)dx \quad (1.32)$$

设初始状态外部荷载为零，即 $q_0(x)=0$ ，按简支梁分析索的支反力为零。由式 (1.14) 可求出悬索在内环支点的反力为

$$R = -\frac{H_0 C}{r} \quad (1.33)$$

式中 H_0 为初始状态每根索的水平张力。根据悬索在内环竖向合力的平衡条件可得

$$\left. \begin{aligned} -\frac{H_0 C}{r} + g &= 0 \\ C &= \frac{gr}{H_0} \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

即当 H_0 为已知时 内环的位置 C 可从上述式得出，这时悬索呈直线形状。

当加荷 $q(x)$ 之后，内环下移至 C_1 索的张力增加到 H 即 $H=H_0+\Delta H$ 代入式 (1.27) 变形协调方程得

$$H = H_0 + \Delta H = H_0 + \frac{EA(C_1^2 - C_0^2)}{2r^2} + \frac{EA}{2H^2 r} \int_0^r V^2 dx \quad (1.35)$$

悬索在内环支座的反力为

$$R = \frac{1}{r} \int_0^r (r-x)q(x)dx - \frac{HC_1}{r} \quad (1.36)$$

再由内环竖向平衡条件得

$$R + g = \frac{1}{r} \int_0^r (r-x)q(x)dx + g - \frac{HC_1}{r} = 0 \quad (1.37)$$

由式 (1.35) 与式 (1.37) 可求两个未知数 H 和 C_1 。

辐射式悬索结构的另一种形式是内环固定，外环可以自由位移，称为伞状悬索结构。它同样有结构和荷载的轴对称性，即仅考虑一根悬索。设初始状态时每根索水平张力为 H_0 。外、内环高差为 C ， g 为外环分配给每一根索的重度，悬索在外环的反力为 $\frac{H_0 C}{r}$ ，由此推出

$$C = \frac{gr}{H_0}$$

在受荷 $q(x)$ 状态时 外环位置下移到 C_1 索张力 H 表示为

$$H = H_0 + \frac{EA(C_1^2 - C^2)}{2r^2} + \frac{EA}{2H^2 r} \int_0^r V^2 dx \quad (1.38)$$

悬索在外环支座的反力为

$$R = \frac{1}{r} \int_0^r xq(x)dx - \frac{HC_1}{r} \quad (1.39)$$

竖向平衡方程则为

$$\frac{1}{r} \int_0^r xq(x)dx + g - \frac{HC_1}{r} = 0 \quad (1.40)$$

由式(1.38)和式(1.40)可求出 H 和 C_1 值。以上各式中 x 是由内环量起的变量。

算例 1.2 有一单层悬索结构，内环半径 $a=5\text{m}$ 外环半径 $R=25\text{m}$ 整个结构由 180 根索组成 每索由 6 股 $\phi 12(7\phi 4)$ 钢绞线组成，每索面积为 5.28cm^2 。初始状态时，每索承受水平张力 $H_0=180\text{kN}$ 内环重 60kN 索结构受面荷载 $q_0=1\text{kN/m}^2$ ，索的弹性模量 $E=180\text{kN/mm}^2$ 。求加载后的水平张力 H 和内环的垂直位移 C_1 。

解 首先求初始状态时的 C 由于

$$g = \frac{60}{180} = 0.33\text{kN}$$

$$r = R - a = 20\text{m}$$

$$H_0 = 180\text{kN}$$

可以求出

$$C = \frac{gr}{H_0} = 0.037\text{m}$$

在最后状态时，

$$EA = 9.504 \times 10^4\text{kN}$$

承受 $q_0=1\text{kN/m}^2$ 荷载，由前述公式(1.30)得

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{2\pi(x+a)}{n} q_0 \\ &= 0.1745 + 0.0349x \end{aligned}$$

积分式可求出

$$\frac{1}{r} \int_0^r (r-x)q(x)dx = 4.073\text{kN}$$

代入剪力公式得

$$V(x) = 4.073 - 0.1745x - 0.01745x$$

$$\int_0^r V^2 dx = 188.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

将已知各量代入式 (1.35) 得

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \frac{EA(C_1^2 - C_0^2)}{2r^2} + \frac{EA}{2H^2 r} \int_0^r V^2(x) dx \\ &= 179.84 + 118.8C_1^2 + \frac{447876}{H^2} \end{aligned}$$

再由式 (1.37) 求得

$$HC_1 = 88.12$$

联立求解以上两式，可以求出 C_1 和 H 值。利用迭代逼近方法，先假定 $H = H_0 = 180 \text{ kN}$ 求得 C_1 的一级近似值为

$$C_1 = \frac{88.12}{180} = 0.49 \text{ m}$$

则可求出 H 的一级近似值为

$$H = 222.18 \text{ kN}$$

依次代入新的 H 再求 C_1 各级近似值为

$$\text{二级近似 } C_1 = 0.40 \text{ m} \quad H = 207.92 \text{ kN}$$

$$\text{三级近似 } C_1 = 0.42 \text{ m} \quad H = 211.15 \text{ kN}$$

$$\text{四级近似 } C_1 = 0.417 \text{ m} \quad H = 210.54 \text{ kN}$$

收敛值为 $H = 210.69 \text{ kN}$ 。在不计荷载系数时，由 $\sigma = \frac{H}{A} = 396.4 \text{ N/mm}^2$ 可选用冷拉 III 级钢 $f_{py} = 420 \text{ N/mm}^2 > 396.4 \text{ N/mm}^2$ 。

另一种悬索结构形式为双层辐射式结构，如图 1.4 所示。这种悬索结构由内、外环及内、外环联系的上、下两层辐射式悬索组成。它受载后竖向位移小，有很好的稳定性和刚度。上层索为承重索，下层索为稳定索。这里仅限于研究轴对称双层悬索结构。

设结构中外环半径为 R 内环半径为 a 索长为 $r = R - a$ 。整个层面有 n_1 根上

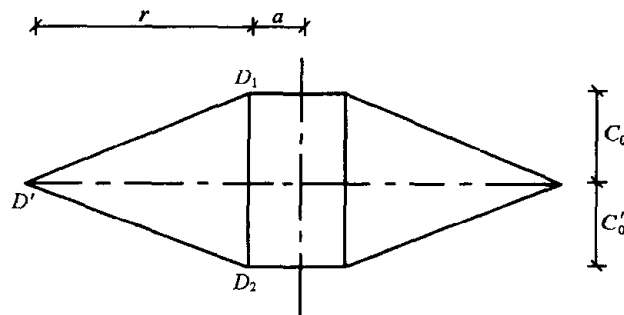


图 1.4 双层辐射式悬索

索 n_2 根下索，每上索面积为 A_1 每下索面积为 A_2 ；另设内环上索支座高度与外环高度差为 C_0 。内环下索与外环高差为 C'_0 ，按轴对称考虑。内外环面积之间有

$$A_2 = \frac{n_2}{n_1} A_1 \quad (1.41)$$

在初始状态时，上索承受的水平张力为 H_0 而下索承受的水平张力为 H'_0 。

按前所述，上索内环的垂直反力为 $\frac{H_0 C_0}{r}$ ，下索内环的垂直反力为 $-\frac{H'_0 C'_0}{r}$ 。

设相应于一根上索及其相应部分下索的部分内环重为 g (包括一半相应上、下索重) 根据平衡条件得

$$\frac{H_0 C_0}{r} - \frac{H'_0 C'_0}{r} + g = 0 \quad (1.42)$$

在单位面积荷载 $q_0(x)$ 作用下 每根上索单位水平长度的荷载 $q(x)$ 为

$$q(x) = \frac{2\pi}{n_1} (x + a) q_0(x) \quad (1.43)$$

将上索看作支承在 D_1 和 D' 的简支梁 则上索在 D_1 支座的反力为

$$\begin{aligned} R'_{D_1} &= \frac{1}{r} \int_0^r (r - x) q(x) dx \\ &= \frac{2\pi}{n_1 r} \int_0^r (r - x)(x + a) q_0(x) dx \end{aligned}$$

在上索 x 处的剪力为

$$\begin{aligned} V(x) &= R'_{D_1} - \int_0^x q(x) dx \\ &= \frac{2\pi}{n_1 r} \int_0^r (r - x)(x + a) q_0(x) dx \\ &\quad - \frac{2\pi}{n_1} \int_0^x (x + a) q_0(x) dx \end{aligned} \quad (1.44)$$

如果 $q_0(x)$ 为一常数 q_0 则有

$$\begin{aligned} R'_{D_1} &= \frac{2\pi q_0}{n_1} \left(\frac{ar}{2} + \frac{r^2}{6} \right) \\ V(x) &= \frac{\pi q_0}{n_1} \left(ar + \frac{r^2}{3} - 2ax - x^2 \right) \end{aligned}$$

如果内环的垂直变位为 Δ 则变形协调方程对上索有

$$H = H_0 + \Delta H = H_0 + \frac{EA_1 [(C_0 - \Delta)^2 - C_0^2]}{2r^2} + \frac{EA_1}{2H^2 r} \int_0^r V^2 dx \quad (1.45)$$

按式 (1.44) 得上索在内环支座 D_1 处的垂直反力为

$$R_{D_1} = R'_{D_1} + \frac{H(C_0 - \Delta)}{r} \quad (1.46)$$

下索是不直接承受竖向荷载的，所以在初始状态或加载以后，下索总是呈直线形状。前已假定在初始状态时，下索的内环支点 D_2 与外环支座高差为 C'_0 ，索的水

平张力为 H'_0 。当加载后，内环向下的竖向位移为 Δ 这时内环支座与外环支座高差改为

$$C_1 = C'_0 + \Delta$$

下索的水平张力 H' 为

$$\begin{aligned} H' &= H'_0 + \Delta H' = H'_0 + \frac{EA_2[(C'_0 + \Delta)^2 - C_0'^2]}{2r^2} \\ &= \frac{EA_2[2C'_0\Delta + \Delta^2]}{2r^2} \end{aligned} \quad (1.47)$$

代入式 (1.14) 后得下索内环上竖向反力为

$$\begin{aligned} R_{D_2} &= -\frac{H'C_1}{r} = -\frac{EA_2}{2r^3}\Delta^3 - \frac{3EA_2C'_0}{2r^3}\Delta^2 \\ &\quad - \left(\frac{EA_2C_0'^2}{r^3} + \frac{H'_0}{r} \right) \Delta - \frac{H'_0C'_0}{r} \end{aligned} \quad (1.48)$$

由内环的平衡条件

$$R_{D_1} + R_{D_2} + g = 0$$

求得平衡方程为

$$\begin{aligned} \Delta^3 + 3C'_0\Delta^2 + \left(2C_0'^2 + \frac{2r^2H'_0}{EA_2} + \frac{2r^2H}{EA_2} \right) \Delta \\ - \frac{2r^3}{EA_2} \left[\frac{1}{r} \int_0^r (r-x)q(x)dx + g + \frac{HC_0}{r} - \frac{H'_0C'_0}{r} \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.49)$$

联立式 (1.45) 和 (1.49) 可以求出两个未知数 H 和 Δ 之值。

双层辐射式悬索结构的算例可参阅 1.4 节 那里给出了硬化材料的算例 如果令 $E = E_1$ ，即是弹性结果。

1.3 非线性悬索结构的方程

悬索无论是用较大延性的软钢经冷拉处理，还是用强度较高的钢绞线等材料制作，材料的单向拉伸曲线都表现出明显的弹塑性，应力-应变曲线是非线性的。

在弹塑性理论中，材料的 σ - ϵ 拉伸曲线全过程可以简化描述成图 1.5 中的两种曲线。对于有明显强化效应的材料，如图中 所示，其物理关系式为

$$\sigma = \begin{cases} E\epsilon & (\epsilon \leq \epsilon_s) \\ \sigma_s + E_1(\epsilon - \epsilon_s) & (\epsilon > \epsilon_s) \end{cases} \quad (1.50)$$

另一种是有较高强度的材料，它的 σ - ϵ 拉伸曲线，没有明显的屈服台阶，如图 1.5 中 所示 其物理关系式为

$$\sigma = A\epsilon^n \quad (1.51)$$

式中 A 是常数 n 取 0~1.0 之间的某值。

前一种拉伸曲线称为线性强化曲线，它表明材料在初始变形时处于弹性阶段，

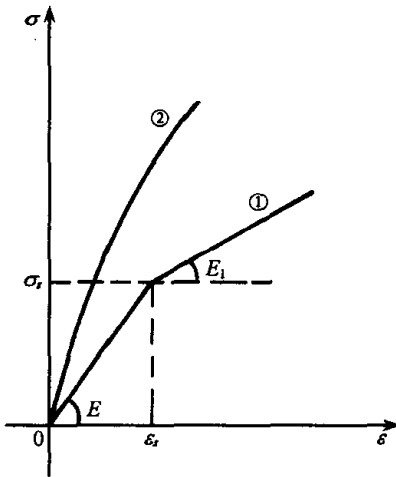


图 1.5 非线性 σ - ϵ 图

应力与应变呈简单的正比关系；但在应力 σ 超过某一定值 σ_s 后材料仍然可以继续加载。这时从定值 σ_s 开始，应力与应变有一新的比例关系。后一种拉伸曲线称为幂强化曲线，它在材料初始变形时也表现有一定的弹性，但随之进入了非线性的应力与应变关系，由于它可用指数函数形式表达 σ - ϵ 关系，不同的材料通过改变指数 n 的大小逼近它的拉伸变化趋势，因此是广泛应用的一种表达式。

显然，两种曲线都表明，仅限于研究材料的弹性变形是有局限的。利用材料弹性变形后的强化特性，将会提高结构的承载力，有利于合理利用材料，有明显的经济效益。特别对那些冷拉时效后钢材有明显的强化效应，或高强钢绞线等不表现明显弹塑性的悬索材料，结构塑性设计会更为合理。

图 1.5 的单向拉伸非线性物理曲线可以推广到更普遍的二维或三维受力情况。这时引入应力强度 σ_i 和应变强度 ϵ_i 分别表示为

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (1.52)$$

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (1.53)$$

苏联学者伊留申曾做过证明，即在简单加载条件下，某一瞬时的应变强度与应力强度之间存在函数关系，即 $\sigma_i = \phi(\epsilon_i)$ ，而这一公式的具体表达将按单一曲线假设由材料单向受力状态的特征给出。即图 1.5 中的曲线既是单向拉伸 σ - ϵ 图，又是复杂状态下该材料的 σ_i - ϵ_i 图，其中的 σ_s 、 ϵ_s 对某种材料来说则为一确定的常数。

在复杂应力状态下， σ_s 为屈服曲面。在 $\sigma_i < \sigma_s$ 时，材料处于弹性变形状态，其应力与应变满足广义胡克定律；而在 $\sigma_i > \sigma_s$ 时，可认为材料处于强化状态，这时应力、应变间满足本构方程，与广义胡克定律不同。

如果用增量理论描述的话，则有本构方程

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} + \frac{3\epsilon_i^p}{2\sigma_i} \dot{s}_{ij} \quad (1.54)$$

如果用全量理论描述的话，则有本构方程

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} s_{ij} + \frac{3\epsilon_i}{2\sigma_i} s_{ij} \quad (1.55)$$

式中 s_{ij} 、 e_{ij} 分别为应力和应变偏量，即

$$\left. \begin{aligned} s_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \\ e_{ij} &= \epsilon_{ij} - \epsilon_m \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ \epsilon_m &= \frac{1}{3}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

由此可知，材料的应力强度达到和超过 σ_s 时，材料表现较复杂的物理关系，其应力与变形的求解比弹性变形时难得多。但对于悬索结构要相对简单一些，因为悬索结构是单向受力状态的结构。

如果悬索是线性强化材料，并且应用了它的线性强化性能，则悬索的受力和变形将分成两个部分，即在悬索中 $\sigma < \sigma_s$ 时，悬索处于弹性状态，它的方程为

平衡方程：

$$H \frac{d^2 w}{dx^2} = -q(x)$$

变形协调方程：

$$\frac{C^2 - C_0^2}{2l_0} + \frac{1}{2H^2} \int_0^l V^2 dx - \frac{1}{2H^2} \int_0^{l_0} V_0^2 dx = \frac{H - H_0}{EA} l_0$$

以上各式中的变量及含义均同 1.1 节中所述。

当材料中的 $\sigma > \sigma_s$ ，即应变 $\epsilon > \epsilon_s$ 时，材料表现为强化特性，它的方程为

平衡方程：

$$H \frac{d^2 w}{dx^2} = -q(x)$$

这与弹性状态下的平衡方程相同，但变形协调方程则不同。

按单索变形， ΔS 定义为

$$\Delta S = \int d\Delta S = \frac{1}{E_1 A} \int [N(x) - N_0(x)] dS - \frac{\sigma_s}{E_1} l_0 + \epsilon_s l_0 \quad (1.58)$$

式中 $N(x)$ 为索中 x 点处的张力，并有

$$\int [N(x) - N_0(x)] dS = \int_0^l (H - H_0) \left[1 + \left(\frac{V}{H} + \frac{C}{l} \right)^2 \right] dx$$

按悬索理论中常用的近似关系， $N_0(x) \approx H_0$ ， $N(x) \approx H$ ， $l \approx l_0$ ， $S \approx l_0$ ，则有变形协调方程

$$\begin{aligned} & \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{V}{H} + \frac{C}{l} \right)^2} dx - \int_0^{l_0} \sqrt{1 + \left(\frac{V_0}{H_0} + \frac{C_0}{l_0} \right)^2} dx \\ &= \frac{1}{E_1 A} \int_0^{l_0} (H - H_0) \left[1 + \left(\frac{V_0}{H_0} + \frac{C_0}{l_0} \right)^2 \right] dx \end{aligned}$$

经整理得出，新的变形协调方程是关于 H 的三次方程，为

$$\frac{C^2 - C_0^2}{2l_0} + \frac{1}{2H^2} \int_0^l V^2 dx - \frac{1}{2H^2} \int_0^{l_0} V_0^2 dx + \frac{\sigma_s}{E_1} = \frac{H - H_0}{E_1 A} l_0 + \epsilon_s l_0 \quad (1.59)$$

综合平衡方程及新的变形协调方程式 (1.59)，才能求出悬索强化变形的张力。

根据式(1.59), 可以进一步写出关于 H 的三次代数方程的显示。如令 $\int_0^{l_0} V_0^2 dx = D_0$, $\int_0^l V^2 dx = D$, 则有

$$H^3 + \left[\frac{D_0 E_1 A}{2H_0^2 l_0} - \frac{(C^2 - C_0^2) E_1 A}{2l_0^2} - H_0 + \epsilon_s E_1 A - \sigma_s A \right] H^2 - \frac{D E_1 A}{2l_0} = 0 \quad (1.60)$$

一般在基准态时 $D_0=0$ 并由 $H-H_0=\Delta H$, 式(1.60)还可导出关于 ΔH 的表达式

$$\Delta H = \frac{E_1 A (C^2 - C_0^2)}{2l_0^2} + \frac{D E_1 A}{2(H + \Delta H)^2 l_0} - \epsilon_s E_1 A + \sigma_s A \quad (1.61)$$

应用式(1.61)能方便地用迭代方法计算 H 值。

1.4 辐射式双层悬索结构的塑性计算¹⁾

这里以图 1.4 所示的双层悬索结构为例, 讨论荷载加大到索材料表现线性塑性强化阶段时的内力和位移。

由于结构是轴对称的, 索的截面积相同, 因而结构处于强化状态时各索的表现一致。同样可以以一根索的方程描述之。

在荷载作用不大, 即表现为弹性变形时, 该结构的内力及位移的求解方程在 1.2 节中已有介绍, 下面讨论它的强化变形阶段。

此阶段的上索面积为 A_1 变形后内环位移 $C=C_0-\Delta$ 代入变形协调方程式(1.61) 求出强化阶段 H 为

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \Delta H \\ &= H_0 + \frac{E_1 A_1 [(C_0 - \Delta)^2 - C_0^2]}{2r^2} \\ &\quad + \frac{D E_1 A_1}{2(H + \Delta H)^2 r} - \epsilon_s E_1 A_1 + \sigma_s A_1 \end{aligned} \quad (1.62)$$

式中的 D 如同 1.3 节中所述。

设下索面积为 A_2 代入变形协调方程式(1.61) 求出强化阶段 H' 为

$$\begin{aligned} H' &= H'_0 + \Delta H' \\ &= H'_0 + \frac{E_1 A_2 [(C'_0 + \Delta)^2 - C'_0{}^2]}{2r^2} - \epsilon_s E_1 A_2 + \sigma_s A_2 \end{aligned}$$

式(1.63)反映了下索是非承重索即 $D=0$ 的结果。

类似于弹性状态下双层悬索结构的分析, 分别写出上、下索内环处的垂直反

1) 贾乃文 刘逸平. 线性强化材料双层悬索结构计算. 特种结构, 1996年4期

力为

$$R_{D_1} = R'_{D_1} + \frac{H(C_0 - \Delta)}{r}$$

$$R_{D_2} = -\frac{H'C_1}{r}$$

令 g 表示一根上索及相应下索部分的内环重, 根据平衡条件, 有

$$R_{D_1} + R_{D_2} + g = 0 \quad (1.64)$$

代入相关数值 式(1.64) 可写为

$$-\frac{E_1 A_2}{2r^3} \Delta^3 - \frac{3E_1 C'_0 A_2}{2r^3} \Delta^2$$

$$- \left(\frac{E_1 A_2 C_0^2}{r^3} + \frac{H'_0}{r} - \frac{\epsilon_s E_1 A_2}{r} + \frac{\sigma_s A_2}{r} + \frac{H}{r} \right) \Delta$$

$$+ \left(R'_{D_1} + g + \frac{H C_0}{r} - \frac{H'_0 C'_0}{r} + \frac{\epsilon_s E_1 C'_0 A_2}{r} - \frac{\sigma_s A_2 C'_0}{r} \right) = 0 \quad (1.65)$$

式中 R'_{D_1} 为上索为简支梁时的内支座支反力, 其值为

$$R'_{D_1} = \frac{1}{r} \int_0^r (r-x)q(x)dx$$

与弹性阶段双层悬索结构对应方程式(1.49) 相比, 式(1.65) 增加了强化特征表述的 σ_s, ϵ_s 等项。可以将式(1.65)进一步整理成由 Δ 表述的多项式 即

$$\Delta^3 + 3C'_0 \Delta^2 + \left(2C_0^2 + \frac{2r^2 H'_0}{E_1 A_2} - 2\epsilon_s r^2 + \frac{2\sigma_s r^2}{E_1} + \frac{2Hr^2}{E_1 A_2} \right) \Delta$$

$$- \frac{2r^3}{E_1 A_2} \left(R'_{D_1} + g + \frac{C_0 H}{r} - \frac{H'_0 C'_0}{r} \right)$$

$$- 2\epsilon_s C'_0 r^2 + \frac{2r^2 C'_0}{E_1} \sigma_s = 0 \quad (1.66)$$

式(1.62)与式(1.66) 即是求解线性强化阶段双层辐射式悬索结构的基本方程, 从中可以解出 H 即索的水平张力以及 Δ 即内环位移。如令式(1.66)中 $\sigma_s = \epsilon_s = 0$ 并有 $E_1 = E$, 则公式转化为弹性阶段双层悬索结构的公式, 同 1.2 节中的表达相同。这里给出的仍然是外环固定、内环产生位移情况下的双层悬索公式。

算例 1.3 设一双层圆形辐射式悬索结构, 内环半径 $a=1.8\text{m}$ 外环半径 $R=8\text{m}$ 。上、下层各 90 根索, 每索截面积为 64.5mm^2 设内环重 12kN 。初始状态时, $C_0=0.7\text{m}, C'_0=0.9\text{m}$ 如取 $E=17 \times 10^4 \text{N/mm}^2, H_0=25\text{kN}, E_1=1 \times 10^5 \text{N/mm}$ 材料 $\sigma_s=1800\text{N/mm}^2$ 计算强化阶段上、下索的张力 H, H' 和内环竖向位移 Δ (几何尺寸同图 1.4)。

解 由弹性极限应力-应变关系

$$\sigma_s = E\epsilon_s$$

可求得屈服极限时 $\epsilon_s=0.0106$ 。上索的伸长为