DAXUE SHUXUE WEIJIFEN TONGBU LIANXICE

大学数学微积分同步练习册（下）

钱小瑞　齐　薇　主　编
李　刚　严　峻　副主编

重庆大学出版社

大学数学微积分同步练习册

（下）

主　编　钱小瑞　齐　薇
副主编　李　刚　严　峻

重庆大学出版社

前　言

微积分是高等院校的一门重要必修课,也是一些专业硕士研究生入学考试的必考科目.为了帮助同学们更好地掌握微积分,更好地实现“培养未来型人才”的教学目标,针对微积分学习中的教、学、考3个方面,我们编写了本练习册.

本书是根据微积分课程教学大纲和作者多年的教学经验,按照与教材配套章节的形式编写而成的,严格遵循“循序渐进、由浅入深”的原则.本书习题对各层次的学生都是适用的,能更好地把课堂教学和课后训练有机结合,让学生接受充分而严格的训练,进而理解和熟练掌握微积分的相关内容.每节习题后配有精选重难点题型并给出了详细解答过程.希望学生能进行选择性或全方位的练习,通过反复、多次的训练,达到深刻理解概念、定理和方法的目的,为微积分课程的学习打下坚实的基础.本书可作为高等院校理工类或经管类相关专业微积分课程的习题练习册或教学参考书.

本书共6章,由李刚、齐薇、钱小瑞编写.第7章、第10章由李刚编写,第8章、第9章、第11章由齐薇编写,第12章由钱小瑞编写.最后,由齐薇、严峻对全书进行统稿与定稿.本书中的习题有些属作者的教学积累,有些摘自其他参考资料,在此向这些作者表示感谢.

由于作者水平有限,书中难免存在疏漏之处,恳请同行和读者批评指正.

编　者

2017年10月于四川大学锦城学院

目 录

第 7 章　空间解析几何与向量代数

习题 7-1　向量及其运算

学院__________姓名__________学号__________日期__________

1.在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限：

$A(1,2,3)$；$B(1,2,-1)$；$C(-1,1,2)$；$D(-1,1,-3)$.

2.已知点 $A(1,2,3)$，$B(1,2,-1)$，$C(-1,1,2)$，$D(-1,1,-3)$.试求：

(1)$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DB}$；

(2)$|\overrightarrow{AB}|$，$|\overrightarrow{AC}|$，$|\overrightarrow{DB}|$.

3.设已知向量$\vec{a}=(2,-2\sqrt{2},-2)$，计算$\vec{a}$的模长、方向余弦和方向角.

4.设已知向量$\vec{\alpha}=(1,-2,-3)$，求与$\vec{\alpha}$方向相同的单位向量$\vec{\beta}$.

5.设$\vec{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\vec{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求：

(1)$\vec{a}\cdot\vec{b}$；　(2)$(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$；　(3)$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角余弦 $\cos\theta$.

6.求向量$\vec{a}=(4,-3,4)$在向量$\vec{b}=(2,2,1)$上的投影.

7.已知向量$\vec{a}=(1,-3,2)$，$\vec{b}=(1,2,1)$，$\vec{c}=(-1,1,1)$，计算：

(1)$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$；　(2)$\vec{a}\times\vec{b}$，$\vec{c}\times\vec{b}$；　(3)$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$.

8.已知点 $A=(1,2,-2)$，$B=(1,-2,1)$，$C=(0,0,1)$，求三角形 ABC 的面积.

9.已知向量$\vec{a}=(-1,2,2)$，$\vec{b}=(2,2,1)$，求同时垂直于$\vec{a}$与$\vec{b}$的单位向量$\vec{c}$.

10.已知点 $A=(1,2,-2)$，$B=(1,-2,1)$，$C=(0,0,1)$，$D=(1,0,1)$，求四面体 $ABCD$ 的体积.

重难点例题解析

例 1　已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$和 $M_2(1,3,0)$，计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

分析　此题型需熟悉向量的基本计算.

解

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2}),$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{1+1+2}=2.$$

方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{1}{2},\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

方向角为

$$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\beta=\frac{1}{3}\pi,\gamma=\frac{3}{4}\pi.$$

小结　熟悉向量的基本概念：

(1)向量$\vec{a}=(x,y,z)$的模：

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

(2)向量$\vec{a}=(x,y,z)$的方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

(3)方向角表示意义：α 表示向量 $\vec{a}=(x,y,z)$与 x 轴正轴的夹角，β 表示向量 $\vec{a}=(x,y,z)$与 y 轴正轴的夹角，γ 表示向量$\vec{a}=(x,y,z)$与 z 轴正轴的夹角.

例 2　求向量$\vec{a}=(1,-3,2)$在向量$\vec{b}=(1,2,3)$上的投影.

分析　向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影

$$\mathrm{Pr}\,j_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\theta=|\vec{a}|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

解

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+(-3)\times2+2\times3=1,$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}.$$

向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影为

$$\mathrm{Pr}\,j_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\theta=|\vec{a}|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

小结　向量投影的问题需要熟悉向量内积与夹角之间的关系.

例 3　已知向量$\vec{a}=(1,2,3)$，$\vec{b}=(3,2,1)$，$\vec{c}=(-1,1,1)$，计算：

(1)$\vec{a}\times\vec{b}$，$\vec{c}\times\vec{a}$；　　　　(2)$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$.

分析　考查向量的外积的计算,需熟悉线性代数中的三阶行列式的计算:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

解　(1) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-4\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}=(-4,8,-4)$,

$$\vec{c}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}=(1,4,-3);$$

(2) $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=8.$

小结　几何和线性代数的结合问题.

习题 7-2　平面与曲面

学院__________姓名__________学号__________日期__________

1.求过点(1,2,3)且以$\vec{n}=(3,2,1)$为法向量的平面方程.

2.求过点(1,2,1)且与 xOz 平面平行的平面方程.

3.求过点(1,2,3),(1,1,2),(2,-1,1)的平面方程.

4.求点(1,2,3)到平面 $x+2y+3z=1$ 的距离.

5.求平面 $x+2y+3z=1$ 与平面 $x-y+2z=4$ 夹角的余弦.

6.画出下列平面：

(1) $x=1$；　(2) $y+z=1$；　(3) $x+2y+3z=6$.

7.画出下列曲面：

(1) $x^2+y^2+z^2=1$；　(2) $z=x^2+y^2$；

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$；　(4) $x^2+y^2=1$.

8.求出曲面 $z=2x^2-y^2$ 在点 $(1,2,-2)$ 处的法向量.

9.求出曲面 $\frac{x^2}{4}+2y^2+\frac{z^2}{4}=1$ 在 $\left(1,\frac{1}{2},1\right)$ 处的法向量.

10.求出曲面 $z=2x^2+3y^2$ 在点 $(1,1,5)$ 处的切平面.

11.求出曲面 $x^2+y^2=z^2$ 在点 $(1,1,\sqrt{2})$ 处的切平面.

重难点例题解析

例 1 求过点(1,2,1)且与平面 $x+2y+3z=5$ 平行的平面方程.

分析 要求平面方程,需要求得平面的法向量和平面上一点.

解 平面 $x+2y+3z=5$ 的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(1,2,3)$,则要求平面的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(1,2,3)$.

所求平面方程为

$$(x-1)+2(y-2)+3(z-1)=0,$$

即 $x+2y+3z=8$.

小结 已知法向量$\vec{n}=(a,b,c)$且过点(x_0,y_0,z_0)的平面方程为

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

例 2 求过点(1,2,1),(1,2,3),(-1,0,3)的平面方程.

分析 关键在于求出平面的法向量.

解 可得平面上的向量$\vec{a}=(0,0,2)$,$\vec{b}=(-2,-2,2)$.该平面的法向量垂直于平面上的所有向量,可得其中一个法向量为

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}=(4,-4,0).$$

所求平面方程为

$$4(x-1)-4(y-2)=0,$$

即 $x-y=-1$.

小结 可利用三阶行列式求得同时垂直于两个向量的向量.

例 3 求出曲面 $z=4-x^2-y^2$ 在点(1,1,2)处的切平面.

分析 需要求得曲面在某一点处的法向量.

解 构造函数 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z-4$,则

$$F_x=2x,F_y=2y,F_z=1.$$

曲面在点(1,1,2)处的法向量为

$$(F_x,F_y,F_z)\big|_{(1,1,2)}=(2x,2y,1)\big|_{(1,1,2)}=(2,2,1),$$

则切平面为

$$2(x-1)+2(y-1)+(z-2)=0,$$

即 $2x+2y+z=6$.

小结 曲面 $F(x,y,z)=0$ 的法向量为(F_x,F_y,F_z).

习题 7-3　空间直线与曲线

学院__________姓名__________学号__________日期__________

1.已知直线的方向向量$\vec{n}=(1,2,3)$且过点(1,0,-1),求直线方程.

2.已知直线的方向向量$\vec{n}=(1,0,-1)$且过点(1,2,1),求直线方程.

3.求垂直于平面 $x-y+3z=5$ 且过点(1,2,-1)的直线方程.

4.某一直线过两点(1,2,3),(3,2,1),求直线方程.

5.求直线 $L_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z+2}{1}$和 $L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{-1}$的夹角.

6.求直线 $L:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{-1}$与平面 $x-4y+z=5$ 的夹角.

7.求直线$\begin{cases}x+y-z=2\\2x-2y+z=1\end{cases}$ 的方向向量和参数方程.

8.求过点(1,2,3)且垂直于直线 $L:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{-1}$的平面方程.

9.求过点(-1,2,1)且过直线 $L:\frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-1}$的平面方程.

10.求点(1,2,3)到直线 $L:\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{-1}$的距离.

11.求曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\z^2=x^2+y^2\end{cases}$在 xOy 平面的投影曲线方程.

12.求曲线$\begin{cases}2x+y+z=4\\z^2=x^2+y^2\end{cases}$在 3 个坐标面的投影曲线方程.

重难点例题解析

例 1 已知直线平行于 $L:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$ 且过点 $(1,1,-1)$，求该直线方程.

分析 利用直线的标准方程 $L:\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$，其中，$(a,b,c)$ 为直线的方向向量，(x_0,y_0,z_0) 为直线上一点.

解 直线 L 的方向向量为 $(1,2,1)$，由两直线平行可知两直线的方向向量相等.

因此，所求直线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}.$$

小结 直线方程的求解关键在于求出直线的方向向量.

例 2 求直线 $\begin{cases}x+y-z=2\\2x-2y+z=1\end{cases}$ 的方向向量和参数方程.

分析 需找到直线的方向向量和直线上一点.

解 令 $x=0$，得 $\begin{cases}y-z=2\\-2y+z=1\end{cases}$，解得 $y=-3,z=-5$. 由此可得直线上一点 $(0,-3,-5)$.

直线的方向向量为

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\1 & 1 & -1\\2 & -2 & 1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}=(-1,-3,-4),$$

则可得所求直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=-t\\y=-3t-3.\\z=-4t-5\end{cases}$$

小结 由直线的平面方程得到该直线的方向向量，需注意到该直线同时垂直于两个平面的法向量.

例 3 求过点 $(1,2,3)$ 且过直线 $L:\frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{2}$ 的平面方程.

分析 求平面方程关键在于求出平面的法向量，可先求平面上的两个向量.

解 由直线 $L:\frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{2}$ 可得平面上一向量 $(3,1,2)$. 直线上的点 $(1,0,3)$ 必在平面上，点 $(1,2,3)$ 也在平面上，则可得另一向量为 $(0,2,0)$.

因此，所求平面的法向量为

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\3 & 1 & 2\\0 & 2 & 0\end{vmatrix}=-4\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{k}=(-4,0,6).$$

所求平面方程为

$$-4(x-1)+6(z-3)=0,$$

即 $2x-3z=-7$.

例 4 求曲线 $\begin{cases}x+2y+3z=6\\x^2+y^2+z^2=9\end{cases}$ 在 3 个坐标面的投影曲线方程.

分析 求曲线在坐标面 xOy 的投影在于联立方程去掉 z.

解 曲线在坐标面 xOy 的投影为

$$x^2+y^2+\left(\frac{6-x-2y}{3}\right)^2=9.$$

曲线在坐标面 xOz 的投影为

$$x^2+\left(\frac{6-x-3z}{2}\right)^2+z^2=9.$$

曲线在坐标面 yOz 的投影为

$$(6-2y-3z)^2+y^2+z^2=9.$$

小结 求投影在于联立方程消掉一个变量.

考研真题赏析

1.(2006 年数一)点(2,1,0)到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d=$__________.

解析 利用点(x_0,y_0,z_0)到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

题中,$d=\dfrac{|6+4+0|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\dfrac{10}{5\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

答案 $\sqrt{2}$.

2.(1996 年数一)设一平面过原点及点(6,-3,2),且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直,则此平面方程为__________.

解析 利用点法式得到空间平面方程:若点(x_0,y_0,z_0)在法向量为(A,B,C)的平面上,则平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

由题可知,所求平面的法向量$\vec{n}$与向量$\overrightarrow{OM_0}=(6,-3,2)$和平面 $4x-y+2z=8$ 的法向量(4,-1,2)都垂直.则

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -3 & 2\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=-4\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}.$$

所求平面方程为

$$-4x-4y+6z=0,$$

即 $2x+2y-3z=0$.

答案 $2x+2y-3z=0$.

3.(2014 年数一)曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点(1,0,1)处的切平面方程为__________.

解析 令 $F(x,y,z)=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)-z$,则

$$F_x=2x(1-\sin y)-y^2\cos x,F_y=-x^2\cos y+2y(1-\sin x),F_z=-1.$$

在点(1,0,1)处,则

$$F_x\Big|_{(1,0,1)}=2,F_y\Big|_{(1,0,1)}=-1,F_z\Big|_{(1,0,1)}=-1.$$

所求曲面在点(1,0,1)处的切平面方程为

$$2(x-1)-y-(z-1)=0,$$

即 $2x-y-z=1$.

答案 $2x-y-z=1$.

4.(2013 年数一)曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点(0,1,-1)处的切平面方程为( ).

A.$x-y+z=-2$　　B.$x+y+z=0$

C.$x-2y+z=-3$　　D.$x-y-z=0$

解析 令$F(x,y,z)=x^2+\cos(xy)+yz+x$,则

$$F_x=2x-y\sin(xy)+1,\ F_y=-x\sin(xy)+z,\ F_z=y.$$

在点(0,1,-1)处,则

$$F_x\Big|_{(0,1,-1)}=1,\ F_y\Big|_{(0,1,-1)}=-1,\ F_z\Big|_{(0,1,-1)}=1.$$

所求曲面在点(0,1,-1)处的切平面方程为

$$x-(y-1)+(z+1)=0,$$

即 $x-y+z=-2$.

答案 A.

第 8 章　多元函数微分学

习题 8-1　多元函数基本概念

学院__________姓名__________学号__________日期__________

1.求下列各函数表达式：

(1) $f(x,y)=x^2-y^2$,求 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)$；　　(2) $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$,求 $f(x,y)$.

2.已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$,试求 $f(tx,ty)$.

3.已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$,试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

4.证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^3-y^3}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$；　　(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

5.求下列极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}\right)$；　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}$；

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\tan(xy)}{y}$；　　(8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

6. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处是间断的?

7. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

重难点例题解析

例 1 讨论 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处的极限.

分析 此题型先判断极限存不存在.

解 (1) 当点 p 沿着 x 轴趋近于 $(0,0)$ 时,即 $y=0$ 时,则

$$f(x,y)=f(x,0)=0,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}}f(x,y)=0$.

同理

$$\lim_{\substack{x=0\\y\to0}}f(x,y)=0.$$

(2) 当点 p 沿着直线 $y=kx$ 趋近于 $(0,0)$ 时,这时有

$$f(x,y)=f(x,kx)=\frac{k^2}{1+k^2},$$

于是

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}f(x,y)=\frac{k^2}{1+k^2}.$$

当 k 取值不同时,极限值不同,故函数在点 $(0,0)$ 处的极限不存在.

小结 判断多元函数极限不存在的方法:找到两种不同路径,若其中一种的极限不存在,或两种路径极限存在但不相等,则极限不存在.

例 2 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\dfrac{\ln(x+y)}{\sqrt{x+y}-1}$.

分析 化为一元函数求极限.

解 当 $(x,y)\to(1,0)$ 时,$\ln(x+y)\sim(x+y)-1$,于是

$$\lim_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{\ln(x+y)}{\sqrt{x+y}-1}=\lim_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{(x+y)-1}{\sqrt{x+y}-1}=\lim_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{(\sqrt{x+y}-1)(\sqrt{x+y}+1)}{\sqrt{x+y}-1}=2.$$

小结 多元函数求极限问题,可利用初等多元函数的连续性,即若 $f(p)$ 是初等函数,p_0 在 $f(p)$ 的定义域中,则 $\lim\limits_{p\to p_0}f(p)=f(p_0)$;也可利用多元函数极限的四则运算;还可转化为一元函数的极限,利用一元函数的极限来计算.

例 3 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$,讨论 $f(x,y)$ 的连续性.

分析 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续的定义是 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$. 本题中 $f(x,y)$

是一个分段函数,因$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$是二元初等函数,在其定义域上连续,故只需要考虑$f(x,y)$在$(0,0)$点的连续性.

解 考虑极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$当点$(x,y)$沿着$y=kx$趋近于$(0,0)$点时,则

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-(kx)^2}{x^2+(kx)^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

这是一个与k有关的数值,从而当(x,y)沿着不同路径趋近于$(0,0)$点时,$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$趋于不同的值,故$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$不存在,则函数$f(x,y)$在点$(0,0)$不连续.

当$(x,y)\neq(0,0)$时,因$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$是二元初等函数,在其定义域上连续,故$f(x,y)$在$R^2-\{(0,0)\}$内处处连续.

小结 多元函数连续性问题,可根据多元函数连续定义和性质解决.

习题 8-2 偏导数及其在经济分析中的应用

学院__________姓名__________学号__________日期__________

1.求下列函数的偏导数:

(1)$z=\frac{3}{y^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\ln 5$;

(2)$z=\sqrt{\ln(xy)}$;

(3)$S=\frac{u+v}{u-v}$;

(4)$z=\ln\tan\frac{x}{y}$;

(5)$u=\sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+z$;

(6)$u=x^{\frac{y}{z}}$;

(7)$z=(1+xy)^y$;

(8)$f(\rho,\varphi,t)=\rho e^{t\varphi}+e^{-\varphi}+t$;

(9)$z=x^3y-y^3x$;

(10)$s=\frac{u^2+v^2}{uv}$;

(11) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$;　　(12) $u=\arctan(x-y)^z$.

2. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, 求 $f_x(x,1)$.

3. 设有 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$, 求 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$.

4. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$, 求 $f_{xx}(0,0,1)$, $f_{xz}(1,0,2)$, $f_{yz}(0,-1,0)$ 及 $f_{zzx}(2,0,1)$.

5. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 证明:

(1) $\left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial r}{\partial z}\right)^2=1$;　　(2) $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$.

6. 求下列函数的二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$:

(1) $z=x^{2y}$;　　(2) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$;

(3) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$;　　(4) $z=y^x$.

7. 设 $z=x\ln(xy)$, 求 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

8. 设 $z=2\cos^2\left(x-\dfrac{t}{2}\right)$, 证明: $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}=0$.