


核心素养视域下 中学数学“**误中悟**” **课堂探析**

李巍 唐录义  著



黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社

核心素养视域下 中学数学“**误中悟**” 课堂探析

李巍 唐录义 著



黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

核心素养视域下中学数学“误中悟”课堂探析 / 李巍, 唐录义著. -- 银川: 宁夏人民教育出版社, 2023.6
ISBN 978-7-5544-5206-6

I. ①核… II. ①李… ②唐… III. ①中学数学课—
课堂教学—教学研究 IV. ①G633.602

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 103039 号

核心素养视域下中学数学“误中悟”课堂探析

李巍 唐录义 著

责任编辑 李亚慧
责任校对 苏璇毓
封面设计 冯彦青
责任印制 殷戈



黄河出版传媒集团 出版发行
宁夏人民教育出版社

出版人 薛文斌
地址 宁夏银川市北京东路 139 号出版大厦(750001)
网址 <http://www.yrpubm.com>
网上书店 <http://www.hh-book.com>
电子信箱 jiaoyushe@yrpubm.com
邮购电话 0951-5014284
印刷装订 宁夏银报智能印刷科技有限公司
印刷委托书号 (宁)0026379

开本 720 mm × 980 mm 1/16
印张 16 字数 215 千字
版次 2023 年 6 月第 1 版
印次 2023 年 6 月第 1 次印刷
书号 ISBN 978-7-5544-5206-6
定价 48.00 元

版权所有 侵权必究

作者简介



李巍

银川市实验中学数学教师，高级教师，自治区名师工作室主持人，宁夏青年拔尖人才，教育厅2021年基础教育教师年度人物，银川市高精尖缺人才，银川市凤城名师，银川市骨干教师，银川市教研先进个人，兴庆区优秀教师。

第六届全国高中青年教师数学优质课比赛一等奖；首届教育部“一师一优课、一课一名师”活动“部级优课”；首届教育部“基础教育精品课”评比“部级优课”；主持宁夏第五届基础教育教学课题荣获一等奖；获全国名师工作室创新发展成果特等奖1项，宁夏社会科学优秀成果奖1项，银川市教科研成果一等奖5项；优质课获国家级、自治区级、市级一等奖10余次；多篇论文在国家级数学专业期刊发表，参与编写公开出版的校本教材；多次指导青年教师在各级各类数学优质课比赛中获奖。

目录

第一章	“误中悟”教学理念阐述 / 001
第一节	错误不是无情物 化作资源价更高 / 001
第二节	“误中悟”教育方式的实验探索 / 016
第三节	以“误中悟”为引领 构建“6W”活动主线 / 029
第二章	“误中悟”课堂教学实践 / 039
第一节	概念理解型教学 / 039
第二节	原理探究型教学 / 107
第三节	方法习得型教学 / 173
	参考文献 / 249

第一章 “误中悟”教学理念阐述

第一节 错误不是无情物 化作资源价更高

常常会听到,人们这样谈论自己在中学阶段的数学学习:“上课听似懂,下课不会做,题目看似会,一做就不对。”造成这种“懂而不会,会而不对”现象的原因究竟是什么?能否克服这种现象?如何克服?这些一直是数学教师苦苦思索、学生渴望得到解决的问题。

实际上,“上课似乎听懂了,题目似乎看会了”并不是真正的懂、真正的会,而是对知识还存在模糊的、有歧义的认识,因而对上课内容的理解有失偏颇,做题目出现错误、动辄得咎。其实,这是正常的现象。只要我们正确对待错误,利用错误,在错误中反思、感悟,就有望悟出真相、悟出本质、悟出规律、悟出真理、悟出智慧。如果我们对于“错之所以错”剖析得越深,那么对于“对之所以对”也就体悟得越透。此即为数学学习的“误中悟”。

一、对待错误要有宽容的态度

人类的认识规律告诉我们,认识的发展是实践、认识、再实践和再认识,循环往复以至无穷,一步步地深化和提高的过程。这种过程的反复性和无

限性,不是指一种单纯的循环,而是波浪式发展的。人类认识事物是从局部到整体,从片面到全面,从零碎到完整,从孤立到联系的乘风破浪式发展的过程。当我们初识某事物时,会有“横看成岭侧成峰,远近高低各不同。不识庐山真面目,只缘身在此山中”的感觉。例如,看几何体的三视图时,必须全方位综合观察三个视图,才能把握几何体的结构特征,否则,只看一个视图,就会出现认识错误。在初识事物时,认识尚处在片面、孤立、零碎的状态,出现错误在所难免,当属正常。因此,我们在初学某一数学知识时,出现“懂而不会,会而不对”的现象也就不足为怪了。

教师对学生数学学习过程中的犯错不可过分责备,学生对自己数学学习过程中的犯错也不必过度自责,只要利用错误、认真剖析、寻找错因,就可以以错攻错、误中得悟。把错误变成有用教学资源,将产生意想不到的教学效果,因此我们对待错误要有宽容的态度,不要谈错色变,而要懂得容错、善于用错。

二、出错归因分析

在数学学习中,解题是主要的数学活动,数学解题过程中的错误与数学学习如影随形。不少学生把自己的解题出错归因为马虎大意、疏忽粗心,这样的认识是片面的。事实上,学生作业和考试中出现的错误往往有着深层次的原因,下面我们将从四基性失误、策略性失误、心理性失误、逻辑性失误四个方面进行出错归因分析。

(一)四基性失误

“四基”是指基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验。四基性失误主要是指学生的基础知识不扎实,基本技能掌握不牢靠,认知结构和能力结构不健全、不完善,对数学方法领会不充分,基本数学活动经验不足,概念性质混淆不清,推理判断失误,抽象思维能力、逻辑推理与判断能力、空间想

象能力、数学建模能力、数学运算能力、数据处理与数值计算能力、数学语言与符号表达能力等存在缺陷,导致理解有失偏颇、思绪杂乱、没有解题思路、解题技能不娴熟、力不从心,造成解题受阻。

1. 混淆概念性质,导致推理失误。概念是学生思维的基本要素,是学生做题的重要依据。数学概念和性质的数学表征具有相似性、差异性、模糊性、歧义性,当数学表征的相似性较大、差异性不显著,就可能会导致认识模糊、产生歧义。学生在解题过程中所出现的由于对概念、规律的内容认识不清或不能正确理解它们的确切含义而产生的一些错误,就是概念性错误。例如,函数的单调性与数列的单调性之间相似性很高,差异不显著,容易混淆,但函数单调性要求对单调区间内任意的 x_1, x_2 , 比较 $f(x_1), f(x_2)$ 的大小关系,这里的 x_1, x_2 之间的距离可以任意小。如果对这点认识不足,很容易导致错误。

2. 认知结构缺陷。中学数学相比小学数学更抽象,在遇到难题时,基础不牢固的学生往往找不到解题思路,进而产生逃避心理,开始在课堂上开小差、课后不复习、课前不预习。这就是一个恶性循环,也是导致错误频发的重要因素。受这方面影响最大的就是运算错误以及解题方法的选择。胸中无墨,笔下难以生花。数学题的解题方法有许多种,包括换元法、反证法、归纳法等。学生的数学基础差,对这些方法的掌握程度显然就不够,在实际解题时往往就会选择拿公式去套,忽视公式条件。定理公式记忆不牢、运用不熟练,导致计算推理失误。

3. 能力结构缺陷。中学数学的基本数学能力结构中包括抽象思维能力、逻辑推理与判断能力、空间想象能力、数学建模能力、数学运算能力、数据处理与数值计算能力、数学语言与符号表达能力等。由于能力结构中某些能力不足或存在缺陷,学生容易思路受阻,陷入解题困境,或者运算一误再误,或者推理逻辑混乱。

4. 数学思想领悟不透。学生综合应用数学知识的能力是建立在数学思想与方法上的。中学数学的思想方法主要有数形结合思想、函数与方程思想、转化与化归思想、分类讨论思想、有限与无限思想、特殊与一般思想、必然与或然思想等。往往是学生做了海量的数学题,在遇到同类型的问题时还是会出现错误,其根源就在于缺乏数学思想与方法的训练,片面地认为做海量的练习题就能够形成正确的数学思想并形成各自的解题方法。当然不能说海量的练习题没有价值,其价值主要在于提供给学生强化数学思想与方法的途径。学生要注重掌握正确的学习方法,加强自身综合应用数学知识进行解题的能力。

5. 基本数学活动经验不足。首先,数学知识不仅包括定义、公式、法则、定理等数学事实的客观性知识,而且包括从属于学生自身的主观性知识(即带有个体认知特点的个人知识和数学活动经验),它是经验性的、感性的、不那么严格的“隐性知识”。其次,数学教学不仅是结果的教学,更重要的是过程的教学。数学课堂教学必须结合具体内容,让学生在数学学习活动中去经历完整的教学过程。最后,数学课堂教学应该是开放的。数学活动经验不像事实性知识那样看得见、摸得着且表述唯一。学生在数学活动中对某一数学对象的认识是有个性特征的,在认识的过程中所获得的经验又是多样的,学生的发展也因此而不同。这就决定了数学课堂教学不能封闭式地灌输,而要开放式地组织活动。每个学生在学习过程中都有一定的自主性,教师应给学生充分表达各种不同意见的机会,积极拓展学生的学习空间。

对于学生而言,很多数学知识并非新知识,在他们的生活中会有许多与数学知识相关的经验。因为学生生活在信息丰富的社会里,无处不在的生活现象时时刻刻地进入他们的认知领域,成为他们的生活经验,并作为学习者原有经验的一部分构成进一步学习新知的数学现实。因此,如果学生已有的数学知识或生活经验不足,就会引发数学学习的困难。

(二)策略性失误

策略性失误是指:由于解题方向上的偏差或使用了笨拙的方法策略,造成思路受阻,或导致解题难度、解题过程长度增大,致使出错的概率增大或出现潜在失分点。

1. 未切中问题本质。要解决一个数学问题,关键在于能否把这个数学问题看破。而所谓的“看破”,就是把握解决问题的核心与关键,即揭示问题的本质。在解题过程中,有效地揭示一个问题的本质应当从学生的最近发展区着手,让学生真正了解知识的来龙去脉,回到问题起点。所谓“回到问题起点”,指的是从问题所涉及的基本概念、性质与思想方法出发分析问题,并由此把握解决问题的关键,揭示问题的本质,以达到较快解决问题的效果。如果未切中问题本质,就会使解题陷入困境。

2. 解题角度不当。找到一个恰当的解题角度,知识就会为你打开通向解题成功的一扇门。反之,解题角度不当,就会增大难度,甚至根本就打不开解题的大门。

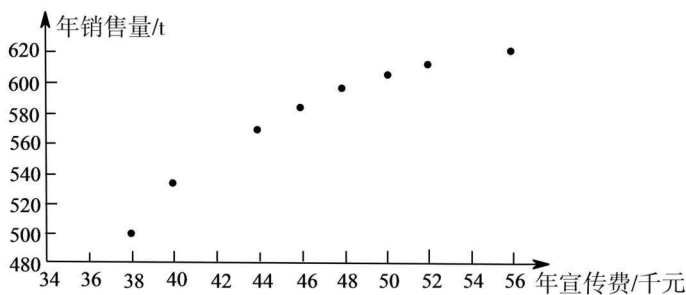
3. 解题方法不当。一个数学问题的求解可采用的策略可能有多种,选择好的策略不仅可以使问题的求解过程简洁明快,而且决定着问题的最终正确解决。不好的方法策略会产生曲折的思维回路,导致舍简求繁、方向不准、误入歧途,增大求解的难度与求解过程的复杂度,从而使问题求解受阻,即使解出来了也因费时费力而产生潜在失分点。

4. 模型选择不当。数学模型是一种模拟,是用数学符号、数学式子、程序、图形等对实际问题本质属性的抽象而又简洁地刻画,它或能解释某些客观现象,或能预测未来的发展规律,或能为控制某一现象的发展提供某种意义上的最优策略或较好策略。数学模型一般并非现实问题的直接翻版,它的建立常常既需要人们对现实问题深入细致地进行观察和分析,又需要人们灵活巧妙地利用各种数学知识。这种应用知识从实际问题中抽象、提炼

出数学模型的过程就称为数学建模。如果模型选择不当,得出的结果可能与实际相差甚远,使预测失真,导致决策失误。

例 某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费,需了解年宣传费 x (单位:千元)对年销售量 y (单位:t)和年利润 z (单位:千元)的影响,对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i ($i=1,2,\dots,8$) 的数据作了初步处理,得到下面的散点图及一些统计量的值。

(1)根据散点图判断, $y=a+bx$ 与 $y=c+d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程模型?(给出判断即可,不必说明理由)



\bar{x}	\bar{y}	\bar{w}	$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})^2$
46.6	563	6.8	289.8	1.6
$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$			$\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})$	
1 469			108.8	

表中 $w_i = \sqrt{x_i}$, $\bar{w} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 w_i$ 。

(2)根据(1)的判断结果及表中数据,建立 y 关于 x 的回归方程。

错解:(1)由散点图可以判断, $y=a+bx$ 适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程式模型。

(2)建立 y 关于 w 的线性回归方程式。

$$\text{因为 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{1\ 469}{289.8} = 5.07,$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 563 - 5.07 \times 46.6 = 326.7,$$

所以建立 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 326.7 + 5.07x$ 。

错点: $y=a+bx$ 不适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型。

出错归因:模型选择不当。

(三)心理性失误

很多学生进行试卷分析时,都会将失分归因为两类:第一类是知识和能力不足;第二类是具备了解决这个问题的可能性,但没有得到正确的答案。对于第一类失误,学生往往会比较认真地对待,寻找自己需要提高的地方。对于第二类失误,很多学生不以为然,往往给这类失误简单地下个结论,如归结到粗心大意或是状态不好,导致出错。因此,他们对第二类失误并不太在意,以致在考试中屡次不能改正,即使考试时非常小心,也总会因认为自己犯了不该犯的 error 而捶胸顿足。这使学生变得沮丧,严重影响到他们学习数学的态度和信念,长此以往,将会使学生学习数学的积极性受到严重挫损。其实这种现象的背后往往隐藏着深层次的心理原因,如思维抑制、粗心大意、思维惯性、思维定式、审题习惯不好等;这些都可能是造成这类失误的原因,我们把这类失误称为心理性失误。

1. 思维抑制,导致低级错误。在考试中由于临场过分焦虑、紧张,甚至慌张,心理压力过大以致出现暂时性思维障碍,称为“思维抑制”。这种

情况下,学生面对题目,往往大脑一片空白,不知所措,平时常用的知识和方法记不清了,想不起来了,题目也容易看错,简单的运算过程也会发生错误,这种情况常常出现在考试开始阶段。另外,在考试中途因某题较难求解遇挫,也会引起情绪紧张、心里慌乱,从而干扰思维的正常运行,导致会而不对、对而不全。造成思维抑制的根本原因是情绪过于紧张,思想压力过大,心理负担过重,或者是对考试中的困难和应对策略缺乏必要的心理准备。

2. 思维惯性,思维定式,思维僵化。我们在长期的工作、学习和生活中,对经常发生的事情,往往会产生思维惯性,形成固定的思维模式,即思维定式。思维定式对常规思维是有利的,它可使思考者在处理同类问题的时候少走弯路。然而,思维定式也有它的弊端,特别是当我们处理一些新情况的时候,思维定式就会变成思维枷锁,阻碍我们用新观念、新方法、新思路去创造性地解决问题,使人失去创新和发展的源泉、动力。

3. 审题浮浅,理解肤浅。粗心大意源于不良的学习习惯,包括阅读习惯、审题习惯两个方面的问题。阅读时不专注,思考不深入,浅尝辄止,未窥及深潜的问题;审题时忽略隐含条件,粗心大意,看错或看漏条件,或者只考虑问题的某个方面,忽略了问题的其他方面,顾此失彼。

4. 观察不仔细,认识不全面。观察,是研究数学问题的起点,其重要性不言而喻。观察数学问题的关键是细致入微、洞若观火,只有不放过任何细节和线索,才能深入全面地获取解题信息。否则,观察不仔细、粗心大意、丢三落四、认识不全面,就会导致错误。

5. 缺乏韧劲,遇难而退。水流千里意志坚,人无韧劲半路亡。跌倒了并不意味失败,关键在于是否能忍着疼痛,优雅地重新站起来。只要有梦想,那么你永远都不会输!人有很多时候不是败给了别人,而是输给了自己。韧者,柔而固也。固而不柔则脆,柔而不固则弱,柔而固则韧。歌德认为:

“世上只有两条路能通往成功的目标并成就伟大的事业,那就是力量和坚韧。坚韧从来不负众望,因为它沉默的力量将随着时间的推移一天天壮大,直到所向披靡,无以抗拒。”古人云:“锲而舍之,朽木不折;锲而不舍,金石可镂。”毅力也是成功之本,是一种韧劲。数学解题如果缺乏韧劲,遇到思维难度稍大一点的问题就不深入思考,遇到运算量烦冗一点的题目就望而却步、知难而退、轻言放弃,就会错失成功的机会。

(四)逻辑性失误

逻辑性失误是指由于违反逻辑思维的规律或思维混乱,导致推理不严密,厘不清因果关系而产生的错误。譬如不会正确使用分析法作证明、分类讨论中分类标准不统一等,都是逻辑性失误的典型例子。

1. 语言障碍,表述不清。数学语言包含着多方面的内容,其中较为突出的是文字语言、符号语言及图形语言,其特点是准确、严密、简明。符号语言、文字语言、图形语言之间的转换是存在困难的。图形语言为文字语言和符号语言提供了直观表象,是对现实数量关系的一次抽象;符号语言是借助直观的图形语言对现实数量关系的再一次抽象;文字语言是能明确界定图形语言和符号语言所表述对象的意义与内涵。

学生面对的题目中,从呈现文字语言到要求用符号语言表示,中间必须通过图形语言理解。只有三者融会贯通,才能达到对数学知识的深刻理解。对于学生来说,掌握这些数学语言,并用数学语言来思考问题、解决问题,确实不容易,因此在数学学习时就容易出现错误。

2. 思维不严谨,推理不严密。要想达到思维严谨,就要想得远些,思维面要全些。所谓“不谋万世者,不足以谋一时;不明全局者,不足以谋一域”指的就是思维不严谨、以偏概全,就会导致推理不严密。

3. 充要关系错记,转化不等价。充分条件的意思是“有之必然,无之未必不然”;必要条件的意思是“有之未必然,无之必不然”;充要条件的意思是

“有之必然，无之必不然”。在推理中学生往往把必要性当成充分性，造成逻辑性失误。

4. 偷换命题，蒙混过关。命题必须保持自身的同一。转移命题、偷换命题的常见情形有三种：对同一语词表达的不同概念加以混淆或偷换，故意对表面相似的语词所表达的不同概念进行偷换，用孤立、片面、似是而非或毫不相干的事实来混淆或偷换概念。

三、捕捉错误资源的方法和途径

有学者认为：“错误中往往孕育着比正确更丰富的发现和创造因素，发现的方法就是试错方法。”多年的教学实践使笔者深深地感到，面对学生在数学课堂上出现的错误，若能恰到好处地发挥教学机制，及时捕捉学生生成的错误，以独特的视角去发现错误的价值，就能获得错误资源。

（一）在课堂教学过程中获得生成性错误资源

课堂教学是一个动态生成的过程，学生在学习过程中出现的错误具有不可预见性，而这样的错误又往往是学生思维的真实反映，蕴含着宝贵的亮点。让学生充分展示思维过程，探求其产生错误的内在因素，则能使教师有针对性地展开教学，有利于学生的自主建构。因此，课堂教学过程是获得生成性错误资源的肥沃土壤。

（二）在学生的作业和试卷中捕捉错误资源

在中学数学的学习过程中，学生会练习海量的数学题，其中有许多数学题的题型都是类似的，有必要将练习中出错的题收集起来，制作成错题资源库，并从中总结正确的解题方法与解题经验。相比教材提供的教学资源，资源库里收集的错误例题，更加符合学生的实际需求，学生要将错题资源库的价值重视起来，着重分析错题的根源、性质等，并就这些错误进行针对性改正。要注意的是，错题资源库收集的错题要具有典型性。在学生的作业和

试卷中发现错误是捕捉错误资源的主要途径。

（三）错题本记录自身错误，形成错误资源

学生每人准备一本数学错题本，摘录自己平日里比较典型的错题，也就是建立错题档案，收集原始的错题案例，并且对出现的错题及时改正纠错，这是常规的纠错方法。教师也要充分利用学生的错题本，面批面改时，可让学生手拿错题本，自我分析错误原因和思考方法，并且用自己的语言完整地表达出来，这样教师能够及时知道学生的思维漏洞在哪里，并可及时补上，让学生真正看懂题目，扎扎实实纠错。

（四）与同伴交流的过程中捕捉错误资源

叶澜教授在《重建课堂教学过程观》一文中提到：“学生在课堂活动中的状态，包括他们的学习兴趣、积极性、注意力、学习方法与思维方式、合作能力与质量、发表的意见建议、观点、提出的问题与争论乃至错误的回答等等，无论是以言语，还是以行为、情绪的方式表达，都是教学过程中的生成性资源。”与同伴交流的过程中，一定有错误与正确的思想碰撞，只要有意关注，就有望捕捉到非常宝贵的错误资源。

（五）在有关文献资料中捕捉错误资源

阅读文献资料是搜集处理信息、认识世界、发展思维、获得审美体验的重要途径，是学生学好其他课程的基础，也是学生全面发展和终身发展的基础，培养学生的自主阅读的能力具有十分重要的意义。然而，差错人皆有之，这些文献资料的作者，在写作期间也可能受到某些认识或思维的局限，在某些地方出现差错，所以我们在阅读时，要带着审慎的眼光和批判质疑的精神，敏锐慎重地发现错误，进行剖析，并将之收集积累，这也是非常宝贵的错误资源。

四、在教学中运用错误资源进行“误中悟”

学生出现这样或那样的错误,是学生真实的思维过程,反映出学生建构知识时的障碍,其间往往蕴藏着创新的精神和智慧火花,教师应变废为宝,将错误作为重要的教学资源予以珍惜并合理开发利用。那么,恰当地处理好学生的错误资源,在教学中发挥错误的价值,组织学生进行“误中悟”,便可使教与学因差错而精彩。

(一)课堂中利用错误资源“误中悟”

1. 现场捕捉错误组织“误中悟”。苏格拉底在教学中并不直接向学生传授各种具体知识,而是通过问答、交谈或争辩的方法来宣传自己的观点。他先向学生提出问题,回答错了,也不直接指出错在什么地方和为什么错了,而只是提出暗示性的补充问题,使对方不得不承认答案的荒谬,并使其处于自相矛盾的地步。最后,学生从苏格拉底的引导和暗示中得出苏格拉底认为是正确的答案。对于学生在课堂中出现的错误,教师不要着急解释或讲结果,而要把错误抛给学生,将错就错,把学生的错误作为宝贵的教育资源,引导学生从不同角度去辨别错误,给学生一些研究、争论的时间和空间,从而让学生在争论中分析、反驳,在争论中明理,在争论中内化知识。

2. 预设错误案例进行“误中悟”。由于数学具有高度的抽象性,这就使学生在理解时常常是勉强知其然,很难知其所以然,只能依葫芦画瓢,更谈不上灵活运用知识。因此,在课堂教学中较好地突破难点,让学生真正理解知识的内涵,就成为学生把握知识的关键所在。如果在处理教学难点时,利用错误资源作为突破口,不仅能有效激发学生内心的认识冲突,提高其思维积极性,而且还能有效突破教学难点。

在学习中学生经常会出现一些易犯的错误,尽管教师多次讲解、反复强