【张宇数学教育系列丛书·七】

2022【云图4套卷系列】

张宇考研数学 最后4套卷

【数学二】

高分版

主编◎张宇

试题科目：______

科目代码：______

考生编号：______

报考单位：______

- 一线名师精心命制
- 模拟重现核心考点
- 解析详尽清晰透彻
- 另附4套答题卡

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学最后4套卷. 数学二 ：高分版 / 张宇主编. —北京：北京理工大学出版社，2021.10

ISBN 978-7-5763-0507-4

Ⅰ.①张…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2021)第206122号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68944723(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 蠡县天德印务有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 3.5
字　　数 / 87千字
版　　次 / 2021年10月第1版　2021年10月第1次印刷
定　　价 / 24.80元

责任编辑 / 王玲玲
文案编辑 / 王玲玲
责任校对 / 刘亚男
责任印制 / 李志强

写给奋斗到最后时刻的你

你好！首先对你考研一路走来的艰辛表示敬意和慰问。

2021年12月26日上午8:30，你将进入考场，在这里，我向你提出如下几点，请切记：

一，天气渐冷，望保重身体，切莫过度冷暖交替，切莫过度熬夜了，尽量保护好自己不要生病。每天都要吃足量的主食，一定要多喝热水。

二，全力以赴把精力放在复习知识本身，不要胡思乱想。在最后阶段，每个人都会有紧张情绪，这很正常，适度的紧张是有利于考试的，但是不必紧张过度，今后你的人生中还有更多的挑战和精彩，一个考研没什么大不了。

三，最后阶段的数学，仍然要坚持每天做题，但

不一定是新题，而是你复习过程中积累下来的错题、不会的题与好题，重点在于：(1)关键思路总结；(2)公式结论记忆；(3)培养"做题的感觉与状态"。

四、考前一定要准备好必备用品和资料（包括身份证、准考证等），要留出足够的时间提前到考场，从容不迫。

一年又一年，又到了最后时刻，常百感交集，但请你将它们化作冲刺的动力，向前进吧！

纵使北风啸杀掠考场
我们身似铁 心如钢
请你 勇敢不惧
因为 成败 自含香

张宇
与你共勉

目　录

数学(二)预测卷(一)试题答案及评分参考

一、选择题

1. 答　应选 C.

解　当 $x \to 0$ 时, $e^{x^3}-1 \sim x^3$. 利用 $f(x)$ 的三阶麦克劳林公式,得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x \to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小,代入题设等式 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{e^{x^3}-1}=-\frac{1}{2}$,得

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(0)-1+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2}{x^3}+\frac{f'''(0)}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right]=-\frac{1}{2},$$

所以 $f(0)=1, f'(0)=0, f''(0)=0, f'''(0)=-3$. 根据三阶导数的定义,得

$$f'''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x}=-3,$$

故由极限的保号性可知,存在点 $x=0$ 的某一去心邻域,使得在点 $(0,1)$ 的左侧 $f''(x)>0$,即曲线 $y=f(x)$ 是凹的,在点 $(0,1)$ 的右侧 $f''(x)<0$,即曲线 $y=f(x)$ 是凸的,因此 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

2. 答　应选 A.

解　令 $f(x)=2\,022x^{2\,021}-2\,021x^{2\,022}-k$,则 $f'(x)=2\,021\times 2\,022x^{2\,020}(1-x)$.

因为当 $0<x<1$ 时, $f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调增加. 又由 $k\in(0,1)$ 得, $f(0)f(1)=-k(1-k)<0$,故原方程在开区间 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根.

3. 答　应选 C.

解

$$\begin{aligned}\int_0^1\left[f(x)\int_x^1 f(t)\,dt\right]dx&=-\int_0^1\left[\int_x^1 f(t)\,dt\right]d\left[\int_x^1 f(t)\,dt\right]\\&=-\frac{1}{2}\left[\int_x^1 f(t)\,dt\right]^2\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(t)\,dt\right]^2=8.\end{aligned}$$

4. 答　应选 A.

解　对应齐次微分方程 $y''-3y'=0$ 的特征方程为 $r^2-3r=0$,特征根为 $r_1=3, r_2=0$.

易知 $y''-3y'=xe^{3x}$ 与 $y''-3y'=4x-5$ 的特解形式分别为 $y_1^*=x(ax+b)e^{3x}$, $y_2^*=x(cx+d)$,根据线性微分方程解的叠加原理,原方程的特解形式为

$$y^*=y_1^*+y_2^*=x(ax+b)e^{3x}+x(cx+d).$$

5. 答　应选 D.

解　由二重积分中值定理知,存在 $(\xi,\eta)\in D$,使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\cdot(\sqrt{2}t)^2 = 2t^2 f(\xi,\eta).$$

因为(ξ,η) 在 D 上，所以当 $t\to 0^+$ 时，$(\xi,\eta)\to(0,0)$，于是

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{t\to 0^+}\frac{2t^2 f(\xi,\eta)}{t^2} = \lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} 2f(\xi,\eta) = 2f(0,0) = 2.$$

6. **答**　应选 C.

解　因为函数 $f(x,y)$ 在点(1,1) 处连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+4y-1}{\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+3}-1}=2$，所以

$f(1,1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}[f(x,y)-2x+4y-1-(-2x+4y-1)]=0-1=-1.$

于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-f(1,1)-[2(x-1)-4(y-1)]}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}\\
&=\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+4y-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\\
&=\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+4y-1}{\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+3}-1}\cdot\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}{2}\\
&=2\times 0=0,
\end{aligned}$$

即　$$f(x,y)-f(1,1)=2(x-1)-4(y-1)+o\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\right).$$

故 $f(x,y)$ 在点(1,1) 处可微，且$\mathrm{d}z\Big|_{(1,1)}=2\mathrm{d}x-4\mathrm{d}y.$

7. **答**　应选 D.

解　因为$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}=1$，所以反常积分$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\mathrm{d}x$ 收敛，反常积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\mathrm{d}x$ 发散，从而反常积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\mathrm{d}x$ 发散.

因为$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{3}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{x^3(x+1)^3}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^3}}=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\dfrac{1}{\sqrt{x^3(x+1)^3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3}}=1$，所以反常积分$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^3(x+1)^3}}\mathrm{d}x$发散，反常积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3(x+1)^3}}\mathrm{d}x$收敛，从而反常积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3(x+1)^3}}\mathrm{d}x$ 发散.

因为$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{2}{3}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}}}=1$，所以反

常积分$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}\mathrm{d}x$收敛,反常积分$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}\mathrm{d}x$发散,从而反常积分$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}\mathrm{d}x$发散.

因为$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^3+x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$,$\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^3+x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$,所以反常积分$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}\mathrm{d}x$与$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}\mathrm{d}x$都收敛,从而反常积分$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}\mathrm{d}x$收敛.

8. **答**　应选 D.

解　将行列式按第 1 列拆项后,再提出前一个行列式第 1 列的公因子 x,得

$$f(x) = x\begin{vmatrix} 1 & 3x+2 & 2x-1 \\ 2 & 4x & 3x+1 \\ 7 & 17x+6 & 12x-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3x+2 & 2x-1 \\ -1 & 4x & 3x+1 \\ -2 & 17x+6 & 12x-1 \end{vmatrix}.$$

对于右边第一个行列式,将第 2 行减去第 1 行的 2 倍,第 3 行减去第 1 行的 7 倍;对于右边第二个行列式,将第 3 行减去第 2 行的 2 倍,得

$$\begin{aligned} f(x) &= x\begin{vmatrix} 1 & 3x+2 & 2x-1 \\ 0 & -2x-4 & -x+3 \\ 0 & -4x-8 & -2x+6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3x+2 & 2x-1 \\ -1 & 4x & 3x+1 \\ 0 & 9x+6 & 6x-3 \end{vmatrix} \\ &= x\begin{vmatrix} -2x-4 & -x+3 \\ -4x-8 & -2x+6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3x+2 & 2x-1 \\ 9x+6 & 6x-3 \end{vmatrix} \equiv 0. \end{aligned}$$

所以方程 $f(x)=0$ 的根有无穷多个.

9. **答**　应选 B.

解　因为 $\boldsymbol{AB}$ 的左上角有一个 2 阶子式$\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 36 \neq 0$,而

$$|\boldsymbol{AB}| = \begin{vmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 18 & 18 \\ 0 & 9 & 9 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

所以 $r(\boldsymbol{AB})=2$.

由于 $2 = r(\boldsymbol{AB}) \leqslant r(\boldsymbol{A}) \leqslant 2$,$2 = r(\boldsymbol{AB}) \leqslant r(\boldsymbol{B}) \leqslant 2$,因此 $r(\boldsymbol{A})=2$,$r(\boldsymbol{B})=2$.

10. **答**　应选 B.

解　因为 $r(\boldsymbol{A}) = 4-1 = 3$,所以 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$,因此 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含 3 个线性无关的解.

又因为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

由于$(0,1,-2,0)^{\mathrm{T}}$是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,因此$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)(0,1,-2,0)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}$,所以排除 A,C,D.

二、填空题

11. **答** 应填$\frac{1}{2}$.

解 利用右导数的定义.由于当 $x\to 0^+$ 时,$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\frac{1}{2}x$,所以

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=2\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})}=\frac{1}{2}.$$

12. **答** 应填$\frac{64\pi a^2}{3}$.

解 利用公式:$A=2\pi\int_\beta^\alpha y(\theta)\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta(\beta<\alpha)$,所求表面积为

$$\begin{aligned}A&=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos\theta)\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta\\&=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\theta=2\sqrt{2}\pi a^2\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\theta\\&=4\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\theta=16\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^3\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta\\&=32\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\mathrm{d}t=\frac{64\pi a^2}{3}.\end{aligned}$$

13. **答** 应填$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-1}-1)$.

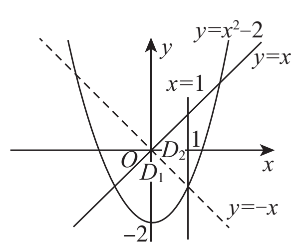
解 **法一** 使用分部积分法.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(\int_1^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\left(x\int_1^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)\Bigg|_0^1-\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(-x^2)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-1}-1).\end{aligned}$$

法二 看作二次积分,交换积分次序.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(\int_1^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=-\int_0^1\left(\int_x^1\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\&=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\\&=-\int_0^1 y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}(-y^2)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-1}-1).\end{aligned}$$

14. **答** 应填$\frac{2}{\mathrm{e}}$.



解 这里,被积函数可分成两项:$x\mathrm{e}^y+x(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y})$,第一项关于 x 是奇函数,第二项关于 x,关于 y 都是奇函数.用直线 $y=-x$ 将 D 分成 D_1 与 D_2 两部分(见图),D_1 关于 y 轴对称,D_2 关于 x 轴对称.根据二重积分的对称性,得

$$\text{原式}=\iint_{D_1+D_2}x\mathrm{e}^y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_1+D_2}x(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_2}x\mathrm{e}^y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 x\mathrm{d}x \int_{-x}^{x} \mathrm{e}^y \mathrm{d}y = \int_0^1 x(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$$

$$= (x-1)\mathrm{e}^x \Big|_0^1 + (x+1)\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^1 = \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

【注】 本题也可直接化为先 y 后 x 的二次积分,并利用定积分的对称性简化计算.

$$原式 = \int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x \int_{x^2-2}^{x} (2\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} x\left[(2\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y})\Big|_{y=x^2-2}^{y=x}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} x(2\mathrm{e}^{x^2-2} + \mathrm{e}^{-x^2+2})\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = (x-1)\mathrm{e}^x\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

15.**答** 应填 1.

解 令 $G(x,y,z) = F\left(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x}\right)$,则

$$G'_x = F'_1 - \frac{z}{x^2}F'_2, G'_y = -\frac{z}{y^2}F'_1 + F'_2, G'_z = \frac{1}{y}F'_1 + \frac{1}{x}F'_2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{G'_x}{G'_z} = -\frac{F'_1 - \frac{z}{x^2}F'_2}{\frac{1}{y}F'_1 + \frac{1}{x}F'_2} = \frac{-xyF'_1 + \frac{yz}{x}F'_2}{xF'_1 + yF'_2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{G'_y}{G'_z} = -\frac{-\frac{z}{y^2}F'_1 + F'_2}{\frac{1}{y}F'_1 + \frac{1}{x}F'_2} = \frac{\frac{xz}{y}F'_1 - xyF'_2}{xF'_1 + yF'_2}.$$

故
$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)} + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)} = \frac{-F'_1(3,3) + 2F'_2(3,3)}{F'_1(3,3) + F'_2(3,3)} + \frac{2F'_1(3,3) - F'_2(3,3)}{F'_1(3,3) + F'_2(3,3)}$$

$$= \frac{F'_1(3,3) + F'_2(3,3)}{F'_1(3,3) + F'_2(3,3)} = 1.$$

16.**答** 应填 4.

解 $A_{41} - A_{42} + A_{43} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & a & b \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,原式变为

$$10 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & a & b \\ 1 & -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & a & b \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & a & b \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 5 & -5 & 3 \\ 3+2b & b & a & b \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 3+2b & b & a \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3+2b & b & a+2b \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 10(a-3).$

所以 $a = 4, b$ 为任意实数.

三、解答题

17. **解** 因为切线方程为 $y = x - 1$,切点为 $(1, f(1))$,所以 $f(1) = 0, f'(1) = 1$.

……2 分

对积分作变量代换,令 $u = 1 + e^x - e^t$,则 $du = -e^t dt$,所以

$$\int_0^x e^t f(1 + e^x - e^t) dt = \int_1^{e^x} f(u) du.$$

根据等价无穷小替换,当 $x \to 0$ 时,$\sqrt{1+3x^2} - 1 \sim \frac{1}{2}(3x^2)$,并利用洛必达法则及导数 $f'(1)$ 的定义,可得

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^t f(1+e^x-e^t)dt}{1-\sqrt{1+3x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_1^{e^x} f(u)du}{-\frac{3}{2}x^2} = -\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f(e^x)e^x}{2x}$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f(e^x)-f(1)}{e^x-1}\cdot\frac{e^x-1}{x} = -\frac{1}{3}f'(1) = -\frac{1}{3}.$$ ……10 分

18. **证** 由于 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{e^x - e} = 0$,因此 $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$,且

$$f'(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1} = e\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{e^x - e} = 0.$$

作多项式函数 $g(x) = ax^2 + bx + c$,使 $g(0) = f(0) = 1, g(1) = f(1) = 0, g'(1) = f'(1) = 0$,即 $\begin{cases} c = 1, \\ a + b + c = 0, \\ 2a + b = 0, \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} a = 1, \\ b = -2, \\ c = 1, \end{cases}$ 于是 $g(x) = x^2 - 2x + 1$. ……6 分

令 $\varphi(x) = f(x) - g(x)$,则 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数,且 $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. 由罗尔定理知,存在 $\eta \in (0,1)$,使得 $\varphi'(\eta) = 0$. 又 $\varphi'(1) = f'(1) - g'(1) = 0$,再由罗尔定理知,存在 $\xi \in (\eta, 1)$,使得 $\varphi''(\xi) = 0$,即 $f''(\xi) = 2$. ……12 分

19. **解** (1) 对所给等式两边关于 x 求导并整理,得

$$f'(x) + f(x) = e^{-x}\cos x,$$

这是关于 $f(x)$ 的一阶线性微分方程,所以

$$f(x) = e^{-\int dx}\left(\int e^{\int dx} e^{-x}\cos x dx + C_1\right)$$

$$= e^{-x}\left(\int \cos x dx + C_1\right) = e^{-x}(\sin x + C_1).$$

由所给等式知 $f(0) = 0$,代入上式得 $C_1 = 0$. 因此 $f(x) = e^{-x}\sin x$. ……4 分

(2) 注意到曲线 $y = e^{-x}\sin x (x \geqslant 0)$ 与 x 轴的交点为 $(n\pi, 0), n = 0,1,2,\cdots$,因此所求旋转体体积为

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(\mathrm{e}^{-x}\sin x)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-2x}(1-\cos 2x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{\infty}[\mathrm{e}^{-2n\pi}-\mathrm{e}^{-2(n+1)\pi}]-\frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x,$$

其中

$$\int\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x}\sin x+\int\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x}\sin x-\mathrm{e}^{-x}\cos x-\int\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x-\cos x)+C_2(C_2\text{ 为任意常数}),$$

所以

$$\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x-\cos x)\Big|_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{-2n\pi}-\mathrm{e}^{-2(n+1)\pi}].$$

因此

$$V=\frac{\pi}{8}\sum_{n=0}^{\infty}[\mathrm{e}^{-2n\pi}-\mathrm{e}^{-2(n+1)\pi}]=\frac{\pi}{8}.$$ ……12 分

【注】 这里,利用两种熟知的方法,易得 $S=\sum_{n=0}^{\infty}[\mathrm{e}^{-2n\pi}-\mathrm{e}^{-2(n+1)\pi}]=1.$

法一 利用级数的和等于其部分和 S_n 的极限,即 $S=\lim_{n\to\infty}S_n$:

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}[\mathrm{e}^{-2k\pi}-\mathrm{e}^{-2(k+1)\pi}]=1-\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-2(n+1)\pi}=1.$$

法二 利用几何级数的结论:$\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\frac{1}{1-r}(|r|<1)$,得

$$S=(1-\mathrm{e}^{-2\pi})\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-2n\pi}=(1-\mathrm{e}^{-2\pi})\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}=1.$$

20.**解** 根据复合函数求偏导法则,得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=g_1'+g_2'u_1',\frac{\partial f}{\partial y}=g_2'(-u_1'+3u_2'),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=g_{11}''+g_{12}''u_1'+(g_{21}''+g_{22}''u_1')u_1'+g_2'u_{11}'',$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=g_{12}''(-u_1'+3u_2')+g_{22}''(-u_1'+3u_2')u_1'+g_2'(-u_{11}''+3u_{12}''),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=g_{22}''(-u_1'+3u_2')^2+g_2'(u_{11}''-6u_{12}''+9u_{22}'').$$ ……10 分

根据题设条件,知 $g_1'(0,1)=g_2'(0,1)=0$ 及 $u_1'(0,0)=u_2'(0,0)=0$.代入上面各式,得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}=g_{11}''(0,1),\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,0)}=0,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(0,0)}=0.$$ ……12 分

21.**证** (1) 令 $\varphi(x)=x^2[f(x)-1]$,则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且由 $f(a)=f(b)=1$ 得,$\varphi(a)=\varphi(b)=0$.由罗尔定理知,存在 $x_0\in(a,b)$,使得 $\varphi'(x_0)=0$,即 $2x_0[f(x_0)-1]+x_0^2f'(x_0)=0$.由 $b>a>0$ 得,$x_0\neq 0$,故 $x_0f'(x_0)+2f(x_0)=2.$

……6 分

(2) 令 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x),G(x)=\mathrm{e}^{x}$,则 $F(x)$ 与 $G(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导.
由拉格朗日中值定理知,存在 $\eta,\xi\in(a,b)$,使得

$$F'(\eta)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a},G'(\xi)=\frac{G(b)-G(a)}{b-a},$$

即
$$\mathrm{e}^{-\eta}[f'(\eta)-f(\eta)]=\frac{\mathrm{e}^{-b}f(b)-\mathrm{e}^{-a}f(a)}{b-a},\mathrm{e}^{\xi}=\frac{\mathrm{e}^{b}-\mathrm{e}^{a}}{b-a}.$$

由于 $f(a)=f(b)=1$,故

$$\mathrm{e}^{-\eta}[f'(\eta)-f(\eta)]=\frac{\mathrm{e}^{-b}-\mathrm{e}^{-a}}{b-a}=-\frac{\mathrm{e}^{b}-\mathrm{e}^{a}}{\mathrm{e}^{a+b}(b-a)}=-\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{\mathrm{e}^{a+b}},$$

即
$$\mathrm{e}^{a+b-\xi-\eta}[f(\eta)-f'(\eta)]=1.$$
……12 分

22.(1) **证** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值均为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$,使得

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$,即 $(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})=\boldsymbol{B}$. 令 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}$,则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$,即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似. ……5 分

(2) **解** 易知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值都为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$.
对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$,求解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$;
求解方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{B}$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.
对于 $\lambda_3=-1$,求解方程组 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$;
求解方程组 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{B}$ 的对应于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量 $\boldsymbol{\beta}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.
令 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{P}_2=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,则

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}.$$

再令 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}$,则

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

且使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$. ……12 分

数学(二)预测卷(二)试题答案及评分参考

一、选择题

1. **答**　应选 A.

解　先求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\frac{1}{n}}$,再根据极限值直接判断. 利用等价无穷小替换和泰勒公式,当 $n\to\infty$ 时,有

$$e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}-1\sim n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1=-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e}{\frac{1}{n}}=e\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}-1}{\frac{1}{n}}=-\frac{e}{2}+e\lim_{n\to\infty}\frac{o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=-\frac{e}{2},$$

因此当 $n\to\infty$ 时,u_n 与$\dfrac{1}{n}$是同阶但非等价无穷小.

2. **答**　应选 D.

解　利用排除法. 对于选项 A,B,C,易知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,并且可用间接展开法将 $f(x)$ 分别展开成幂级数:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)!},-\infty<x<+\infty;$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}x^n,-1<x\leqslant 1;$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+2)!}x^{2n},-\infty<x<+\infty.$$

根据幂级数的性质可知,这些函数 $f(x)$ 在相应的收敛域内任意阶可导,故由二阶导数 $f''(0)$ 存在可知,导函数 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处是连续的,可排除选项 A,B,C.

【注】　对于选项 D,可直接分析并判断正确与否. 首先,由导数定义可知

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^{\frac{2}{3}}\sin\frac{1}{x}=0;$$

另一方面,当 $x\neq 0$ 时,有

$$f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\sin\frac{1}{x}-x^{-\frac{1}{3}}\cos\frac{1}{x}.$$

因为$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在,所以 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

3. **答**　应选 C.

解　令 $f(x)=2^x-x^3-1$，则

$$f'(x)=2^x\ln 2-3x^2,f''(x)=2^x(\ln 2)^2-6x,f'''(x)=2^x(\ln 2)^3-6.$$

由于 $f'''(x)$ 有且只有 1 个零点，故由罗尔定理知，$f''(x)$ 至多有 2 个零点. 同理，$f'(x)$ 至多有 3 个零点，$f(x)$ 至多有 4 个零点. 由于

$$f(-1)=\frac{1}{2}>0,f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{8}-1<0,f(2)=-5<0,f(10)=23>0,$$

故由零点定理知，函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ 与 $(2,10)$ 内分别至少有 1 个零点. 又显然 $f(0)=f(1)=0$，故 $f(x)$ 至少有 4 个零点. 综上，得 $f(x)$ 有 4 个零点，即方程 $2^x=x^3+1$ 有 4 个实根.

4. **答**　应选 D.

解　由于 $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}}e^{-t^4}\,dt$，故 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x^2}$，$f(1)=0$. 于是

$$\int_0^1 f(x)\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\int_0^1 f(x)\,d(x^{\frac{3}{2}})=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}f(x)\Big|_0^1-\frac{2}{3}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}f'(x)\,dx$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx=\frac{1}{6}\int_0^1 e^{-x^2}\,d(-x^2)=\frac{1}{6}e^{-x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{6}(e^{-1}-1).$$

5. **答**　应选 B.

解　对任意 $t\in(0,+\infty)$，$t^3-3t^2+3t=t(t^2-3t+3)\neq 0$，所以 $\frac{1}{t^3-3t^2+3t}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，因此 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶连续导数，且

$$f'(x)=2x\int_1^x\frac{dt}{t^3-3t^2+3t}+\frac{x^2}{x^3-3x^2+3x}=\frac{2f(x)}{x}+\frac{x}{x^2-3x+3},$$

将 $x=1$ 代入上式，并注意到 $f(1)=0$，得 $f'(1)=1$. 再对上式两边关于 x 求导，得

$$f''(x)=2\,\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}+\frac{(x^2-3x+3)-x(2x-3)}{(x^2-3x+3)^2}$$

$$=2\,\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}+\frac{3-x^2}{(x^2-3x+3)^2},$$

再将 $x=1,f(1)=0,f'(1)=1$ 代入上式，得 $f''(1)=4$.

6. **答**　应选 A.

解　原方程是一阶线性微分方程，其通解为

$$f(x)=e^{-\int(-2)dx}\left[\int e^{2x}\cdot e^{\int(-2)dx}\,dx+C\right]=e^{2x}(x+C).$$

又 $f(0)=0$，故 $C=0$，从而 $f(x)=xe^{2x}$. 于是

$$\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx=\int_{-\infty}^0 xe^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 x\,d(e^{2x})$$

$$=\frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_{-\infty}^0-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 e^{2x}\,dx=-\frac{1}{4}.$$

7. **答**　应选 B.

解　利用二阶常系数线性微分方程解的结构与性质求解.

因为齐次方程 $y''+ay'+by=0$ 有两个线性无关的解 $y_1=\mathrm{e}^{-2x}$，$y_2=\mathrm{e}^{x}$，所以相应的特征方程为 $(r+2)(r-1)=0$，即 $r^2+r-2=0$，因此方程的系数 $a=1,b=-2$.

另一方面，$y=x^2\mathrm{e}^x$ 是方程 $y''+y'-2y=(Ax+B)\mathrm{e}^x$ 的解，代入该方程，得

$$y''+y'-2y=(6x+2)\mathrm{e}^x=(Ax+B)\mathrm{e}^x,$$

比较系数，得 $A=6,B=2$.

【注】　本题也可直接将 y^* 的表达式代入所给微分方程，通过比较系数得到关于 a,b,A,B 的线性方程组并求解.

8. **答**　应选 C.

解　**法一**　因为 $a^2+b^2+c^2=1$，所以 a,b,c 不全为零，不妨设 $a\neq 0$. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 的右下角的 2 阶子式 $\begin{vmatrix}1-b^2 & -bc\\ -bc & 1-c^2\end{vmatrix}=(1-b^2)(1-c^2)-b^2c^2=a^2\neq 0$，所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$.

另一方面，对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换：将第一行乘以 a，再将第二行的 b 倍与第三行的 c 倍都加到第一行，得

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}a(b^2+c^2) & -a^2b & -a^2c\\ -ab & a^2+c^2 & -bc\\ -ac & -bc & a^2+b^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -ab & a^2+c^2 & -bc\\ -ac & -bc & a^2+b^2\end{pmatrix},$$

所以 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$. 因此 $r(\boldsymbol{A})=2$.

法二　因为 $a^2+b^2+c^2=1$，所以 a,b,c 不全为零，令 $\boldsymbol{\xi}=(a,b,c)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$，且

$$\boldsymbol{A\xi}=\begin{pmatrix}1-a^2 & -ab & -ac\\ -ab & 1-b^2 & -bc\\ -ac & -bc & 1-c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$，表明 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$.

另一方面，注意到 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}$，即 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}$，所以

$$3=r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{\xi})=r(\boldsymbol{A})+1,$$

即 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$. 因此 $r(\boldsymbol{A})=2$.

9. **答**　应选 A.

解　对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等列变换(将第 i 列的 k 倍加到第 j 列)，得

$$\boldsymbol{A}\to(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\beta})\to(\boldsymbol{\alpha},2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}),$$

所以 $|\boldsymbol{\alpha},2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|=|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|=1$.

再对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 进行初等列变换(将第 i 列的 k 倍加到第 j 列)，得

$$\boldsymbol{B}\to(\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}-4\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}+2\boldsymbol{\alpha})\to(9\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}),$$

所以 $|\boldsymbol{B}|=|9\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|=9|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|=9$. 这表明 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，因此 $\boldsymbol{B}^*$ 是可逆矩阵.

根据克拉默法则知，方程组 $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解.

10. **答** 应选 C.

解 首先注意对于任意的实矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$ 成立.

若 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 为正定的，则二次型矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值均为正，从而为可逆矩阵，故 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=3$.

另外，若 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})=3$，则对任意的 3 维列向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，从而 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})>0$，故二次型为正定的.

【注】 考核点为二次型，矩阵的秩等. 注意对于一般的二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，若正定，必有其矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，但当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 不一定正定. 例如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 为可逆矩阵，但二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+x_2^2-x_3^2$ 不是正定的.

下面证明 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$，只要证明方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解即可. 一方面，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，于是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解；另一方面，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，于是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0$，即 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0$，从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

二、填空题

11. **答** 应填 $-\dfrac{4}{27}$.

解 因为 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$，所以 $f'(x)\varphi'(y)=1$. 两边关于 x 求导，得

$$f''(x)\varphi'(y)+\varphi''(y)[f'(x)]^2=0.$$

注意到 $x=1$ 时，$y=2$，可得 $\varphi'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{3}$. 再将 $x=1,y=2$ 代入上式，得

$$f''(1)\varphi'(2)+\varphi''(2)[f'(1)]^2=0\text{，即}\frac{4}{3}+9\varphi''(2)=0,$$

所以 $\varphi''(2)=-\dfrac{4}{27}$.

12. **答** 应填 $\dfrac{1}{3}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f(i)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}i^2}{n^3}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\\&=\int_0^1x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$