“互联网+”高等职业院校创新型精品教材

应用高等数学

YINGYONG GAODENG SHUXUE

主编 ◎ 李发学 康军凤

中国言实出版社

应用高等数学

YINGYONG GAODENG SHUXUE

图书在版编目（CIP）数据

应用高等数学 / 李发学，康军凤主编．— 北京 ：
中国言实出版社，2020. 6
ISBN 978-7-5171-3481-7

Ⅰ. ①应…　Ⅱ. ①李…　②康…　Ⅲ. ①高等数学—应
用数学—高等职业教育—教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2020）第 097367 号

责任编辑　崔文婷
责任校对　史会美

出版发行　中国言实出版社
地　址：北京市朝阳区北苑路 180 号加利大厦 5 号楼 105 室
邮　编：100101
编辑部：北京市海淀区北大平庄路甲 1 号
邮　编：100088
电　话：64924853（总编室）　64924716（发行部）
网　址：www.zgyscbs.cn
E-mail：zgyscbs@263.net
经　　销　新华书店
印　　刷　湖南旭诚印务有限公司
版　　次　2020 年 6 月第 1 版　2020 年 6 月第 1 次印刷
规　　格　787 毫米×1029 毫米　1/16　16.5 印张
字　　数　346 千字
定　　价　46.00 元　　ISBN 978-7-5171-3481-7

前　言

近些年来教育部曾经先后多次召开了全国高等职业教育产学研结合经验交流会，明确了高等职业教育的主要任务是培养高等技能型人才。本教材是在教育部推动教育教学改革的大环境下，根据《高职高专教育专业人才培养目标及规格》及当前高等学校理工类、经管类专业学生的人才培养方案，为适应国家的教育教学改革培养高等技能型人才专科层次的教学要求，立足高职高专特色，本着重能力、重应用、求创新的总体思路编写修订的。本教材是高职高专院校各专业类别通用教材，可作为专科院校、职业成人教育学院教材或教学参考书。

本次教材编写是在遵循“面向专业需求，应用为目的，坚持改革”的要求进行的，本教材在保证知识的系统性、严谨性和科学性的基础上，具有以下特点：

(1) 内容安排上充分考虑到高职高专院校教学特点，在保证知识的科学性、系统性前提下，坚持直观理解与严密性的结合，淡化高难度的理论推导和证明，强化法则、性质和公式的应用，强调实用性、应用性的特点。如函数的连续性、微分等问题在书中只是一笔带过，对导数与积分的应用则加大了篇幅等。

(2) 根据面向学生的特点，适当选材，由浅入深，循序渐进。根据数学的认知规律和教学规律，把我们的教学特点和思想融合到教材中去，除传授给学生数学知识外，还传授一种新的、易懂的学习方法和数学思想，尽量使教材简明实用，有助于学生对数学基础知识的理解和数学思想方法的掌握，进而培养和提高学生的实际应用能力，便于学生自学。

(3) 结合各位编者多年的教学经验，对书中重点内容、方法以及解题技巧进行了归纳，既方便了教师教学，又有利于学生掌握重点。

(4) 每节配备的作业量适中，作业题的选择针对性强，突出了本书能力要求的重点。

(5) 在章节上，结合先进的教学模式，采用微课进行难点讲解或相关知识的拓展，便于学生对专业知识的理解和吸收，增加学习兴趣。

(6) 内容上突出实用性和专业需求性。本书涵盖了高等专科院校电子计算机类、经济管理类及相关专业必要的数学基础，力求使学生系统地获得微积分、线性代数、概率论与数理统计的基础知识、必要的基础理论知识和常用的运算方法。各专业可根据专业培养目标的要求，选学相应的教学章节。如电信、电子、计算机类专业，除学

习一元函数微积分部分可选学线性代数初步、概率论初步、数理统计初步等知识；经济管理类除学习一元函数微积分部分可选学概率论初步、数理统计初步等知识。

由于时间所限，书中不足之处在所难免，欢迎各专家与广大师生提出批评与指正。

编　者

2020 年 4 月

目　　录

第 1 章　函　数

函数概念的
历史发展

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等函数的研究对象则是变动的量. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系. 本章节将介绍特殊的集合区间与邻域函数的概念、函数的特性、反函数、基本初等函数、初等函数、复合函数等基本概念及性质.

§1.1　函数的概念及其特性

函数的概念
及其特性

1.1.1　函数的概念

1. 常量与变量

在自然现象或科学实验等过程中，通常会遇到两种不同的量：一种量在某一变化过程中始终保持不变，这种量叫常量；另一种量在某一变化过程中可以取不同的值，这种量叫变量. 通常用字母 a、b、c 等表示常量，用字母 x、y、z、t 等表示变量.

值得注意的是常量和变量并不是绝对的，例如就小范围地区来说，重力加速度可以看作常量，但就广大地区来说，重力加速度则是变量. 所以在不同的变化过程中常量和变量可以相互转化.

2. 区间

称集合 $\{x: a \leqslant x \leqslant b, a < b\}$ 的所有点为闭区间 $[a,b]$.

称集合 $\{x: a < x < b, a < b\}$ 的所有点为开区间 (a,b).

称集合 $\{x: a \leqslant x < b, a < b\}$ 的所有点为半开半闭区间 $[a,b)$.

称集合 $\{x: a < x \leqslant b, a < b\}$ 的所有点为半开半闭区间 $(a,b]$.

以上四个区间统称为有限区间，$b-a$ 叫区间长度.

把下面五个区间称为无限区间：

$(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数；

$(-\infty, b)$ 表示集合 $\{x: -\infty < x < b\}$；

$(-\infty, b]$ 表示集合 $\{x: -\infty < x \leqslant b\}$；

$(a, +\infty)$ 表示集合 $\{x: a < x < +\infty\}$；

$[a, +\infty)$ 表示集合 $\{x: a \leqslant x < +\infty\}$.

3. 邻域

称点集$\{x: a-\delta < x < a+\delta\}$为$a$的$\delta$邻域(其中$a$为常数,$\delta > 0$),记为:$U(a,\delta)$,$a$称为邻域中心,$\delta$称为邻域半径;

称点集$\{x: a-\delta < x < a$与$a < x < a+\delta\}$为a的δ空心邻域(其中a为常数,$\delta > 0$),记为:$\mathring{U}(a,\delta)$.

邻域这个概念在本课程后面的学习中将经常用到.

4. 函数的概念

人们在观察、研究某一现象或某一运动过程中,会遇到许多量,这些量的变化不是孤立的,而是相互间存在着某种对应关系.我们先来看以下例子.

引例 1 在货轮的船头下部漆着一列数字,这些数字指明吃水的深度,下表给出了某货轮在不同吃水深度时的排水量.

吃水深度 h(米)	3	4	5	6	7	8	9
排(淡)水量 ω(吨)	5020	7225	9275	11 475	13 750	16 125	18 525

上表反映了变量ω与变量h的对应关系,对于表中给出的吃水深度h,就有一个确定的排水量ω与之对应.例如,当$h=4$米时,$\omega=7225$吨.

引例 2 由波义耳定律知道,当温度保持不变时,一定质量的气体的压强p与体积V成反比,即$p=\dfrac{C}{V}$,C为常数,$V_0 \leqslant V \leqslant V_1$.

上式表达了压强p与体积V的对应关系,即质量一定的气体,当它的体积V在范围$V_0 \leqslant V \leqslant V_1$内取定一个值时,就有一个确定的压强$p$的值与之对应.

由以上例子可见,虽然这些问题的具体意义不一样,但从数量关系角度来看,它们却有着本质的联系,即在变化过程中的两个变量之间存在着某种对应关系,当一个变量取定某一值时,另一变量就有确定的值与之对应.由此可引入函数的定义:

定义 1.1.1 设有两个量x、y,D是一个给定的非空集合,如果存在一个对应的法则f,使得对于每一个$x \in D$,都有唯一确定的值量y与之对应,则称y是x的函数,记为:$y=f(x)$,$x \in D$,其中x称为自变量,y称为因变量,集合D称为函数$f(x)$的定义域,记为:D_f.

x取$x_{\mathrm{p}} \in D_f$时,与x_{p}对应的y的值称为函数$y=f(x)$在x_{p}处的函数值,记作$f(x_{\mathrm{p}})$或$y|_{x=x_{\mathrm{p}}}$,函数值组成的集合称为函数的值域,记为R_f.

1) 函数的两要素

函数由它的定义域和对应法则唯一确定,即函数的两要素为定义域和对应法则.这是我们判定两个函数是否为同一函数的依据.

例 1 判定下列各组函数是否为同一函数.

(1) $y=\lg x^2$,$y=2\lg x$;

(2) $y=\lg x^3$,$y=3\lg x$.

解:(1) 不是同一函数.

因为前者的定义域为 $D=\{x\mid x\neq 0\}$，后者的定义域是 $D=\{x\mid x>0\}$.

(2) 是同一函数.

因为定义域和对应法则均相同.

函数的定义域是指使函数有意义的点的集合. 对于一个解析函数，它的定义域一般指其自然定义域，求解时应注意下面几个问题：

① 分母不能为 0；

② 负数不能开偶次方；

③ 零和负数没有对数，即对数的真数大于 0；

④ 反正弦、反余弦函数的定义域为$[-1,1]$；

⑤ 代数和的情况下取各式定义域的交集；

⑥ 实际问题的定义域依具体问题的意义而定.

2) 函数的表示法

表示函数的主要方法有三种：解析法、图形法和表格法，在高等数学里应用最为广泛的是解析法.

3) 分段函数

在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数称为分段函数.

注意：分段函数是一个函数.

如符号函数：$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$

它是定义在$(-\infty,+\infty)$的一个分段函数(图 1-1)

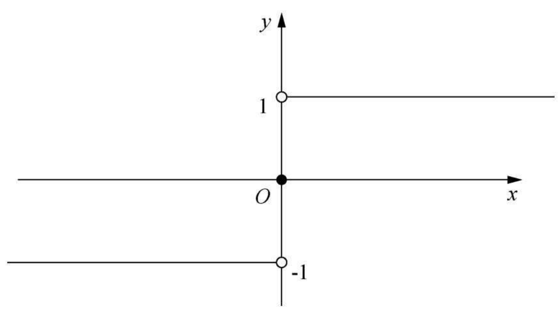

图 1-1　分段函数

又如狄里克莱函数：$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}\\ 0, & x\in\mathbf{Q}^c\end{cases}$

也是一个定义在$(-\infty,+\infty)$上的分段函数(这个函数在高等数学里具有特殊的地位，有着很多的特殊性质).

对于分段函数我们应当注意下面几个问题.

① 分段函数的定义域是各部分的并集.

② 分段函数的求值应先判定 x 的所属范围，然后带入相应的表达式来求.

③ 分段函数的作图：由于分段函数是一个函数，所以图形必须在同一坐标系中.

1.1.2 函数的特性

1. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称，如果对任意的 $x\in D_f$，恒有 $f(-x)=-f(x)$（或 $f(-x)=f(x)$），则称 $f(x)$ 为奇（或偶）函数.

特别要注意：D_f 关于原点对称是奇偶函数的必要条件. 如 $y=x^2$ 是偶函数，但 $y=x^2, x\in(0,+\infty)$ 就是非奇非偶函数.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

2. 函数的周期性

设函数的定义域为 D_f，如果存在一个常数 $T\neq 0$，使得对任意的 $x\in D_f$，有 $x\pm T\in D_f$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们所说的周期是最小正周期.

例如：$y=\sin x, y=\cos x$ 的周期为 2π；

$y=\tan x, y=\cot x$ 的周期为 π.

关于周期函数我们有如下定理：

定理 若 $f(x)$ 的周期为 T，则 $f(wx+\varphi)$ 一定是周期函数（其中 w,φ 为常数）且周期为 $\dfrac{T}{|w|}$.

值得注意的是：并不是所有的周期函数都有最小正周期，如狄里克莱函数，显然任何一个有理数都是它的周期，没有最小正有理数，没有最小正周期.

3. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于区间 I 内的任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$（$f(x_1)>f(x_2)$）则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的（单调减少的）. 单调增加（减少）的函数又称单调递增（递减）函数，统称为单调函数.

例如：函数 $y=x^2$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上单调增加的，在 $(-\infty,0]$ 单调减少的，而在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数，可以看出函数的单调性与它所在的区间密切相关.

单调增加函数的图像是随着自变量的增加而上升；

单调减少函数的图像是随着自变量的增加而下降.

4. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在正常数 M，使得对于区间 I 内的所有的 x 恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界，如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

例如 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为 $|\sin x|\leqslant 1$；

又如：$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，但它在 $(1,2)$ 内有界.

由此可见，函数的有界性与它所讨论的区间密切相关.

小结：函数的奇偶性和周期性是整个定义域中的性质；函数的单调性和有界性则是在某个区间上的性质.

习题 1.1

1. 判定下列各组函数是否为同一函数，并说明理由

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}, g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$；

(2) $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$；

(3) $f(x)=|x|, g(x)=\sqrt{x^2}$；

(4) $f(x)=1, g(x)=\tan x\cot x$.

2. 填空

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是奇函数，则 a,b 的关系为________；

(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 的定义域为________.

3. 求下列函数的定义域

(1) $y=\sqrt{25-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$；

(2) $y=\ln(2-x)+\sqrt{x+2}$；

(3) $y=\arccos\dfrac{x+1}{3}$.

4. 判定下列函数的奇偶性

(1) $y=\dfrac{x\sin x}{x^2+1}$；

(2) $y=\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}$；

(3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(4) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x>0,\\ e^x, & -1<x\leqslant 0,\\ 3-x, & x\leqslant -1.\end{cases}$

求：(1) $f(x)$ 的定义域；

(2) $f(0), f(1), f(-1), f(-2)$.

§1.2 初等函数

初等函数

1.2.1 反函数

在中学物理中学过自由落体运动下落高度的公式 $h=\frac{1}{2}gt^2,(t\geqslant 0)$，已知 t 值就可以求出它下落高度，有时我们会求相反的问题，已知下落高度，求所需时间. 这时只需对公式变形为 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$，问题就解决了. 在数学上引入了反函数的概念.

定义 1.2.1 设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上一个函数，其值域为 R_f，如果对每一个 $y\in R_f$，都有确定的 $x\in D$ 且满足 $y=f(x)$ 的数值与之对应. 其对应法则记为：$f^{-1}(x)$，则定义在 R_f 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数.

注意：(1) 反函数存在条件(充分条件)：一一对应函数，反函数一定存在.
(2) 如何求反函数.
① 判定是否为一一对应函数；
② 求 x；
③ 交换 x、y.
(3) 特点：$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1 求下列函数的反函数(不求定义域).

(1) $y=1+\lg(x+2)$；

解：$\lg(x+2)=y-1 \qquad x+2=10^{y-1}$

所以 $x=10^{y-1}-2$ 即 $y=10^{x-1}-2$.

(2) $y=\arcsin\frac{x-1}{4}$.

解：$\sin y=\frac{x-1}{4}$

所以 $x=4\sin y+1$ 即 $y=4\sin x+1$.

1.2.2 基本初等函数

(1) 常量函数 $y=C$.

(2) 幂函数 $y=x^u$(u 为实数)，它的定义域随着 u 的不同而变化.

(3) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$，它的性质与 a 的取值有关，例如当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 是单调增加的，而当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 是单调减少的.

(4) 对数函数 $y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$，它的性质与 a 的取值有关，因为对数函数与指数函数互为反函数.

(5) 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}, y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

(6) 反三角函数

①$y=\arcsin x, x\in[-1,1], y\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$;

②$y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$;

③$y=\arctan x, x\in[-\infty,+\infty], y\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$

它的图像如图 1-2 所示；

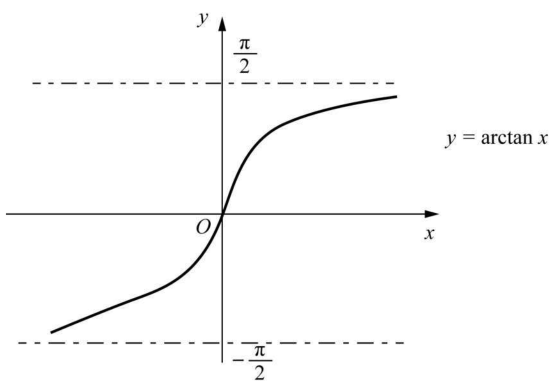

图 1-2　反三角函数的图像

④$y=\operatorname{arccot} x, x\in[-\infty,+\infty], y\in[0,\pi]$.

以上六类函数统称为基本初等函数.

1.2.3　复合函数

定义 1.2.2：设 y 是 u 的函数，$y=f(u), u\in D$，u 又是 x 的函数，$u=\varphi(x), x\in Z_{\varphi}$，如果 $D\cap Z_{\varphi}\neq\varphi$，则 y 通过 u 也成为 x 的函数，称为由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为中间变量.

从上述定义可以看出，并不是任意几个函数都能复合成一个函数，复合的条件为：$D\cap Z_{\varphi}\neq\varphi$.

如 $y=\arcsin u, u=3+x^2$ 就不能复合成一个函数.

例 2　问函数 $y=e^{x^2}$ 是由哪些较简单的函数复合而成的？

解：是由 $y=e^u, u=x^2$ 复合而成.

把一个较复杂的函数分解成 n 个较简单的函数，这在今后的许多运算中经常用到，那么怎样将复合函数进行分解呢？

例 3　$y=\ln\cos\sqrt{x}$.

解：

$$\text{复合过程}\downarrow\quad \begin{aligned} v &= \sqrt{x} \\ u &= \cos v \\ y &= \ln u \end{aligned} \quad\uparrow\text{计算过程}$$

由此可知，复合过程与计算过程正好相反.

1.2.4 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合步骤所构成，并且可用一个解析式表示的函数称为初等函数.

例如：$y=\sqrt{1-\cos x}$，$y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ 等都是初等函数.

但分段函数一般不是初等函数.

下面简单介绍一下工程技术中常用的一组函数.

(1) 双曲正弦　$\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

(2) 双曲余弦　$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

(3) 双曲正切　$\tanh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$；

(4) 双曲余切　$\coth x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

容易证明它们有下面一些恒等式

(1) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$；

(2) $\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$；

(3) $\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y$；

(4) $\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x$；

(5) $\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$.

习题 1.2

1. 求下列函数的反函数

(1) $y=\ln(x+1)$；　　(2) $y=e^x+1$；

(3) $y=1-\ln(x+2)$；　　(4) $y=10^{2x+1}$.

2. 指出下列函数的复合过程

(1) $y=\cos^2(2x+1)$；　　(2) $y=\sqrt{\cot^3(e^x+1)}$；

(3) $y=\arctan(1-x^3)$；　　(4) $y=e^{\sin x^2}$.

3. 已知 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$,求 $f(x-\frac{1}{4})+f(x+\frac{1}{4})$ 的定义域.

4. 设 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$,求 $f(x)$,$f(x-\frac{1}{x})$.

函数关系式的建立

§1.3　函数关系式的建立

在解决工程技术与经济变量的实际问题时,往往需要先把问题中的变量之间的函数关系用解析式表示出来,然后用数学方法进行分析研究.下面举例说明在实际问题中寻找函数关系的基本方法.

例 1　生产一种产品所需的全部费用称为总成本,常用 C 表示.通常总成本可分为固定成本和可变成本两部分.固定成本是一个常数,常用 C_1 表示;可变成本是产品数量 Q 的函数,常用 C_2 表示,即 $C_2=C_2(Q)$.因此,生产某商品 Q 个单位时的总成本 C 等于固定成本 C_1 与可变成本 C_2 之和,即 $C=C(Q)=C_1+C_2(Q)$.生产一定数量的产品的总收入与总成本之差就是它的总利润,记作 L,即 $L=L(Q)=R(Q)-C(Q)$,其中 Q 是产品的数量.总利润是产品数量的函数,称为利润函数.设某工厂生产某产品每吨售价 2 万元,每天生产 Q 吨的总成本为 C(万元),且 $C=Q^2-4Q+5$.求每天生产 2、5、7 吨时的总利润.

解:由题意,收入函数为 $R=2Q$,成本函数为 $C=Q^2-4Q+5$,所以总利润函数为

$$L=R(Q)-C(Q)=2Q-(Q^2-4Q+5)=-Q^2+6Q-5$$

当 $Q=2$ 时,总利润为 $L(2)=-Q^2+6Q-5\big|_{Q=2}=3$(万元).

当 $Q=5$ 时,总利润为 $L(5)=-Q^2+6Q-5\big|_{Q=5}=0$(万元).

当 $Q=7$ 时,总利润为 $L(7)=-Q^2+6Q-5\big|_{Q=7}=-12$(万元).

从上例可以看到,利润函数出现了三种情况:

(1)$L(2)=3>0$,利润为正值,生产处于盈余状态;

(2)$L(7)=-12<0$,利润为负值,生产处于亏损状态;

(3)$L(5)=0$,利润为零,生产处于无盈亏状态.我们把无盈亏生产时的产量 Q_0 称为无盈亏点(或保本点).

无盈亏分析常用于企业管理和经济学中分析各种定价和生产决策.

例 2　已知一个单三角脉冲电压,其波形如图 1-3 所示.求电压 u 与时间 t 的函数关系式.

解:由图看出,u 随 t 变化的规律在各段时间 $(0\leqslant t<\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\leqslant t<\tau)$ 内是各不相同的,所以需

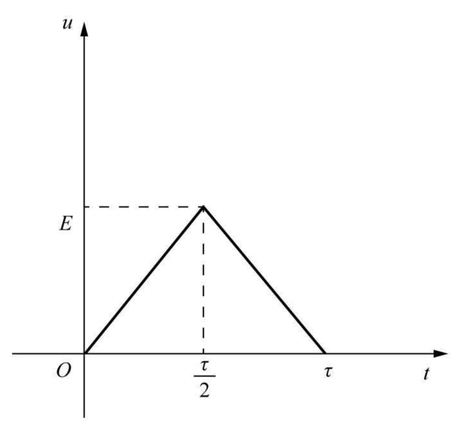

图 1-3　单三角脉冲电压波形