

基础教育测评模型构建与应用丛书

©丛书主编 宋乃庆

小学低段 数学符号意识

测评模型构建与应用研究

李艳琴 宋乃庆◎著

基础教育测评模型构建与应用丛书

◎丛书主编 宋乃庆

小学低段 数学符号意识

测评模型构建与应用研究

李艳琴 宋乃庆◎著

图书在版编目(CIP)数据

小学低段数学符号意识测评模型构建与应用研究 /
李艳琴, 宋乃庆著. —重庆: 西南大学出版社, 2024.4
ISBN 978-7-5697-1664-1

I. ①小… II. ①李… ②宋… III. ①小学数学课—
教学研究 IV. ①G623.502

中国版本图书馆CIP数据核字(2022)第239992号

重庆市“十四五”重点出版物出版项目

教育部“双万计划”国家级一流本科专业“数学与应用数学”建设项目
国家级一流本科课程《中小学数学课程标准解读与教材分析》建设项目

小学低段数学符号意识测评模型构建与应用研究

XIAOXUE DIDUAN SHUXUE FUHAO YISHI CEPING MOXING GOUJIAN YU YINGYONG YANJIU

李艳琴 宋乃庆 著

策划编辑 王宁 周万华

责任编辑 刘欣鑫

责任校对 陈欣

特约校对 朱司琪

装帧设计 汤立

排版 张祥

出版发行 西南大学出版社

地址 重庆市北碚区天生路2号

邮编 400715

印刷 印通天下网络科技有限公司

幅面尺寸 185 mm × 260 mm

印张 14

字数 296千字

版次 2024年4月第1版

印次 2024年4月第1次印刷

书号 ISBN 978-7-5697-1664-1

定价 70.00元



李艳琴，中共党员，理学博士，教授，硕士研究生导师，西南大学博士后。贵州师范学院数学与大数据学院院长，兼任贵州省数学学会常务理事、贵州省高校学科竞赛委员会委员、贵州省基础教育质量监测评估专家库成员。长期从事基础教育改革创新、教育统计、基础教育测评等领域研究工作。主持和参与国家级、省部级、市厅级项目多项。获贵州省高等教育教学成果特等奖1项、三等奖1项，获贵州省基础教育教学成果二、三等奖3项，获第一届全国教育实证研究“优秀学位论文奖”。在《课程·教材·教法》《教育学报》《数学教育学报》《数学通报》等刊物发表学术论文20余篇。



宋乃庆，西南大学二级教授、博士生导师，国家级教学名师，当代教育名家，国家瞭望智库首批入驻专家，首届全国教材建设先进个人。教育部西南基础教育课程研究中心主任，西南大学基础教育研究中心主任，中国基础教育质量监测协同创新中心首席专家，中国基础教育质量监测协同创新中心西南大学分中心主任。教育部基础教育课程教材专家工作委员会原副主任、中国教育学会原副会长、原全国数学教育学会副理事长，西南大学原常务副校长，原西南师范大学校长，1993年获国务院政府特殊津贴。

主持国家、省（部）级课题24项；主编（副主编）中小学数学教材8套（其中4套教材通过国家审定），主编学术论著、高校教材10部（其中3部为国家高校规划教材）；在《中国社会科学》《教育研究》《教育学报》《中国教育学刊》《课程·教材·教法》《数学教育学报》等核心期刊发表论文240余篇；主持获中国高校人文社科一、二、三等奖，全国教育科学研究优秀成果一等奖；重庆市科技进步二等奖，重庆市人文社科一等奖、三等奖等国家省（部）级奖励23项。获第六届高等教育国家级教学成果奖一等奖，2009年被评为国家教学名师，受到时任总书记胡锦涛、国务院总理温家宝接见。

2011年曾组织西南大学数学与统计学院领衔主持获我国首届统计学一级学科博士点。

符号的巧妙和符号的艺术,是人们绝妙的助手,因为它们使思考工作得到节约。在这里它以惊人的形式节省了思维。

——莱布尼茨^①

数学符号的语言更加完善、准确明了地提供了把一些概念传达给别人的方法。利用了符号,数学上的每一个论断和它所描述的东西就可以更快地被别人所了解。

——罗巴切夫斯基^②

① 刘劲苓. 小学数学中的数学史[M]. 北京: 中央民族大学出版社, 2009: 25.

② 刘劲苓. 小学数学中的数学史[M]. 北京: 中央民族大学出版社, 2009: 47.

序一



基础教育质量测评模型和标准是挖掘教育大数据价值和规避大数据风险的战略工具,能够在复杂的信息和数据中获取教育改革和发展的关键要素,将大数据变成“小数据”,从不确定性中寻找确定性,增强大数据对教育决策的价值,从而降低大数据带来的决策风险,是教育决策科学化和国家新型智库建设的有力支撑,也是教育研究科学化的重要突破口。

《基础教育测评模型构建与应用丛书》致力于基础教育领域的测评研究,重在开发测评的指标体系及测评工具,既考虑学生课业负担、学生阅读素养、学龄儿童动商、学生美术表现素养、学生学习兴趣,也考虑教科书难度、教师数学素养、学校效能、学校特色发展,还考虑学生STEAM学习能力、劳动教育等;既考虑学生测评,也考虑教师测评、学校测评和政府测评;既考虑学生能力测评,也关注学生情意测评和学习负担,进而多学科、多角度地关注基础教育测评的重大问题,构建系统性、全局性的系列基础教育测评模型,并通过实践应用,充分体现出测评在教育中的指挥棒作用。该丛书围绕基础教育评价的重点、热点、难点问题,厘清相关问题的内涵与结构特征、测评指标体系,构建系列在国内具有原创价值的测评模型,有效回应基础教育领域相关主题的评价难题。这对基础教育质量监测、基础教育评估、基础教育督导等相关领域的研究与实践具有重要的学术贡献和参考价值。

由国家级教学名师、当代教育名家、中国基础教育质量监测协同创新中心首席专家、西南大学二级教授、教育部西南基础教育课程研究中心主任、西南大学基础教育研究中心主任、中国教育学会原副会长、教育部基础教育课程教材专家工作委员会原副主任、原西南师范大学校长、西南大学原常务副校长宋乃庆教授组织编写的《基础教育测评模型构建与应用丛书》,系深入落实中共中央 国务院《深化新时代教育评价改革总体方案》之作,该丛书贯彻习近平总书记“扭转不科学的教育评价导向”等讲话精神,创造性地提出基础教育测评模型构建范式及应用范例,对全面把握基础教育发展现状、科学

诊断现存问题、有效提出改进策略、科学提供决策咨询等具有极强的理论价值和现实意义。近年来,该团队已完成20余个有影响力的基础教育测评模型构建及工具开发工作,走在全国前列;围绕基础教育测评成功申报国家级、省部级项目20余项;在《中国社会科学》《教育研究》《教育学报》《华东师范大学学报》等重要核心期刊发表论文60余篇。西南大学“教育测评之家”科技创新团队被共青团中央、全国青联、全国学联、全国少工委授予大学生“小平科技创新团队”称号,获得“第十一届中国青少年科技创新奖”,受到时任副总理孙春兰的接见,取得了丰硕的研究成果。

综上所述,该丛书设计视角独特,创新性强,具有较高的学术价值、应用价值和出版价值。虽难度较大,但团队积淀深厚,攻坚能力强。

江西财经大学



2023年10月8日

【邱东,经济学博士,全国哲学社会科学基金项目评审组统计学召集人,1993年经国务院学位办批准为博士生导师,国务院政府特殊津贴获得者。曾任东北财经大学校长、中央财经大学党委书记,世界银行第8轮ICP技术咨询组(TAG)成员、教育部学位办应用经济学学科评议组成员、统计学学科评议组成员、教育部科技委学部委员。现任江西财经大学讲席教授,统计学院名誉院长。】

序二



教育测评是新时代党和国家教育事业发展的重大理论和实践问题。习近平总书记在全国教育大会上指出,扭转不科学的教育评价导向,坚决克服唯分数、唯升学、唯文凭、唯论文、唯帽子的顽瘴痼疾,从根本上解决教育评价指挥棒问题。2020年,中共中央 国务院颁布《深化新时代教育评价改革总体方案》,其中提出,到2035年,基本形成富有时代特征、彰显中国特色、体现世界水平的教育评价体系。然而,当前对如何在基础教育领域开展教育测评,发挥测评引领教育质量观、提升教育质量的这一全局性、战略性、前瞻性的研究尚不系统。

中国基础教育质量监测协同创新中心首席专家、中国教育学会原副会长、西南大学宋乃庆教授团队以国家“2011协同创新中心”中国基础教育质量监测协同创新中心西南大学分中心,重庆市人文社会科学重点研究基地西南大学基础教育研究中心等平台,以及教育学国家“双一流学科”、心理学国家重点学科、统计学一级学科为依托,多年来一直深耕基础教育测评研究,特别是创造性地开展基础教育测评模型研究,开辟了基础教育测评研究的新领域,构建了20余个原创性教育测评模型,并形成了基础教育测评模型的构建范式,取得系列高水平、标志性成果。

如今,西南大学宋乃庆教授团队将多年来的基础教育测评模型研究成果汇集成含16册书的《基础教育测评模型构建与应用丛书》,是基于2012年以来国家哲学社会科学重点基金课题,尤其是中国基础教育质量监测协同创新中心支持中国基础教育质量监测协同创新中心西南大学分中心开展的一系列测评模型构建与应用的课题研究,并结合国家2020年《深化新时代教育评价改革总体方案》的要求,研究与实践成果的集成表现,是团队在基础教育测评研究方面的阶段性成果总结,是对构建的系列重要教育测评模型的集中呈现。

该丛书创新性强,编写团队率先创造性地开拓了基础教育测评模型构建与应用这一研究领域,其成果“大数据时代的教育测评模型及其范式构建”在国内人文社科顶级

刊物《中国社会科学》(2019年第12期)上发表,尝试构建中国特色的基础教育测评话语体系,具有重要的理论和现实意义。此外,基础教育测评模型构建是一个涉及教育学、心理学、管理学、信息科学、统计学、数学等多学科的跨学科领域,难度极高但意义重大。相信它对基础教育测评的研究、实践和决策都将产生重要的影响。

北京工商大学



2023年10月8日

【郭建华,北京工商大学党委副书记、校长,统计学教授,博士生导师。第八届国务院学位委员会统计学科评议组召集人,国家杰出青年科学基金获得者,“新世纪百千万人才工程”国家级人选,教育部新世纪优秀人才。】

前言

“符号意识”是《义务教育数学课程标准(2011年版)》(以下简称《标准(2011年版)》)的核心概念和重要内容之一,也是数学素养的重要组成部分,《义务教育数学课程标准(2022年版)》(以下简称《标准(2022年版)》)明确把数学符号意识作为小学阶段的核心素养。对小学生来说,他们最先接触的数学符号是数字符号,继而会逐步认识关系符号($>$, $<$, $=$)、运算符号($+$, $-$, \times , \div)等。数字符号的学习是小学一年级学生学习数学从具体到抽象、直观到概括的第一步,十分重要。可以说,培养小学低段数学符号意识是小学生形成数学抽象思维的第一步,是数学核心素养(数学抽象)的重要组成部分,也是形成抽象思维的基础,有十分重要的作用。然而,学界对小学低段数学符号意识的认识并不一致,在《标准(2011年版)》的具体实施中,小学低段数学符号意识是否存在还有分歧。《标准(2022年版)》虽然把数学符号意识这个核心素养归到小学阶段,但对怎么评价学生数学符号意识发展的水平没有明确说明。因此,小学低段学生数学符号意识的现状如何?是否可以测评?能否构建出一个可以测评的工具?这些问题都值得研究。可见,小学低段数学符号意识测评模型的构建是数学教育教学中亟待探讨和研究的问题,它是数学、教育学、心理学和统计学等领域交叉的共同研究的问题,具有较高的研究难度。2016年以前,国内外对小学低段数学符号意识测评模型的构建研究非常少。本书通过对小学低段数学符号意识的理论和实证研究,尝试构建小学低段数学符号意识的测评模型,这对培养和发展小学生数学符号意识,以及对人的抽象思维的形成和发展都具有积极且重要的研究意义。

本书运用文献资料、调查研究、统计分析等方法开展对小学低段数学符号意识测评模型构建相关的研究。首先,运用文献资料方法,收集、整理和分析国内外有关小学低段数学符号意识的文献、电子资料,以及小学一、二年级的数学教科书,并对其存在性、含义、表现形式和操作性的定义进行了系统的分析和归纳,初步形成小学低段数学符号意识的理论分析框架。其次,通过专家咨询(高校知名数学教育和教育统计方面的专家,以及一线优秀的数学教师和教研员,各类专家共30人,咨询次数达60人次以上)、课堂观察(学生对数字1~5的认识)、问卷调查(1880份学生测试卷和1138份专家调查问

卷)等调查形式对小学低段数学符号意识的内涵维度和行为因素进行数据的收集。最后,对调研数据进行统计分析(探索性因素分析、验证性因素分析、层次分析法、卡方检验、F检验、T检验),最终构建出小学低段数学符号意识测评指标和测评模型。

本书运用教育统计的方法和思路构建基础教育中的测评模型,即“小学低段数学符号意识的含义—表现形式—操作性定义—内涵维度的确定—测评指标的筛选—测评模型的构建—测评模型的检验”的研究思路。整个研究分为四个阶段:第一,分析框架的构建;第二,测评指标的确定;第三,测评模型的构建;第四,测评模型的检验。这四个研究阶段为:界定小学低段数学符号意识的操作性定义;确定小学低段数学符号意识的测评指标,构建和验证小学低段数学符号意识的测评模型是研究的重点;编制小学低段数学符号意识调研工具(学生测试题目);小学低段数学符号意识的内涵指标是研究的难点。

全书共分为九章:第一章,绪论。综述小学低段数学符号意识的研究背景和研究意义,提出全书的整体研究设计框架,科学合理地界定本书的相关核心概念。第二章,数学符号意识的国内外研究。收集和整理国内外有关数学符号、意识、符号意识的研究成果,初步获得了符号意识的理论研究基础、研究思路和研究趋势。第三章,教育测评模型构建的相关理论。主要介绍模型的基本类型、模型构建的基本步骤、教育测评模型构建的操作路径和测评模型构建研究的趋势分析,重点阐释教育测评模型构建的操作路径。第四章,小学低段数学符号意识的有关问题探析。着重探讨小学低段数学符号意识的存在性、含义及其表现形式,比较《标准(2011年版)》和《标准(2022年版)》对数学符号意识的相关要求,以及更科学地界定小学低段数学符号意识行为描述的操作性定义。第五章,小学低段数学符号意识测评指标的构建与验证。主要从实证研究的角度,探析小学低段数学符号意识的内涵指标和指标表现出来的行为因素,通过探索性因素分析和验证性因素分析,筛选出小学低段数学符号意识的测评指标。第六章,小学低段数学符号意识测评模型的构建和检验。运用模型构建的一般方法和步骤,并结合小学低段

数学符号意识的本质,构建出小学低段数学符号意识的测评模型,通过对统计量和模型教育意义的检验,说明和验证测评模型的可行性和有效性。第七章,小学低段数学符号意识测评模型的应用。对模型的客观性、公正性进行验证,从该模型的一般性入手,进行具体应用及实例分析。第八章,小学低段数学符号意识的教学案例分析。主要通过实际教学案例和一年级小学生数学符号认知的水平来分析,为小学低段学生数学符号意识培养提供实践参考。第九章,研究结论与反思。总结研究的主要结论、存在的不足和深入的研究设想。

本书内容是从2014年9月开始构思和尝试研究,大部分研究结论是2017年前完成的,后续增加了部分2022版义务教育数学课程标准的内容阐释,但随着最新一轮课程改革的新要求,本书研究内容还不够完善,所以在研究中还存在诸多需改进之处,主要包括:(1)数学符号意识的相关理论还需要进一步探究,尤其是测评指标中行为因素个数的问题;(2)小学低段数学符号意识调研工具(测试题)的信效度和测评模型的准确率需要进一步提高;(3)测评模型构建时还需扩大选取的样本量以增强代表性。本书可为广大一线教师培养和发展学生的数学符号意识提供可操作的依据。如果读者发现本书有不妥或可改进之处,希望大家包容和谅解,也恳请读者们不吝赐教!

目 录

❖ 第一章 绪 论 ❖

❖ 第二章 数学符号意识的国内外研究 ❖

- 第一节 数学符号的有关研究14
- 第二节 意识的有关研究21
- 第三节 符号意识的有关研究27

❖ 第三章 教育测评模型构建的相关理论 ❖

- 第一节 模型的定义及类型42
- 第二节 教育测评模型构建的操作路径44
- 第三节 测评模型构建的有关研究47

❖ 第四章 小学低段数学符号意识的有关问题探析 ❖

- 第一节 小学低段数学符号意识的含义54
- 第二节 小学低段数学符号意识的表现形式68
- 第三节 小学低段数学符号意识的操作性定义75

❖ 第五章 小学低段数学符号意识测评指标的构建与验证 ❖

- 第一节 小学低段数学符号意识测评指标的设计80
- 第二节 小学低段数学符号意识测评指标的实证研究过程84
- 第三节 小学低段数学符号意识测评指标的初步形成100
- 第四节 小学低段数学符号意识测评指标的验证102

❖❖❖ 第六章 小学低段数学符号意识测评模型的构建与检验 ❖❖❖

第一节	小学低段数学符号意识测评模型的假设	106
第二节	小学低段数学符号意识测评模型的参数估计	108
第三节	小学低段数学符号意识测评模型的检验	113

❖❖❖ 第七章 小学低段数学符号意识测评模型的应用 ❖❖❖

第一节	教育测评模型的一般应用	122
第二节	小学低段数学符号意识测评模型在符号意识培养中的应用	126
第三节	小学低段数学符号意识测评模型在符号意识学业质量评价中的应用	133

❖❖❖ 第八章 小学低段数学符号意识的教学案例分析 ❖❖❖

第一节	小学一年级学生数学符号意识培养的教学案例分析	146
第二节	小学二年级学生数学符号意识培养的教学案例分析	165
第三节	小学一年级学生认知数学符号的SOLO评价分析	179

❖❖❖ 第九章 研究结论与反思 ❖❖❖

第一节	研究结论与创新	190
第二节	问题讨论与反思	192

附录		195
参考文献		201
后记		211

 **第一章****绪论**

一、研究背景

本书研究起于2014年的9月,处于《标准(2011年版)》实施的过程中,是基于小学低段数学符号意识的诸多争议和教育教学急需解决的教学问题提出来的研究课题。同时,2022年4月颁布的《标准(2022年版)》,明确把符号意识作为小学阶段的一个重要核心素养,并明确了小学阶段学生从形成初步的符号意识到形成符号意识的过程性变化。因此,无论是在《标准(2011年版)》的实践中,还是在《标准(2022年版)》的具体实施中,本书的课题都非常值得数学教育界研究者和一线教师们关注和研究。

(一)小学低段数学符号意识存在性问题认识上有争议

在2001年的基础教育课程改革中,《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》首次把“符号感”作为数学课程的核心概念之一。经过十年的教学实践,《标准(2011年版)》把“符号感”修订为“符号意识”,并明确提出要培养和发展学生的符号意识,这里的符号意识是专指数学符号意识(以下简称符号意识);又经过十年的教学实践,《标准(2022年版)》明确把符号意识作为学生的学科核心素养之一。一方面,这说明了符号意识在数学课程中的重要性和在学生数学学习发展中的重要性;另一方面,《标准(2011年版)》并没有明确提出在小学低段要培养和发展学生的符号意识,这也使学界在小学低段数学符号意识是否存在这一问题上有很大争议,甚至产生了极大的分歧,尤其是在新课标颁布之前,笔者两次在数学教育论坛和研讨会上,提出了对小学低段数学符号意识存在性问题和重要性问题的认识,当场引起了反响和争论。有学者认为该学段不存在符号意识,或认为符号意识涉及很少,或认为这个学段的符号意识就是数感;也有学者认为该学段的符号意识存在,且十分重要。经过很长一段时间的教学研究和实践后,学界对小学低段数学符号意识的存在性问题认识逐渐明晰,并达成共识。尤其再次经过十年的教学实践后,在2011年的课程标准修订中,《标准(2022年版)》在1~2年级中明确提出了“经历简单的数的抽象过程,认识万以内的数,能进行简单的整数四则运算,形成初步的数感、符号意识和运算能力”。由此可以看到,新一轮的课程标准已经明确把发展学生的符号意识作为小学低段学生的重要课程目标。

(二)小学低段数学符号意识重要但长期被人们忽视

数学符号是数学科学专门使用的特殊符号,是含义高度概括、形体高度浓缩的一

种科学语言,因数学思维特点的需要而产生的理想化的科学化的书面语言^①,也是进行数学表示、运算、推理和解决问题的工具^②。因此,数学的学习离不开对数学符号的学习,并且在一定意义上数学符号的学习就是数学的学习。对小学生而言,最先接触的数学符号是数字符号,它是学生学习数学从具体到抽象、直观到概括的第一步,对学生数学学习发展十分重要。小学生还会接触关系符号、运算符号等。可以说,小学低段学生数学符号意识是小学生数学抽象思维的第一步,是数学核心素养的重要组成部分,是培养抽象能力的基础,是公民的基本素养之一。截至2016年,小学低段数学符号意识的相关研究没有引起学界的重视,甚至被人们所忽视。

(三)小学低段数学符号意识培养和发展的现实需要

在义务教育数学课程的内容设计中,无论是《标准(2011年版)》还是《标准(2022年版)》都明确提出了要培养和发展学生的数学符号意识,但对如何培养、如何发展以及如何评价没有作出详细的说明,这也留给研究者、教师和教研人员更大的研究和发展空间。符号意识作为数学学科的核心素养之一,是一个抽象的概念、一个中位的知识、一个隐性的课程目标,教师应该如何去对学生进行培养和促其发展是一个极大难题,究其原因如下:

(1)符号意识概念很抽象,部分教师不清楚数学符号意识究竟是什么,具体表现在哪些方面;(2)在实际教学过程中,部分教师不了解学生符号意识的现状和水平究竟如何;(3)在评价学生数学符号意识时,部分教师不知道用什么工具去测评学生的符号意识水平;(4)数学课程标准的要求是培养和发展学生符号意识,但如何培养和发展需要一线教师在教学中不断实践和探索,这也导致教师不知如何去督导和培养学生的符号意识。因此,构建符号意识的评价方法和评价工具是培养和发展学生符号意识的需要。

综上可知,数学符号意识已成为中小学数学课程的重要内容之一,小学低段数学符号意识是小学生数学抽象思维形成的第一步。那数学符号意识究竟是什么?小学低段学生数学符号意识是什么?具体表现在哪些方面?是否可以通过相应的试题进行测评?如果可测评,该通过设置哪些维度的问题去测评小学低段学生数学符号意识?如何构建学生数学符号意识的测评工具?这些都是数学教育亟待研究和解决的问题。带着这些问题,作者与项目组成员商议并征求多位专家学者的意见和建议,提

^① 徐品方,张红.数学符号史[M].北京:科学出版社,2006:348.

^② 史宁中.教育与数学教育[M].长春:东北师范大学出版社,2006:220.