2022版

张宇数学教育系列丛书·六

考研数学命题人终极预测8套卷

○主编 张宇

【数学二】

北京理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学命题人终极预测8套卷. 数学二 ：高分版 / 张宇主编. —北京:北京理工大学出版社,2021.10

ISBN 978-7-5763-0506-7

Ⅰ.①考…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2021)第206121号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68944723(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 蠡县天德印务有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 8
字　　数 / 200千字
版　　次 / 2021年10月第1版　2021年10月第1次印刷
定　　价 / 28.80元

责任编辑 / 王玲玲
文案编辑 / 王玲玲
责任校对 / 刘亚男
责任印制 / 李志强

写给奋斗到最后时刻的你

你好！首先对你考研一路走来的艰辛表示敬意和慰问。

2021年12月26日上午8:30，你将进入考场，在这里，我向你提出如下几点，请切记：

一，天气渐冷，望保重身体，切莫过度冷暖交替，切莫过度熬夜了，尽量保护好自己不要生病。每天都要吃足量的主食，一定要多喝热水。

二，全力以赴把精力放在复习知识本身，不要胡思乱想。在最后阶段，每个人都会有紧张情绪，这很正常，适度的紧张是有利于考试的，但是不必紧张过度。今后你的人生中还有更多的挑战和精彩，一个考研没什么大不了。

三，最后阶段的数学，仍然要坚持每天做题，但

不一定是新题，而是你复习过程中积累下来的错题、不会的题与好题，重点在于：(1)关键思路总结；(2)公式结论记忆；(3)培养"做题的感觉与状态"。

四、考前一定要准备好必备用品和资料（包括身份证、准考证等），要留出足够的时间提前到考场，从容不迫。

一年又一年，又到了最后时刻，百感交集，但请你将它们化作冲刺的动力，向前进吧！

纵使北風嘯杀掠考場
我们身似鉄 心如鋼
请你 雄关不惧
因为 成敗 自含香

張宇
与你共勉

目　录

参考答案与分析

考研数学命题人终极预测卷(一)

一、选择题

1.【答案】　A

【分析】　关于函数性质的几个已知结论：

① 若 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且为奇函数，则 $G(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为偶函数；

② 若 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $G(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $G'(x)=g(x)$；

③ 若 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且以 T 为周期，则对任意实数 a，$\int_a^{T+a} g(x)\mathrm{d}x=\int_0^T g(x)\mathrm{d}x$；

④ 若 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且以 T 为周期，则 $\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ 以 T 为周期 $\Leftrightarrow \int_0^T g(t)\mathrm{d}t=0$.

对于本题，$g(x)=\sin^{2n+1}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为连续的奇函数，且以 2π 为周期，由 ① 知 $G(x)$ 为偶函数，故在 $(-\infty,+\infty)$ 上无单调性，可排除选项 B,C,D. 此外，由于 $\int_0^{2\pi}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x=0$，因此 $G(x)$ 是以 2π 为周期的函数.

应选 A.

2.【答案】　B

【分析】　显然，$f(x)$ 为偶函数，故只需考虑 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的左、右极限与左、右导数. 因为

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}}\right)=1,$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(ax^2+b+\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right)=a+b,$$

所以 $a+b=1$，从而有 $f(1)=1$. 又因为

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-1}}-1}{x-1}=2,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax^2+b+\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x-1}{x-1}=2a-\frac{1}{2},$$

所以 $2a-\frac{1}{2}=2$，解得 $a=\frac{5}{4}$. 再由 $a+b=1$，可得 $b=-\frac{1}{4}$. 应选 B.

3.【答案】　C

【分析】　将方程变形为

$$(x+1)f''(x)+x(x+1)f'(x)=(x+1)\ln(1+x)-\arctan x,$$

令 $g(x)=(x+1)\ln(1+x)-\arctan x, x\in[0,+\infty)$，则

$$g'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}=\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}>0(x>0),$$

所以当 $x>0$ 时，$g(x)$ 单调增加，有 $g(x)>g(0)=0$，又由 $f(x)$ 有驻点 $x=x_0>0$，可知 $f'(x_0)=0$，从而

$$(x_0+1)f''(x_0)>0, f''(x_0)>0,$$

故 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点. 应选 C.

4.【答案】 D

【分析】 首先,直接利用 $\sin x$ 的麦克劳林公式,得

$$x\sin x = x\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] = x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4),$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x \to 0$ 时 x^3 的高阶无穷小.又因为

$$\frac{1+x^2}{1+x+x^2} = 1 - \frac{x}{1+x+x^2} = 1 - \frac{x(1-x)}{1-x^3},$$

而 $\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + o(x^3)$,所以

$$\begin{aligned}\frac{1+x^2}{1+x+x^2} &= 1 - x(1-x)[1+x^3+o(x^3)]\\ &= 1 - x + x^2 - x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}f(x) &= \left[x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right] - [1 - x + x^2 - x^4 + o(x^4)]\\ &= -1 + x + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

则方幂 x^4 的系数为 $\frac{5}{6}$.应选 D.

5.【答案】 D

【分析】 由 $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{x+y+z} - 3xyz$,得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{x+y+z}\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) - 3yz - 3xy\frac{\partial z}{\partial x}. \qquad (*)$$

再将方程 $z^3 + xy + yz + xz = 1$ 两边关于 x 求偏导,得

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + y + y\frac{\partial z}{\partial x} + z + x\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

将点(0,0,1)的坐标代入上式,可得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0,1)} = -\frac{1}{3}$.再一并代入(*)式,得

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0,1)} = \frac{2\mathrm{e}}{3}.$$

应选 D.

6.【答案】 B

【分析】 利用函数的可微分与偏导数的关系知,$\frac{\partial f}{\partial x}$,$\frac{\partial f}{\partial y}$ 在第一象限必定存在,且 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x+ay}{(x+y)^2}$,$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{(x+y)^2}$,故

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{a(x+y)^2 - 2(x+ay)(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{(a-2)x - ay}{(x+y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{-2y}{(x+y)^3}.$$

因为 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 在第一象限连续,所以 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$,得 $(a-2)x - ay = -2y$,即

$$(a-2)(x-y) = 0.$$

因此 $a = 2$.应选 B.

7.【答案】 C

【分析】 这是计算先 y 后 x 的二次积分,考虑拆分成两项,第一项直接计算,第二项交换积分次序,化为先 x 后 y 的二次积分.

$$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 dy+\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1+y^3}}dy\int_0^{\sqrt{y}} x dx$$
$$=\int_0^1 (1-x^2)dx+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}}dy$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}(1+y^3)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{3}(\sqrt{2}+1).$$

应选 C.

8.【答案】　D

【分析】　记 A_{3j} 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 行第 j 列元素的代数余子式，则 $A_{3j}=(-1)^{3+j}M_{3j}(j=1,2,3,4)$. 对 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行元素利用代数余子式的性质，得

$$A_{31}-3A_{32}+A_{33}-2A_{34}=0,$$

即

$$M_{31}+3M_{32}+M_{33}+2M_{34}=0,$$

所以

$$M_{31}+3M_{32}-2M_{33}+2M_{34}=-3M_{33}=-3\begin{vmatrix}1&-3&-2\\2&-5&-2\\-3&9&7\end{vmatrix}=-3.$$

应选 D.

9.【答案】　C

【分析】　由 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$，可得 $|\boldsymbol{A}|^m=|\boldsymbol{A}^m|=0$，故 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc=0$，即 $ad=bc$.

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&b(a+d)\\c(a+d)&d^2+bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(a+d)&b(a+d)\\c(a+d)&d(a+d)\end{pmatrix}=(a+d)\boldsymbol{A},$$

$\boldsymbol{A}^m=(a+d)^{m-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，必有 $a+d=0$. 应选 C.

10.【答案】　A

【分析】　因为 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量，所以 $\boldsymbol{A}$ 可相似于对角矩阵，对应于特征值 $\lambda=2$ 有两个线性无关的特征向量，因此 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=3-2=1$. 利用初等行变换，得

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\-a&-2&-b\\3&6&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&2a-2&-2a-b\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $2a-2=0,-2a-b=0$，解得 $a=1,b=-2$. 应选 A.

二、填空题

11.【答案】　$\begin{cases}\frac{1}{2}(2xe^{x^2-1}-1), & x<1,\\ \frac{1}{1+x^2}, & x\geqslant 1\end{cases}$

【分析】　当 $x<1$ 时，$f'(x)=\frac{1}{2}(2xe^{x^2-1}-1)$；当 $x>1$ 时，$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$；当 $x=1$ 时，因为

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{2}(e^{x^2-1}-x+\pi)-\frac{\pi}{2}}{x-1}=\frac{1}{2},$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{\pi}{4}+\arctan x-\frac{\pi}{2}}{x-1}=\frac{1}{2},$$

且 $f'_-(1)=f'_+(1)=\dfrac{1}{2}$，所以 $f'(1)=\dfrac{1}{2}$. 因此

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(2x\mathrm{e}^{x^2-1}-1), & x<1,\\ \dfrac{1}{1+x^2}, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

12.【答案】 $\dfrac{3}{2}$

【分析】 根据复合函数求导法则，由 $f'(x)=(5-y)y^k$ 可得

$$f''(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[(5-y)y^k]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(5k-ky-y)(5-y)y^{2k-1}.$$

将 $x=x_0$ 代入上式，并注意到 $y\Big|_{x=x_0}=3$，且 $f''(x_0)=0$，得

$$2(5k-3k-3)3^{2k-1}=0,$$

解得 $k=\dfrac{3}{2}$.

13.【答案】 $\dfrac{\pi}{3}$

【分析】 作变量代换：$x=\dfrac{1}{t}$，则 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}=\int_0^{+\infty}\frac{t^4\,\mathrm{d}t}{1+t^6}$，所以

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^4}{1+x^6}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1-x^2+x^4}{(1+x^2)(1-x^2+x^4)}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\frac{1}{6}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x^3)}{1+x^6}\\&=\frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{6}\arctan x^3\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

14.【答案】 $(x-2)y$

【分析】 直接求偏导数，再代入所给表达式并化简.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{2y^3}{x^3}+y\ln x+\frac{x+2}{x}y,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{3y^2}{x^2}+(x+2)\ln x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{6y^3}{x^4}+\frac{y}{x}-\frac{2y}{x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{6y}{x^2},$$

所以

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2\left(\frac{6y^3}{x^4}+\frac{y}{x}-\frac{2y}{x^2}\right)-y^2\cdot\frac{6y}{x^2}=(x-2)y.$$

15.【答案】 e^x

【分析】 对于 $y'-3y=-2\mathrm{e}^x$，其通解为

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int(-3)\mathrm{d}x}\left[\int(-2\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{\int(-3)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\\&=\mathrm{e}^{3x}\left(-2\int\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=\mathrm{e}^{3x}(\mathrm{e}^{-2x}+C)=\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^{3x}.\end{aligned}$$

代入方程 $y''+y=2\mathrm{e}^x$ 并整理，得

$$2\mathrm{e}^x+10C\mathrm{e}^{3x}=2\mathrm{e}^x.$$

比较等式两边的系数，得 $C=0$. 故所求函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$.

16.【答案】　$k(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}+(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数

【分析】　根据题设条件知，$r(\boldsymbol{A})=3$，所以齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含一个非零解. 又由 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3+4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$ 可知，$(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解，由 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$ 可知，$(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个解，因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $k(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}+(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数.

三、解答题

17.【解】
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\prod_{i=1}^{n}(n+i)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)}$$
$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{2\ln 2-1}=\frac{4}{\mathrm{e}},$$

其中
$$\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\ln 2-[x-\ln(1+x)]\Big|_0^1=2\ln 2-1.$$

18.【解】　对方程 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 两边关于 x 求导数，得 $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'=0$，所以 $y'=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$.

在曲线 L 上任取一点 (u,v)，则 L 在该点的切线斜率为 $y'\Big|_{\substack{x=u\\y=v}}=-\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{2}}$，切线方程为
$$y-v=-\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{2}}(x-u).$$

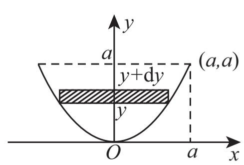
欲使所得体积最小，等价于切线与两坐标轴围成的图形绕 x 轴旋转一周所得圆锥体的体积 V 最大. 分别令 $y=0,x=0$，并注意到 $u^{\frac{1}{2}}+v^{\frac{1}{2}}=1$，可得切线在 x 轴与 y 轴上的截距分别为 $x=u^{\frac{1}{2}}$，$y=v^{\frac{1}{2}}$. 所以
$$V=\frac{\pi}{3}\left(v^{\frac{1}{2}}\right)^2u^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{3}\left(v-v^{\frac{3}{2}}\right).$$

令 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}v}=\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{3}{2}v^{\frac{1}{2}}\right)=0$，得唯一驻点 $v_0=\frac{4}{9}$. 由于 $\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}v^2}\Big|_{v=v_0}=-\frac{\pi}{4}v_0^{-\frac{1}{2}}=-\frac{3\pi}{8}<0$，因此 V 在 $v=v_0$ 处取得最大值 $V_0=\frac{\pi}{3}\left(v_0-v_0^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{4\pi}{81}$.

因此，切点 P 的横坐标为 $u_0=(1-\sqrt{v_0})^2=\frac{1}{9}$，于是点 P 的坐标为 $(u_0,v_0)=\left(\frac{1}{9},\frac{4}{9}\right)$.

注意到 L 的方程为 $y=(1-\sqrt{x})^2$，$0\leqslant x\leqslant 1$，故所求最小体积为
$$V_{\min}=\pi\int_0^1(1-\sqrt{x})^4\mathrm{d}x-V_0\xlongequal{t=1-\sqrt{x}}2\pi\int_0^1t^4(1-t)\mathrm{d}t-\frac{4\pi}{81}$$
$$=\frac{\pi}{15}-\frac{4\pi}{81}=\frac{7\pi}{405}.$$

19.【解】　(1) 以缸底中心为原点，对称轴为 y 轴在轴截面上建立如图所示的平面直角坐标系，则可设缸内表面（旋转抛物面）是由抛物线 $y=kx^2$ 绕 y 轴旋转而成的. 根据题意，$y\Big|_{x=a}=a$，故 $k=\frac{1}{a}$，即抛物线方程为 $y=\frac{1}{a}x^2$. 于是，缸的容积为



$$V=\pi\int_0^a x^2\mathrm{d}y=\pi\int_0^a ay\mathrm{d}y=\frac{\pi a^3}{2}(\text{立方米}).$$

因此,若以每秒 Q 立方米的速率将缸中的水全部抽出,则需要的时间为 $t=\dfrac{V}{Q}=\dfrac{\frac{\pi a^3}{2}}{Q}=\dfrac{\pi a^3}{2Q}$(秒).

(2) 取 y 为积分变量,其取值范围为 $[0,a]$. 在 y 轴上的区间 $[0,a]$ 内任取一个典型小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$,相应于该典型小区间的功的微元为

$$\mathrm{d}W=\rho g\pi x^2\mathrm{d}y\cdot(a-y)=\rho g\pi ay(a-y)\mathrm{d}y=\rho g\pi a(ay-y^2)\mathrm{d}y.$$

于是,所求功为

$$W=\int_0^a\rho g\pi a(ay-y^2)\mathrm{d}y=\rho g\pi a\left(\frac{1}{2}ay^2-\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_0^a=\frac{1}{6}\rho g\pi a^4(\text{焦耳}).$$

20.【解】 记 $x=uv,y=\dfrac{1}{2}(u^2-v^2)$,则 $g(u,v)$ 是以 x,y 为中间变量,以 u,v 为自变量的复合函数. 利用复合函数求偏导数法则,得

$$\frac{\partial g}{\partial u}=v\frac{\partial f}{\partial x}+u\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial v}=u\frac{\partial f}{\partial x}-v\frac{\partial f}{\partial y}.$$

代入等式 $a\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)^2-b\left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)^2=u^2+v^2$ 并整理,得

$$(av^2-bu^2)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+2(a+b)uv\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+(au^2-bv^2)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=u^2+v^2.$$

再将 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2=4-\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2$ 代入上式并整理,得

$$(a+b)(v^2-u^2)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+2(a+b)uv\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=(1-4a)u^2+(1+4b)v^2.$$

比较恒等式两边的系数,得 $\begin{cases}a+b=0,\\1-4a=0,\\1+4b=0,\end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{1}{4},b=-\dfrac{1}{4}$.

21.【解】 (1) 根据题设条件及曲率半径公式,函数 $y=f(x)$ 满足

$$\frac{\sqrt{[1+(y')^2]^3}}{-y''}=1,$$

即

$$-y''=\sqrt{[1+(y')^2]^3}.$$

这是既不显含 x,又不显含 y 的二阶微分方程,现将它视为不显含 x 来求解.

令 $y'=p$,则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$,代入方程,化为 $-\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=(1+p^2)^{\frac{3}{2}}$,解得 $-\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}=x+C$. 由 $f'(1)=0$,即 $p(1)=0$,得 $C=-1$,从而,有

$$y'=p=-\frac{x-1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}.$$

两边积分,得 $y=\sqrt{1-(x-1)^2}+C_1$,由 $f(0)=0$,得 $C_1=0$,所以 $y=\sqrt{2x-x^2}$,即

$$f(x)=\sqrt{2x-x^2}.$$

(2) **法一** 利用直角坐标计算. 因为积分区域 D: $\sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant 2,0\leqslant x\leqslant 2$,所以

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 x\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^2 y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^2 x(4-2x+x^2)\mathrm{d}x=\frac{10}{3}.$$

法二　利用二重积分对积分区域的可加性. 记 D_1 是由曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 及 x 轴围成的区域，则

$$\iint\limits_{D} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D+D_1} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

对上述右端两项分别利用直角坐标和极坐标计算：

$$\iint\limits_{D+D_1} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 x\,\mathrm{d}x\int_0^2 y\,\mathrm{d}y=4,$$

$$\iint\limits_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r^3\,\mathrm{d}r=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{2}{3}\cos^6\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3},$$

因此 $\iint\limits_{D} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4-\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{3}$.

22.【解】（1）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_3)^2+x_2^2+x_3^2$，令 $y_1=x_1-x_3,y_2=x_2,y_3=x_3$，即 $x_1=y_1+y_3,x_2=y_2,x_3=y_3$，则

$$f=y_1^2+y_2^2+y_3^2.$$

将上述变换用矩阵表示为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

显然，$\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵，所以合同变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 可将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

进一步，若记 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$.

（2）直接计算，得

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&0&0\\-1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$

易知，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 的特征值为 $1,2,-1$，相应的特征向量分别为 $(1,0,-1)^{\mathrm{T}},(1,-1,1)^{\mathrm{T}},(1,2,1)^{\mathrm{T}}$. 将它们单位化后记为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$. 最后，取正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$，则

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}，且\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

（3）根据上述结果，令

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&\frac{2}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{T}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，即合同变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$ 可将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 与

$g(x_1,x_2,x_3)$ 同时化为标准形

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, g = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2.$$

考研数学命题人终极预测卷(二)

一、选择题

1.**【答案】** D

【分析】 显然,$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上处处连续,只需考虑 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某个去心邻域$(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta)$ 内的一阶导数 $f'(x)$、二阶导数 $f''(x)$ 的变化情形,其中 $0<\delta<1$. 易知

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x > 0, & 1-\delta < x < 1, \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} < 0, & 1 < x < 1+\delta, \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi^2}{4}\sin\dfrac{\pi}{2}x < 0, & 1-\delta < x < 1, \\ \dfrac{1}{4\sqrt{(x-1)^3}} > 0, & 1 < x < 1+\delta, \end{cases}$$

所以点 $x=1$ 是 $f(x)$ 的一个极大值点,且点$(1,2)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点. 应选 D.

2.**【答案】** B

【分析】 当 $0\leqslant x<2$ 时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2\left(\dfrac{x}{2}\right)^n}{\sqrt[3]{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^{3n}}}=0$;

当 $x>2$ 时,$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1+\left(\dfrac{2}{x}\right)^{3n}}}=x^2$;当 $x=2$ 时,$f(2)=\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}$. 因此

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

因为 $f(x)$ 在点 $x=2$ 处不连续,所以 $f'(2)$ 不存在. 又因为 $f'_-(2)=0$,$f'_+(2)=4$,所以 $x=2$ 是 $f'(x)$ 的跳跃间断点,则 $f'(x)$ 在$(0,+\infty)$ 上有一个跳跃间断点. 应选 B.

3.**【答案】** C

【分析】 不等式 $2x+\dfrac{a}{x^4}\geqslant 5(x>0)$ 等价于 $a\geqslant 5x^4-2x^5(x>0)$. 令 $f(x)=5x^4-2x^5(x>0)$,则

$$f'(x) = 20x^3 - 10x^4 = -10x^3(x-2),$$
$$f''(x) = 60x^2 - 40x^3 = 20x^2(3-2x).$$

令 $f'(x)=0$,得函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$ 内的唯一驻点 $x=2$. 由于 $f''(2)=-80<0$,故函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$ 内的最大值为 $f(2)=16$,从而常数 a 的最小取值为 16. 应选 C.

4.**【答案】** A

【分析】 由题设可知 $f(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$,两边对 x 求导,得 $f'(x)=2f(x)+\mathrm{e}^{2x}$,即 $f'(x)-2f(x)=\mathrm{e}^{2x}$. 这是一阶线性微分方程,其通解为

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\int(-2)\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{\int(-2)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right] = \mathrm{e}^{2x}(x+C).$$

由题设得 $f(0)=\dfrac{1}{2}$,故 $C=\dfrac{1}{2}$,从而 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$. 于是

$$f^{(100)}(x)=\sum_{k=0}^{100}C_{100}^{k}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{(k)}(e^{2x})^{(100-k)}=\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{100}e^{2x}+100\cdot 2^{99}e^{2x},$$

所以
$$f^{(100)}(0)=\frac{1}{2}\cdot 2^{100}+100\cdot 2^{99}=101\cdot 2^{99}.$$

应选 A.

5.【答案】　A

【分析】　令$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=a$,则 $f'(x)=5-6x-a$. 由于 $f(0)=0$,因此

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x(5-6t-a)\mathrm{d}t=5x-3x^2-ax.$$

于是,$a=\int_0^1(5x-3x^2-ax)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}a$,即 $a=1$,从而 $f(x)=4x-3x^2$. 因此

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2(4x-3x^2)\mathrm{d}x=-1.$$

应选 A.

6.【答案】　D

【分析】
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-3\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=9\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-6a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

由 $9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,得$(18+6a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(9-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$. 由题设得$\begin{cases}18+6a\neq 0,\\ 9-a^2=0,\end{cases}$故 $a=3$.

应选 D.

7.【答案】　D

【分析】　由题设知,所求微分方程的特征根为 $r_1=r_2=1, r_{3,4}=1\pm i$,从而特征方程为

$$(r-1)^2[r-(1+i)][r-(1-i)]=0,$$

即 $r^4-4r^3+7r^2-6r+2=0$,故所求微分方程为

$$y^{(4)}-4y'''+7y''-6y'+2y=0.$$

应选 D.

8.【答案】　B

【分析】　由于

$$f(x)=\begin{vmatrix}x+1&2&3&\cdots&n\\1&x+2&3&\cdots&n\\1&2&x+3&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&2&3&\cdots&x+n\end{vmatrix}=\left[x+\frac{n(n+1)}{2}\right]\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&x+2&3&\cdots&n\\1&2&x+3&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&2&3&\cdots&x+n\end{vmatrix}$$

$$=\left[x+\frac{n(n+1)}{2}\right]\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\0&x&0&\cdots&0\\0&0&x&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&x\end{vmatrix}=x^{n-1}\left[x+\frac{n(n+1)}{2}\right]=x^n+\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1},$$

故 $f^{(n-1)}(x)=n!x+\frac{n(n+1)}{2}\cdot(n-1)!=n!x+\frac{1}{2}(n+1)!$,因此 $f^{(n-1)}(0)=\frac{1}{2}(n+1)!$.

应选 B.

9.【答案】 C

【分析】 由题设,易知 $\boldsymbol{M}=(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$,而

$$|2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}-1&0&-6\\0&-1&0\\5&0&2\end{vmatrix}=-28,$$

即 $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,所以 $r(\boldsymbol{M})=r(2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$.

又因为 $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-4&2\\4&1&-4\\-1&4&-2\end{pmatrix}$的行列式等于0,且左上角的2阶子式$\begin{vmatrix}1&-4\\4&1\end{vmatrix}=17\neq0$,所以 $r(2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=2$,可知 $r(\boldsymbol{M})=2$.应选 C.

10.【答案】 A

【分析】 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$,则向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=3$.对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换,得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&k&-3\\2&-1&1\\-4&-4&k+6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&k-2&-1\\0&-3&3\\0&0&k+2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&k-3\\0&0&k+2\end{pmatrix}.$$

因为 $k-3$ 与 $k+2$ 不同时为0,所以对任意常数 k,$r(\boldsymbol{A})=3$,向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 线性无关.应选 A.

二、填空题

11.【答案】 5

【分析】 因为 $f(x)=\int_0^x\sin(tx)^2\mathrm{d}t\xlongequal{tx=u}\dfrac{1}{x}\int_0^{x^2}\sin u^2\mathrm{d}u$,所以

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin u^2\mathrm{d}u}{x^{n+1}}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x^4}{(n+1)x^n}=\lim_{x\to0}\frac{2x^5}{(n+1)x^n}\xlongequal{n=5}\frac{1}{3}.$$

故当 $x\to0$ 时,若 $f(x)$ 与 x^n 是同阶无穷小,则正整数 $n=5$.

12.【答案】 $6\cdot11!$

【分析】 记 $g(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+11)$,$h(x)=\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$,则 $f(x)=g(x)+h(x)$.

因为 $g(x)=x^{11}+(1+2+\cdots+11)x^{10}+\cdots+11!$,所以

$$g^{(10)}(0)=(1+2+\cdots+11)\cdot10!=\frac{11(1+11)}{2}\cdot10!=6\cdot11!.$$

而 $h(x)$ 是 x 的奇函数,$h^{(10)}(x)$ 也是 x 的奇函数,故 $h^{(10)}(0)=0$,所以

$$f^{(10)}(0)=g^{(10)}(0)+h^{(10)}(0)=6\cdot11!.$$

13.【答案】 4

【分析】 令 $x(t-1)=u$,则$\int_1^2f(xt-x)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\int_0^xf(u)\mathrm{d}u$,所以 $f(x)\int_0^xf(u)\mathrm{d}u=2x^3$.

记 $F(x)=\int_0^xf(u)\mathrm{d}u$,则 $F(x)$ 是$[0,3]$上单调不减的可导函数,$F'(x)=f(x)\geqslant0$,满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F^2(x)]=4x^3,$$

所以 $F^2(x)=x^4+C$.因为 $F(0)=0$,所以 $C=0$,$F(x)=x^2$.于是,$f(x)$ 在区间$[1,3]$上的平均值为

$$\frac{1}{3-1}\int_1^3f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[F(3)-F(1)]=\frac{1}{2}(9-1)=4.$$

14.【答案】　$-\dfrac{2x}{z}f'\left(\dfrac{x}{z}\right)-\dfrac{2y}{z}f'\left(\dfrac{y}{z}\right)$

【分析】　根据复合函数求偏导法则，对 F 关于 x 求一阶、二阶偏导数，得

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{z}f'\left(\frac{x}{z}\right)+\frac{z^2}{x^2}f'\left(\frac{z}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{1}{z^2}f''\left(\frac{x}{z}\right)-\frac{2z^2}{x^3}f'\left(\frac{z}{x}\right)-\frac{z^3}{x^4}f''\left(\frac{z}{x}\right).\qquad ①$$

根据变量 y 与 x 的对称性，得

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{1}{z^2}f''\left(\frac{y}{z}\right)-\frac{2z^2}{y^3}f'\left(\frac{z}{y}\right)-\frac{z^3}{y^4}f''\left(\frac{z}{y}\right).\qquad ②$$

再根据复合函数求偏导法则，对 F 关于 z 求一阶、二阶偏导数，得

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{x}{z^2}f'\left(\frac{x}{z}\right)-\frac{y}{z^2}f'\left(\frac{y}{z}\right)-f\left(\frac{z}{x}\right)-f\left(\frac{z}{y}\right)-\frac{z}{x}f'\left(\frac{z}{x}\right)-\frac{z}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=&\frac{2x}{z^3}f'\left(\frac{x}{z}\right)+\frac{x^2}{z^4}f''\left(\frac{x}{z}\right)+\frac{2y}{z^3}f'\left(\frac{y}{z}\right)+\frac{y^2}{z^4}f''\left(\frac{y}{z}\right)-\\&\frac{2}{x}f'\left(\frac{z}{x}\right)-\frac{z}{x^2}f''\left(\frac{z}{x}\right)-\frac{2}{y}f'\left(\frac{z}{y}\right)-\frac{z}{y^2}f''\left(\frac{z}{y}\right).\end{aligned}\qquad ③$$

最后，由 $x^2\times ①+y^2\times ②-z^2\times ③$ 化简即得

$$x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-z^2\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=-\frac{2x}{z}f'\left(\frac{x}{z}\right)-\frac{2y}{z}f'\left(\frac{y}{z}\right).$$

15.【答案】　$\dfrac{\pi^2}{8}$

【分析】　因为 $f(x)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^x r\arctan(1+r)\mathrm{d}r=2\pi\int_0^x r\arctan(1+r)\mathrm{d}r$，所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{\mathrm{e}^{-2x}-1+2x}&=2\pi\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x r\arctan(1+r)\mathrm{d}r}{\mathrm{e}^{-2x}-1+2x}=2\pi\lim_{x\to0^+}\frac{x\arctan(1+x)}{-2\mathrm{e}^{-2x}+2}\\&=2\pi\lim_{x\to0^+}\frac{x\arctan(1+x)}{-2(-2x)}=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to0^+}\arctan(1+x)=\frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

16.【答案】　$\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}$

【分析】　令 $\boldsymbol{C}=4\boldsymbol{E}+7\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，则问题即求实对称正定矩阵 $\boldsymbol{A}$，使得 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{C}$. 由于 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}11&7&7\\7&11&7\\7&7&11\end{pmatrix}$，

易知其特征值 $\lambda_1=\lambda_2=4,\lambda_3=25$. 对于 $\lambda_1=\lambda_2=4$，可解得对应于 $\lambda_1=\lambda_2=4$ 的线性无关且相互正交的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$；对于 $\lambda_3=25$，解得对应于 $\lambda_3=25$ 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 再单位化，得正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=\left(\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|},\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|},\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix},$$

则
$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}4&&\\&4&\\&&25\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{A}$ 是实对称正定矩阵.

【注】 ① 证明：满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{C}$ 的实对称正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是唯一的.

事实上，若 $\boldsymbol{B}$ 为实对称正定矩阵且 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2$. 记上述正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的列向量为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_i=\sqrt{\lambda_i}\boldsymbol{\xi}_i,i=1,2,3$. 由于 $\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_i)=\lambda_i\boldsymbol{\xi}_i$，即 $(\sqrt{\lambda_i}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})(\sqrt{\lambda_i}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{0}$，且 $\sqrt{\lambda_i}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，因此 $(\sqrt{\lambda_i}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{0}$. 故

$$\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=(\sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{\xi}_1,\sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{\xi}_2,\sqrt{\lambda_3}\boldsymbol{\xi}_3)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\boldsymbol{AP},$$

于是 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$. 这就表明，本题的答案是唯一的.

② 更一般地可证：若 $\boldsymbol{C}$ 为 n 阶正定矩阵，则存在唯一的 n 阶正定矩阵 $\boldsymbol{A}$，使得 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{C}$.

三、解答题

17.【解】 记 $f(x)=\left(\cos x-\dfrac{1}{2}x^2\right)^{\frac{a}{x^2}}$，则 $\ln f(x)=a\dfrac{\ln\left(\cos x-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2}$. 利用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to0}\ln f(x)=a\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\cos x-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2}=a\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{-\sin x-x}{\cos x-\frac{1}{2}x^2}}{2x}$$

$$=-\frac{a}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+1\right)\frac{1}{\cos x-\frac{1}{2}x^2}=-a,$$

即 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\mathrm{e}^{-a}$. 再由题设条件知，所给等式右端的极限存在，且等于 e^{-a}.

因为 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+x^2}-1\sim\dfrac{1}{2}x^2$，所以

$$\mathrm{e}^{-a}=\lim_{x\to0}\frac{bx-\sin x}{x\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}=2\lim_{x\to0}\frac{bx-\sin x}{x^3}=2\lim_{x\to0}\frac{b-\cos x}{3x^2},$$

因此 $b=1$，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{bx-\sin x}{x\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$.

最后，由 $\mathrm{e}^{-a}=\dfrac{1}{3}$，得 $a=\ln 3$.

18.【解】 **法一**

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^2x}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}+t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos t-\cos^2t}\,\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos t(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos t}\sin t}{\sqrt{1+\cos t}}\mathrm{d}t\xlongequal{\cos t=u}2\int_0^1\sqrt{\frac{u}{1+u}}\mathrm{d}u$$

$$\xlongequal{\sqrt{\frac{u}{1+u}}=v}4\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}\frac{v^2}{(1-v^2)^2}\mathrm{d}v=-2\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}v\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{v^2-1}\right)$$

$$=-2\left.\frac{v}{v^2-1}\right|_0^{\frac{1}{\sqrt2}}+2\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}\frac{1}{v^2-1}\mathrm{d}v=2\sqrt2+\ln\left.\left|\frac{v-1}{v+1}\right|\right|_0^{\frac{1}{\sqrt2}}$$

$$=2\sqrt2+\ln\frac{\sqrt2-1}{\sqrt2+1}=2\sqrt2+2\ln(\sqrt2-1)=2\sqrt2-2\ln(\sqrt2+1).$$

法二 $\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^2x}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}+t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos t-\cos^2t}\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos t(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t$