高等应用数学

（下册）（第三版）

主编◎陈华峰　袁　佳　魏思媛

西南交通大学出版社

高等应用数学

（下册）

内容简介

《高等应用数学》是认真分析、总结、吸收部分高等职业本、专科高校高等数学课程教学改革经验，本着“必需、够用、发展”的原则，以教育部高等职业教育教学课程的基本要求与课程改革精神及人才培养目标为依据编写而成。在取材上力求注重基础与完整，结合生活、专业课学习及运用；在讲述上深入浅出，从而达到既为学生专业功能服务，又加强了基本思维素质的训练的目的。

本书是此系列教材的下册，基础部分主要包括不定积分、定积分及其应用、微分方程、无穷级数等内容；提升部分包括二重积分等，拓展部分包括线性代数、概率论初步等。

本书特色主要体现在：① 采用模块化设计，保留并丰富了各章节知识点；② 根据高职学生学习特点，对概念的理解上着重还原本身；③ 每章要求学生总结知识框图、课后复习、思维训练实践，有利于学生对本章进行系统的学习和复习，并与自身生活、工作相结合，进行思维实践。

本书内容全面，语言简洁，例题和练习量大，细分了难易程度，可作为高等职业院校本、专科各专业数学类课程的通用教材，也可作为准备专升本的学生复习之用，也可供其他人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等应用数学. 下册 / 陈华峰，袁佳，魏思媛主编. —3 版. —成都：西南交通大学出版社，2023.1
ISBN 978-7-5643-9170-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… ②袁… ③魏… Ⅲ. ①应用数学 - 高等职业教育 - 教材 Ⅳ. ①O29

中国国家版本馆 CIP 数据核字（2023）第 009704 号

Gaodeng Yingyong Shuxue
(Xia Ce) (Di-san Ban)

高等应用数学（下册）
（第三版）

陈华峰
袁 佳 主编
魏思媛

责任编辑 赵永铭
封面设计 原谋书装

印张 20 字数 499千
成品尺寸 185 mm× 260 mm
版本 2015年7月第1版 2017年8月第2版
2023年1月第3版
印次 2023年1月第8次
印刷 四川煤田地质制图印务有限责任公司

出版发行 西南交通大学出版社
网址 http://www.xnjdcbs.com
地址 四川省成都市金牛区二环路北一段111号
西南交通大学创新大厦21楼
邮政编码 610031
发行部电话 028-87600564 028-87600533

书号：ISBN 978-7-5643-9170-6
定价：49.80元

课件咨询电话：028-87600533
图书如有印装质量问题 本社负责退换

第三版前言

不管是出于什么原因，当你打开了这本教材，并阅读这段文字，说明你与高等数学是有缘的. 如果你认真阅读并实践，必将收获颇丰. 为了庆祝这个缘分，下面就开始我们的高等数学之旅吧！

本书面向的对象是高等职业教育本、专科各专业及要专升本的同学们. 如果你正在准备学校期末考试，如果你正在准备普通专升本入学考试，如果你想重新温习高等数学，如果你想了解一下高等数学知识，那这本书就特别适合. 如果不是，请合上本书吧，以免浪费你宝贵的时间.

本书分为上、下两册，基础部分主要包括极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、无穷级数等内容; 提升部分包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、二重积分等内容，拓展部分包括离散数学实步、矩阵代数、概率论初步等内容.

曾几何时，当你问学过高数的学长、学姐们高数是什么？他们会告诉你，高数是一棵很高的“ 树” ，那上面“ 挂” 了很多人.

曾几何时，你坐在教室里上数学课，老师讲得昏天黑地，唾沫与粉尘齐飞，你却无动于衷，思绪早已飞到银河系的边缘，课后一头雾水，数学到底是啥玩意儿呀？

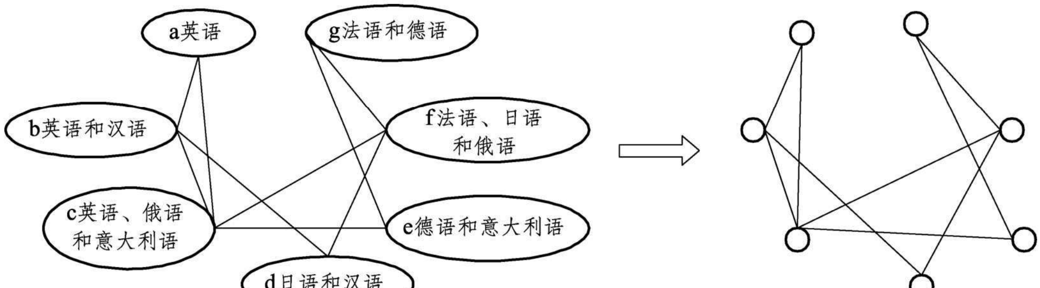
首先，让我们重新认识一下数学. 来看下面这个例子：

你有 7 个好朋友，有一天，你请他们 7 人到你家里聚餐，其中，a 会讲英语，b 会讲英语和汉语，c 会讲英语、意大利语和俄语，d 会讲日语和汉语，e 会讲德语和意大利语，f 会讲法语、日语和俄语，g 会讲法语和德语.

那么问题来了：你怎么安排座位，才能使得每个人都能和他身边的人交谈，免得大家尴尬呢？

我们思考的过程是这样的：

既然要使得每个人都能和他身边的人交谈，那么就要每个人与身边左、右两人分别同时会同一种语言. 我们把 7 个人看成 7 个点，画成一个圈，把具有会讲相同语言的人连上一条线，就得到如下这个图.

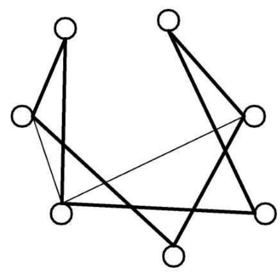


问题就变成：在图中任意一个点出发，每个点都串行一次，并回到原点的回路，按这样来安排座位，就可达到目的，使得每个人都能与身边的人交谈.

这是把实际问题数学化.

你能找到这样的回路吗？

你看，你是不是很容易就找到了这样的线路？如下图中加粗线路.



是不是比刚才的问题简单多了？

通常，数学家们把这种问题抽象化，不再管具体的问题，只针对这样的图探究如何去找这样的回路. 数学家们经过研究发现，只要任意两点的边数相加，大于等于点的数目，就一定会存在这样经过每个点一次的回路. 于是，抽象出来，把这种点线形成的关系称为图，每个点关联的边称作这个点的度，并加以纯数学的证明，作为一个定理. 这个问题最初是由哈密尔顿研究的，所以就以他的名字命名.

教材中是如下描述的，高度抽象化，早就剥离了具体问题.

设 $G=\langle V,E\rangle$ 为一图（无向的或有向的），G 中经过每个顶点一次且仅一次的通路称作哈密尔顿通路; G 中经过每个顶点一次且仅一次的回路称作哈密尔顿回路; 若 G 中存在哈密尔顿回路，则称 G 为哈密尔顿图.

推论：设 G 为 $n(n\geq 3)$阶无向简单图，若对于 G 中任意两个不相邻的顶点 u,v，均有

$$d(u)+d(v)\geqslant n$$

则 G 为哈密尔顿图.

然后，数学家为了更一般的形式，就利用符号、逻辑、证明、归纳那一套方法，得出很多结论. 那么，以后遇到类似的问题就直接利用定理判断了，就不用过多地思考，提高了解决问题的效率. 比如，你是一个快递员，今天的包裹要送到标小旗的地点，为了少走路，每个地方只去一次，你觉得应该怎么走呢？按刚才的方法，是不是很快就能判断？通过这个问题的过程，我们可以重新发现数学的作用了吧.

整个过程就是这样：解决现实问题，由抽象到一般，再应用到实际. 这就是数学.

你看，数学就是数学家们为了解决现实问题而发明出来的. 它首先研究的是现实，其次建立解决方案，再把这个解决方法进行一般化的符号抽象，然后研究其性质，最后把这个抽象的方法应用到实践中.

所以数学在本质上，就是一种思维方法、分析工具，是人类认识世界的一种手段、一种模式. 其思维方法，我们天天都在用，所以不要把它想得多么神秘.

而高等数学，也是把解决实际问题的方法抽象而来，进而用符号、图形、公式、定理等来表达其规则. 现在你心里对数学亲近了不少吧？因为它能给你带来不一样的思考方法和思维工具.

由此，你也可以总结出：学习的本质，就是学习这种能成功解决问题的思维方式、思考方法及实用工具. 高等数学是高度抽象化的符号、图形及一套演绎方式，它的实际应用更广泛.

当然，对绝大部分不研究、不使用教学的人来说，数学对他们的生活、工作、学习，表面上影响不大. 但学习高等数学的过程，可以训练我们分析问题、归纳问题、解决问题的思维方法，培养良好的思维能力，对加强我们的系统性、创新性、发散性、坚韧性的思维训练有非常大的帮助.

本书最大的与众不同之处在于：真正从关心读者成长与发展出发，充分展现思考问题的过程和解决问题的初衷，让大家了解面对问题，数学家们是怎么想的，然后，这种思考方法是怎么运用到实际生活、工作、学习当中的. 为此，编者专门在每章节后附一页，让你自己总结使用案例，不管是具体知识，还是思维方法; 不管是学习、工作，还是生活实践，都可以.

当然，我们还要学习具体的知识点. 那么怎么才能快速通关呢？

一是确定目标.

学习本课程，根据自身条件和目的不同，确定要达到怎么样的学习目标. 比如期末考试过关，专升本考上重点本科，重新复习，掌握高等数学的基础，等等.

二是核算成本.

在学习本课程上，你愿意付出的最大成本是多少？能够接受最大的失败是什么？显性成本包括资金、精力等，隐性成本包括时间、人际关系、思想观念等等.

三是要收集信息.

在学习本课程上，掌握了哪些信息和资源？比如教材、课件、练习题、可咨询的老师、要不要报培训班、上不上网课，等等. 哪些有利，哪些不利？信息准确度如何？真实性如何？时效性如何？信息来源的保密性如何？大家都知道还是少数人知道？

四是要借鉴参考.

能不能找到学长、学姐，看他们是如何学习、复习的？现在其他同学是如何学习、复习的？效果如何？哪些方法可以直接拿来用，哪些可以改进创新用？能不能找到专业人士进行专业咨询？比如，值得信赖的老师、同学、长辈，等等. 如果有，如何得到别人真正且正确的参考意见？付费咨询，还是人情免费咨询，还是资源交换获得支持？

五是概念的理解.

高等数学的概念，都来源于实际生活. 在学习过程中，一定要注重概念理解，把抽象的概念尽量形象化，和自己头脑里的已有的有形意识结合起来，纳入自己的知识架构中. 这样才能更好地去认识数学知识、数学思维及数学方法. 如果还有时间，可以阅读相关知识点的一些数学历史方面的书籍，了解当年数学家们是怎么想到这个方法的，这些方法的创立过程经历了怎么样的复杂历史.

六是充分利用考纲.

把期末考试或专升本的考纲每一条都列出来，形成一张表，左边是考纲要求，右边列出相应的知识点、公式、定理、证明、常考题型等，来考察自己掌握的情况. 大量练习必不可少，你要相信，世界上 80%的能力，通过训练都是可以达到的.

一个知识点，一个公式，掌握的标准有三条：一是快，指做这个考点的题型以最快的速度做完. 二是准，凡是做完的题目，都要 100%得满分. 如果不能，也不要慌，先看解析. 如果还有问题，可以问同学、老师，或者上网查资料. 也可以加入 QQ 群：308212576，在群里提问. 反复研究，反复做，一直到能得满分为止. 三是举一反三，学会知识迁移.

说一千，道一万，只要下决心学习，厘清本源，细看书，理解概念与思维，合理建立直观印象，从书到题勤练习，从题到书多运用，快思考，常讨论，就能学好高等数学.

学习高等数学，就像谈恋爱，要多花时间陪伴，同甘共苦，就能修成正果.

祝大家都能修成正果！

最后，特别感谢西南交通大学出版社的大力支持，使得本书第三版得以顺利出版. 本次做了较大的修订，使本书更符合新时代高等职业教育的特征.

由于作者水平有限，加之完成时间仓促，书中难免有不妥或疏漏之处，恳请广大读者批评指正.

陈华峰

2022 年 6 月

第二版前言

高等应用数学是一门高职高专院校各专业公共基础必修课程，它对培养学生的思维能力有着重要的作用. 本书第二版是根据教育部制定的《各专业教学标准和人才培养目标及规格》对高等应用数学课程教学基本要求，考虑到高职高专学生的特点和各专业需要，在第一版的基础上修订而成. 本次修订充分吸取了教师和学生对第一版教材的建议，在保留第一版特色的同时对部分内容进行了增删，使之更能适应高职高专的教学实际和学生学习的特征.

编　者

2017 年 6 月

第一版前言

时代在发展，社会在进步，人们对人才的要求越来越高. 对于高职学生来讲，只掌握专业知识已不能适应社会和企业的要求，还必须具备较强的适应能力、应变能力、学习能力、创新能力等，这样才能在日益激烈的竞争中有所成就，才能为祖国做出应有的贡献. 而这些能力的基础就是既要有丰富的专业基础知识，又要有良好的思维品质. 高等应用数学的学习就最能体现这两方面.

高等应用数学是高职高专院校各专业一门公共基础必修课程，它对于培养学生的思维能力有着重要的作用. 通过高等应用数学的学习，学生不但可以掌握处理数学问题的描述工具和方法，为后续课程的学习创造条件，而且可以提高抽象思维和逻辑推理能力，提高观察事物现象、分析问题本质、解决问题的能力，养成良好的意志力以及逻辑性、新颖性等思维习惯，并为以后的学习、工作和生活打下坚实的基础.

因此，本教材在具体编写过程中，力求既介绍高等应用数学基础知识的核心内容，做到简明扼要、通俗易懂，又注重理论联系实际，融入启发式思维训练，着重培养学生良好的思维品质，加强学生系统性、创新性、发散性、坚韧性的思维训练. 本教材是编者在结合多年高等应用数学教学经验的基础上，根据高职高专学生的学习规律与特点，参考国内众多教材的优点并借鉴国外相关教材的特点编写而成的. 本书的主要特点如下：

（1）内容选择科学.

本教材的整个体系保持了高等应用数学具有代表性的核心内容，坚持少而精、释义清楚、学以致用的原则，内容安排上由浅入深，符合认知规律，理论严谨、叙述明确简练、逻辑性强，知识点脉络清晰. 第 1 ~ 5 章为各专业的基础必修模块，第 6 ~ 10 章为各专业的选修模块，可根据实际情况选修其中的一章或几章.

（2）结构安排先进.

教材大部分例题都融入启发式思维训练，重点突出解题思路，注重培养学生的数学思维能力和分析问题、解决问题的能力. 每一节练习题都分为基础、提高、拓展三个阶段，符合高职学生对数学学习的认知过程，而且将基础理论与相关实际问题相结合，变抽象思维为形象思维，提高学生的思考能力，培养学生优秀的思维品质.

（3）系统组织实用.

每章都列出了知识框图，以便学生及时掌握知识点和知识结构. 并配以大量习题和思考题，每章结束均配有自测题，可供学生检测自己学习的情况.

本书内容和结构体现了我校近年来教学改革的成果. 全书分为上、下两册，共 10 章. 其中第 1、2 章由袁佳编写，第 3、7、10 章由瞿先平（重庆理工大学研究生）编写，第 4、5、6 章由万轩编写，第 8、9 章由陈华峰编写; 每章节的应用题例部分由范正权和朱志富编写; 全书由陈华峰统稿.

最后，特别感谢李连启教授为审阅本书所付出的辛勤劳动. 感谢西南交通大学出版社的大力支持，使本书得以顺利出版.

由于编者水平有限，加之完成时间仓促，书中难免有不妥或错误之处，恳请广大读者批评指正.

编　者

2015 年 1 月

目　录

基础模块

提升模块

拓展模块

基础模块

9　不定积分

正如加法有其逆运算减法，乘法有其逆运算除法，微分法同样有它的逆运算——积分法．在前面已经介绍已知函数求导数或微分的问题，那么与之相反的问题是：已知导函数求其函数，即求一个未知函数，使其导函数恰好是某一已知函数．这种由导数或微分求原来函数的逆运算就叫作求原函数，也就是求不定积分．本章将介绍不定积分的概念及其计算方法．

【学习能力目标】

（1）理解原函数的概念.

（2）掌握不定积分的概念及性质．

（3）熟练掌握不定积分的基本公式及运算法则．

（4）灵活运用直接积分法求不定积分．

（5）熟练掌握不定积分的换元积分法．

（6）熟练掌握不定积分的分部积分法．

9.1　不定积分的概念和性质

9.1.1　原函数

在解决实际问题时，我们会经常会遇到已知一个函数的导数，要求这个函数的问题．例如，在经济学中，边际成本函数是总成本函数的导数，现在已知边际成本函数 $y = f(x)$，反过来求总成本函数 $F(x)$．这就涉及到了微分学中求导数或求微分的相反问题，即已知函数的导数或微分，反过来求原来这个函数．

定义 9.1.1　如果在区间 D 内，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$，即对任意 $x \in D$，均有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x ,$$

则称函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 D 上的原函数（简称为 $f(x)$ 的原函数）.

比如，由 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ 可知，$\ln x$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数．又如，由 $(x^3)' = 3x^2$ 可知，x^3 是 $3x^2$ 的一个原函数．

定理 9.1.1（原函数存在定理）　如果函数 $f(x)$ 在区间 D 上连续，那么函数 $f(x)$ 在该区间上的原函数一定存在，即在区间 D 上存在可导函数 $F(x)$，使对任意 $x \in D$，都有 $F'(x) = f(x)$．

简单言之：连续函数一定有原函数．例如，一切初等函数在其定义区间上都连续，从而都有原函数．

思考：（1）如果函数存在一个原函数，那这个函数的原函数是否唯一？

（2）如果不唯一，那这些原函数之间有什么联系？

由 $(x^2)'=2x$、$(x^2+2)'=2x$、$(x^2+C)'=2x$ 可知，x^2, x^2+2, x^2+C 都是 $2x$ 的原函数（C 为任意实数）. 可以看出，如果函数有一个原函数，那么它函数就有无数多个原函数，并且，这些原函数之间只相差一个常数 .

定理 9.1.2（原函数族定理）　如果函数 $f(x)$ 有一个原函数，那么它就有无限多个原函数，而且这些原函数之间仅相差一个常数 .

一般地，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，那么 $f(x)$ 的所有原函数（称为原函数族）就是 $F(x)+C$（其中 C 为任意常数）.

若 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，则 $F(x)-G(x)=C_0$（其中 C_0 为某个常数），这表明 $f(x)$ 的任意两个原函数只差一个常数 .

9. 1. 2　不定积分的概念

定义 9.1.2　如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，那么 $f(x)$ 的所有原函数 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$ 的不定积分，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$$

其中，$\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量，任意常数 C 称为积分常数 .

由不定积分的定义可知，求函数 $f(x)$ 的不定积分，只需求出 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$ 再加上积分常数 C 即可 .

例如：

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C\ ; \qquad \int 3x^2\mathrm{d}x = x^3 + C\ .$$

例 9.1.1　计算下列不定积分

（1）$\int x^3\mathrm{d}x$；（2）$\int \cos 3x\mathrm{d}x$；（3）$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$；（4）$\int x^\alpha\mathrm{d}x(\alpha\neq -1)$；（5）$\int a^x\mathrm{d}x(a\neq 1, a>0)$.

解：（1）因为对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $\left(\frac{1}{4}x^4\right)'=x^3$，则 $\frac{1}{4}x^4$ 是 x^3 的一个原函数，故

$$\int x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + C\ .$$

（2）因为对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right)'=\cos 3x$，则 $\frac{1}{3}\sin 3x$ 是 $\cos 3x$ 的一个原函数，故

$$\int \cos 3x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin 3x + C\ .$$

（3）当 $x>0$ 时，由 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$，所以 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C$；

当 $x<0$ 时，由 $(\ln(-x))'=\frac{1}{x}$，所以 $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(-x)+C$.

综合这两种情形，故

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C\ .$$

（4）因为 $(x^{\alpha+1})'=(\alpha+1)x^{\alpha}$，所以 $\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)'=x^{\alpha}$，故

$$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C.$$

（5）因 $(a^x)'=a^x\ln a, \left(\frac{a^x}{\ln a}\right)'=a^x$，故

$$\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C.$$

9.1.3　不定积分的几何意义

在几何上，我们通常把函数 $f(x)$ 的一个原函数 $y=F(x)$ 的图形称为函数 $f(x)$ 的积分曲线，而函数 $f(x)$ 的不定积分为 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 在几何上是表示一族曲线，称为积分曲线族．这一积分曲线族具有以下两个特点：其一是每一条积分曲线上横坐标相同的点处的切线彼此平行，斜率都等于 $f(x)$；其二是积分曲线族中任意两条积分曲线仅相差一个常数，如图 9.1.1 所示.

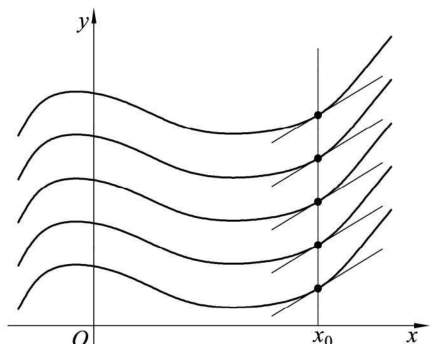


图 9.1.1　积分曲线族

故函数 $f(x)$ 的不定积分为 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义是 $f(x)$ 的积分曲线族，其表达式为

$$y=F(x)+C\quad（C\ 为任意常数）.$$

例 9.1.2　设已知曲线通过点 $(0,3)$，且其上任一点处的切线斜率为 e^x，求此曲线的方程．

解：设所求曲线方程为 $y=F(x)$，由导数的几何意义知 $F'(x)=\mathrm{e}^x$，由不定积分的定义可得

$$\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$$