高等院校基础课教材

课书房
新/形/态/教/材

高等数学（理工类上册）

Gaodeng Shuxue （Ligonglei Shangce）

主 编 张炳彩

重庆大学出版社

内容提要

《高等数学》(理工类上、下册)是为适应教学改革,针对独立院校应用型人才培养而编写的教材.本书为上册,内容包括:函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数微分学的应用,一元函数积分学,一元函数积分学的应用,常微分方程.

本书的特点是根据目前应用型本科理工科专业学生实际情况和教学现状,本着“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则对教学内容、要求、篇幅适度地调整. 在保证教学内容系统性和完整性的基础上,适当降低某些理论内容的深度,尽量突出对基本概念、基本理论、基本方法与运算的教与学. 本书深入浅出、突出实用、通俗易懂,注重培养学生解决实际问题的能力及知识的拓展,针对不同院校课程设置的情况,可根据教材内容取舍,便于教师使用.

本书可作为应用型高等院校(包括新升本科院校、地方本科院校)的公共基础课教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 : 理工类. 上册 / 张炳彩主编. -- 重庆 : 重庆大学出版社, 2022.5

ISBN 978-7-5689-2681-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 082359 号

高等数学(理工类 上册)

主 编 张炳彩

副主编 王 艳 吴继军

主 审 刘 锐

策划编辑:鲁 黎

责任编辑:杨育彪 版式设计:鲁 黎

责任校对:姜 凤 责任印制:张 策

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:饶帮华

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编:401331

电话:(023)88617190 88617185(中小学)

传真:(023)88617186 88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆俊蒲印务有限公司印刷

*

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:12.25 字数:308 千

2022 年 5 月第 1 版 2022 年 5 月第 1 次印刷

印数:1—2 000

ISBN 978-7-5689-2681-2 定价:38.00 元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换

版权所有,请勿擅自翻印和用本书

制作各类出版物及配套用书,违者必究

前言

“高等数学”是高等院校本科理工类专业(非数学)的一门公共基础课,其内容和方法对学生后续专业课程的学习及学业规划都起着重要的作用. 高等数学的基本理论和方法是高等院校理工类学生必须具备的基本知识之一,高等院校为培育人才开设高等数学课程具有重要的意义.

《高等数学》(理工类上、下册)是为应用型高等院校本科理工类专业学生编写的高等数学教材. 本书为上册,在吸收国内外同类教材优点的基础上,结合多年的教学经验,以“因材施教,学以致用”为指导思想;贯彻“以应用为目的,以必需、够用为度”的教学原则;突出“基本概念、基本理论、基本计算方法”的教学要求.

本书编写力求有利于教师组织教学,有利于学生学习掌握课程的基本知识,使教师易讲、易教,学生易懂、易学. 本书编写适当降低部分理论知识的深度,突出某些知识的应用背景、概念、方法的介绍,加强学生对基本数学技能的训练,培养数学的思维和方法,提高应用数学知识解决实际问题的能力.

本书编写妥善处理了学科的系统性、严肃性与达到基本教学要求之间的关系,以及知识内容学习掌握与应用能力提高的关系,加强了基础的教与学和兼顾素质教育的关系;重视概念、侧重计算、启发应用,简化定理、性质的证明,对纯数学的定义、构造性的证明、技巧性强的数学计算做几何直观或淡化、省略的处理.

参与本书的编写人员都是长期从事本科高等数学教学的教师,有丰富的教学经验,在编写内容及深度方面较好地反映和体现了应用型本科的教学需求. 本书由张炳彩担任主编,王艳和吴继军担任副主编;其中,第 1 至第 5 章由张炳彩编写,第 6 章由吴继军编写,全书习题由王艳整理. 全书由刘锐主审.

宁夏大学新华学院领导对本书的编写给予了极大的关注和支持;重庆大学出版社的领导和编辑对本书的出版给予了具体的指导和帮助,编者对此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,本书难免存在不妥之处,在此诚挚地希望得到专家、同行和读者的批评与指正.

编　者

2021 年 12 月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目录

第 1 章 函数、极限与连续

由于社会和科学发展的需要,到了 17 世纪,对物体运动的研究成为自然科学的中心问题. 与之相适应,数学在经历了两千多年的发展之后进入了一个被称为"高等数学时期"的新时代,这一时代集中的特点是超越了希腊数学传统的观点,认识到"数"的研究比"形"更重要,以积极的态度开展对"无限"的研究,由常量数学发展为变量数学,微积分的创立更是这一时期最突出的成就之一. 微积分研究的基本对象是定义在实数集上的函数.

本章将简要地介绍高等数学的一些基本概念,其中重点介绍极限的概念、性质和运算法则,以及与极限概念密切相关的,并且在微积分运算中起重要作用的无穷小量的概念和性质. 此外,还给出了两个极其重要的极限. 随后,运用极限的概念引入函数的连续性概念,它是客观世界中广泛存在的连续变化这一现象的数学描述. 极限是研究函数的一种基本方法,极限的思想方法贯穿于高等数学的始终,而连续性则是函数的一种重要属性. 因此,本章内容是整个微积分学的基础.

1.1 变量与函数

1.1.1 变量及其变化范围的常用表示法

在自然现象或工程技术中,常常会遇到各种各样的量. 有一种量,在考察过程中是不断变化的,可以取得不同的数值,我们把这一类量称为**变量**;另一类量在考察过程中保持不变,它取同样的数值,我们把这一类量称为**常量**. 变量的变化有跳跃性,如自然数由小到大变化、数列的变化等,而更多的则是在某个范围内变化,即该变量的取值可以是某个范围内的任何一个数. 变量取值范围常用区间来表示. 满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数的全体组成的集合称为**闭区间**,记为$[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\};$$

满足不等式 $a<x<b$ 的实数的全体组成的集合称为**开区间**,记为(a,b),即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\};$$

满足不等式 $a<x \leqslant b$(或 $a \leqslant x<b$)的实数的全体组成的集合称为**左(右)开右(左)闭区**

间,记为$(a,b]$(或$[a,b)$),即

$$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}\ (\text{或}[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\});$$

左开右闭区间与右开左闭区间统称为**半开半闭区间**,实数 a,b 称为区间的端点.

以上这些区间都称为**有限区间**. 数 $b-a$ 称为**区间的长度**. 此外还有**无限区间**:

$$(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R},$$
$$(-\infty,b]=\{x\,|\,-\infty<x\leqslant b\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\,|\,-\infty<x<b\},$$
$$[a,+\infty)=\{x\,|\,a\leqslant x<+\infty\},$$
$$(a,+\infty)=\{x\,|\,a<x<+\infty\}$$

等. 这里的符号“$-\infty$”与“$+\infty$”分别表示“负无穷大”与“正无穷大”.

邻域也是常用的一类区间.

设 x_0 是一个给定的实数,δ 是某一正数,称数集:

$$\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

为点 x_0 的 δ **邻域**,记作 $U(x_0,\delta)$,即 $U(x_0,\delta)=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$.

称点 x_0 为该**邻域的中心**,δ 为该**邻域的半径**,如图 1.1.1 所示. 称 $U(x_0,\delta)-\{x_0\}$ 为 x_0 的**去心 δ 邻域**,记作$\mathring{U}(x_0,\delta)$,即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$$

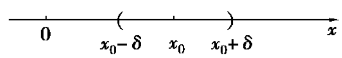


图 1.1.1

下面两个数集

$$\mathring{U}(x_0^-,\delta)=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0\},$$
$$\mathring{U}(x_0^+,\delta)=\{x\,|\,x_0<x<x_0+\delta\},$$

分别称为 x_0 的**左 δ 邻域**和**右 δ 邻域**. 当不需要指出邻域的半径时,我们用 $U(x_0)$,$\mathring{U}(x_0)$分别表示 x_0 的**某邻域**和 x_0 的**某去心邻域**;$\mathring{U}(x_0^-,\delta)$,$\mathring{U}(x_0^+,\delta)$分别表示 x_0 的**某左邻域**和 x_0 的**某右邻域**.

1.1.2　函数的概念

在高等数学中除了考察变量的取值范围之外,还要研究在同一个过程中出现的各种彼此相互依赖的变量,例如质点的移动距离与移动时间,曲线上点的纵坐标与该点的横坐标,弹簧的恢复力与它的形变,等等. 变量与变量之间的相互依赖关系刻画了客观世界中事物变化的内在规律,函数就是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

定义 1　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集,若存在确定的对应法则 f,对于任一 $x\in D$,都有唯一确定的变量 y 与之对应,则称 f 是定义在 D 上的函数,或称 y 是 x 的函数,记作

$$y=f(x),$$

其中,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,$f(x)$表示函数 f 在 x 处的**函数值**. 数集 D 称为函数 f 的**定**

义域,记为 $D(f)$;数集

$$\{y \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数 f 的**值域**,记作 $R(f)$.

通常函数是指对应法则 f,但习惯上用"$y=f(x), x\in D$"表示,此时理解为"由对应关系 $y=f(x)$ 所确定的函数 f". 确定一个函数有两个基本要素:定义域和对应法则.

定义域表示使函数有意义的范围,即自变量的取值范围. 在实际问题中,定义域可根据函数的实际意义来确定. 例如,在时间 t 的函数 $f(t)$ 中,t 通常取非负实数. 在理论研究中,若函数关系由数学公式给出,则函数的定义域就是使数学表达式有意义的自变量 x 的所有可以取得的值构成的数集.

对应法则是函数的具体表现,它表示两个变量之间的一种对应关系. 例如,气温曲线给出了气温与时间的对应关系,三角函数表列出了角度与三角函数值的对应关系. 因此,气温曲线和三角函数表表示的都是函数关系. 这种用曲线和列表给出函数的方法,分别称为**图示法**和**列表法**. 但在理论研究中,所遇到的函数多数由数学公式给出,称为**公式法**. 例如,初等数学中所学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数都是用公式法表示的函数.

从几何上看,在平面直角坐标系中,点集

$$\{(x,y) \mid y=f(x), x\in D(f)\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**图像**,如图 1.1.2 所示. 函数 $y=f(x)$ 的图像通常是一条曲线,$y=f(x)$ 也称为这条曲线的方程. 这样,函数的一些特性常常可借助于几何直观来发现;相反,一些几何问题,有时也可借助于函数来作理论探讨.

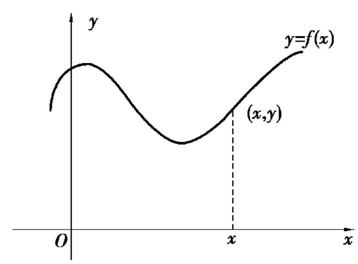


图 1.1.2

由函数概念的两个基本要素可知,一个函数由定义域 D 和对应法则 f 唯一确定,因此如果两个函数的定义域和对应法则相同,则称这两个函数相同(或相等).

例 1　判断下面函数是否相同,并说明理由.

(1) $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$;

(2) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$;

(3) $y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$;

(4) $y=2x+1$ 与 $x=2y+1$.

解　(1) 不相同. 因为 $y=x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,而 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域是 $x\neq 0$,即 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(2) 不相同. 虽然 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,但对应法则不同,$y=\sqrt{x^2}=|x|$.

(3) 相同. 虽然这两个函数的表现形式不同,但它们的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 与对应法则均相同,所以这两个函数相同.

(4) 相同. 虽然它们的自变量与因变量所用的字母不同,但其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 和对应法则均相同,所以这两个函数相同.

例 2　求函数 $y=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{1-x}$ 的定义域.

解 要使数学式子有意义,x 必须满足

$$\begin{cases} x+3\geqslant 0, \\ 1-x\neq 0, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x\geqslant -3, \\ x\neq 1. \end{cases}$$

因此函数的定义域为$[-3,1)\cup(1,+\infty)$.

例 3 设函数$f(x)=x^3-3x+5$,求$f(1)$, $f(x^2)$.

解 因为$f(x)$的对应规则为:$(\quad)^3-3(\quad)+5$,所以

$$f(1)=1^3-3\cdot 1+5=3,$$

$$f(x^2)=(x^2)^3-3\cdot(x^2)+5=x^6-3x^2+5.$$

例 4 已知$f(x+1)=x^2-x+1$,求$f(x)$.

解 令 $x+1=t$. 则 $x=t-1$,从而

$$f(t)=(t-1)^2-(t-1)+1=t^2-3t+3,$$

所以

$$f(x)=x^2-3x+3.$$

例 5 设函数$f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 1+x, & x>1, \end{cases}$求函数的定义域和$f(0.01)$, $f(4)$.

解 由 $0\leqslant x\leqslant 1$,$x>1$,可知函数的定义域为$[0,+\infty)$,

$$f(0.01)=2\sqrt{0.01}=0.2,\ f(4)=1+4=5.$$

注:例 5 表明一个函数在其定义域的不同子集上要用不同的表达式来表示对应法则,称这种函数为**分段函数**.

分段函数是一个函数由两个或两个以上的式子表示,不能将分段函数当作几个函数,并注意求分段函数的函数值时,要先判断自变量所属的范围. 下面给出一些今后常用的分段函数.

例 6 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$,值域 $R(f)=(-\infty,+\infty)$,如图 1.1.3 所示.

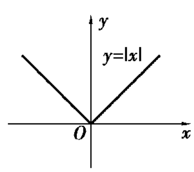


图 1.1.3

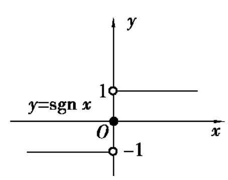


图 1.1.4

例 7 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0 \end{cases}$$

的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$,值域 $R(f)=\{-1,0,1\}$,如图 1.1.4 所示.

例 8 **最大取整函数** $y=[x]$,其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 例如,$\left[-\dfrac{1}{3}\right]=-1$,$[0]=0$,$[\sqrt{2}]=1$,$[\pi]=3$,等等. 函数 $y=[x]$的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$,值域 $R(f)=\{整数\}$. 一般地,$y=[x]=n$,$n\leqslant x<n+1$,$n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$,如图 1.1.5 所示.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

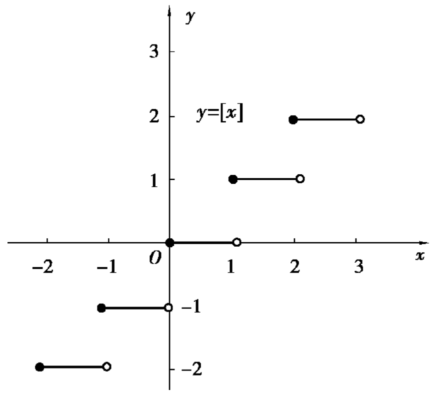


图 1.1.5

1.1.3　复合函数

在有些实际问题中，函数的自变量与因变量是通过另外一些变量才建立起它们之间的对应关系的，如高度为一定值的圆柱体的体积与其底面圆半径 r 的关系，就是通过另外一个变量“其底面圆面积 S”建立起来的对应关系. 这就得到复合函数的概念.

定义 2　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$；而函数 $u=g(x)$ 的定义域为 $D(g)$，值域为 $R(g)\subseteq D(f)$，则对任意 $x\in D(g)$，通过 $u=g(x)$，有唯一的 $u\in R(g)\subseteq D(f)$ 与 x 对应，进而通过 $y=f(u)$，又有唯一的 $y\in R(f)$ 与 u 对应. 这样，对任意 $x\in D(g)$，通过 u，有唯一的 $y\in R(f)$ 与之对应. 因此 y 是 x 的函数，称这个函数为 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 的**复合函数**，记作

$$y=(f\circ g)(x)=f(g(x)),x\in D(g),$$

u 称为中间变量.

例如由 $y=\sqrt{u}$，$u=x+1$ 可以构成复合函数 $y=\sqrt{x+1}$，为了使 u 的值域包含在 $y=\sqrt{u}$ 的定义域$[0,+\infty)$内，必须有 $x\in[-1,+\infty)$，所以复合函数 $y=\sqrt{x+1}$ 的定义域应为$[-1,+\infty)$. 又如复合函数 $y=\cos(1+x^2)$ 是由函数 $y=\cos u$，$u=1+x^2$ 复合而成的.

两个函数的复合也可推广到多个函数复合的情形.

在复合函数中可以出现两个或两个以上的中间变量，例如，函数 $y=\cos^2 u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2-3$ 可以构成复合函数 $y=\left(\cos\sqrt{x^2-3}\right)^2$，这里 u 和 v 都是中间变量.

例 9　写出下列函数的复合函数：

(1) $y=u^2$，$u=\cos x$；

(2) $y=\cos u$，$u=x^2$.

解　(1) 将 $u=\cos x$ 代入 $y=u^2$ 得所求复合函数为 $y=\cos^2 x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$；

(2) 将 $u=x^2$ 代入 $y=\cos u$ 得所求复合函数为 $y=\cos x^2$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

注：并非任意两个函数都能复合. 例如 $y=\sqrt{u-2}$，$u=\sin x$ 就不能复合.

例 10　指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{1+x^2}$；

(2) $y=\sqrt{\sin x^2}$；

(3) $y=2^{\tan 2x}$.

解 (1) $y=\sqrt{1+x^2}$由 $y=\sqrt{u}$, $u=1+x^2$ 复合而成;

(2) $y=\sqrt{\sin x^2}$由 $y=\sqrt{u}$, $u=\sin v$, $v=x^2$ 复合而成;

(3) $y=2^{\tan 2x}$由 $y=2^u$, $u=\tan v$, $v=2x$ 复合而成.

例 11 设$f(x)=\dfrac{x}{x+1}(x\neq -1)$,求$f(f(f(x)))$.

解 令 $y=f(w)$, $w=f(u)$, $u=f(x)$,则$f(f(f(x)))$是通过两个中间变量 w 和 u 复合而成的复合函数,因为

$$w=f(u)=\frac{u}{u+1}=\frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1}=\frac{x}{2x+1}, x\neq -\frac{1}{2};$$

$$y=f(w)=\frac{w}{w+1}=\frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1}+1}=\frac{x}{3x+1}, x\neq -\frac{1}{3};$$

所以

$$f(f(f(x)))=\frac{x}{3x+1}, x\neq -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}.$$

1.1.4 反函数

函数关系的实质就是从定量分析的角度来描述变量之间的相互依赖关系. 但在研究过程中,哪个量作为自变量,哪个量作为因变量(函数)是由具体问题来决定的.

定义 3 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 W. 如果对于 W 中的任一数值 y,都有 D 中唯一的一个 x 值,满足$f(x)=y$,将 y 与 x 对应,则所确定的以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$称为函数 $y=f(x)$的**反函数**. 记作 $x=f^{-1}(y)$, $y\in W$. 相对于反函数而言,原来的函数称为**直接函数**.

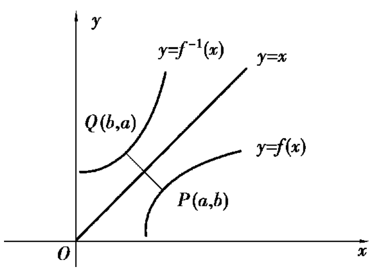


图 1.1.6

从几何上看,函数 $y=f(x)$与其反函数 $x=f^{-1}(y)$有同一图像,通常将反函数 $x=f^{-1}(y)$写成 $y=f^{-1}(x)$. 今后,我们称 $y=f^{-1}(x)$为 $y=f(x)$的反函数. 此时,由于对应关系 f^{-1}未变,只是自变量与因变量交换了记号,因此反函数 $y=f^{-1}(x)$与直接函数 $y=f(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称,如图 1.1.6 所示.

值得注意的是,并不是所有函数都存在反函数,例如函数 $y=x^2$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$,但对每一个 $y\in(0,+\infty)$,有两个 x 值即 $x_1=\sqrt{y}$和 $x_2=-\sqrt{y}$与之对应,因此 x 不是 y 的函数,从而 $y=x^2$ 不存在反函数 .

定理(反函数存在定理) 单调函数 $y=f(x)$必存在单调的反函数 $y=f^{-1}(x)$,且具有相同的单调性.

例如,函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,0]$上单调减少,其反函数 $y=-\sqrt{x}$也是单调减少;$y=x^2$ 在$[0,+\infty)$上单调增加,其反函数 $y=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$也是单调增加.

求反函数的一般步骤：由方程 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$，再将 x 与 y 对换，即得所求的反函数为 $y=f^{-1}(x)$.

例 12　求函数 $y=2x-3$ 的反函数 .

解　由 $y=2x-3$ 解得 $x=\dfrac{y+3}{2}$，故所求反函数为

$$y=\frac{x+3}{2}.$$

例 13　求函数 $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$ 的反函数 .

解　令 $u=\sqrt{1+4x}$，则 $y=\dfrac{1-u}{1+u}$，故 $u=\dfrac{1-y}{1+y}$，即得 $\sqrt{1+4x}=\dfrac{1-y}{1+y}$.

解得
$$x=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2-1\right]=-\frac{y}{(1+y)^2}.$$

即得所求的反函数为：$y=-\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

例 14　设函数 $f(x+1)=\dfrac{x}{x+1}$，$(x\neq-1)$，求 $f^{-1}(x+1)$.

解　函数 $y=f(x+1)$ 可看成由 $y=f(u)$，$u=x+1$ 复合而成 . 所求的反函数 $y=f^{-1}(x+1)$ 可看成由 $y=f^{-1}(u)$，$u=x+1$ 复合而成 . 因为

$$f(u)=\frac{x}{x+1}=\frac{u-1}{u},u\neq0,$$

即 $y=\dfrac{u-1}{u}$，从而，$u(y-1)=-1$，$u=\dfrac{1}{1-y}$.

所以
$$y=f^{-1}(u)=\frac{1}{1-u},$$

因此
$$f^{-1}(x+1)=\frac{1}{1-(x+1)}=-\frac{1}{x},x\neq0.$$

1.1.5　函数的几种特性

1) 函数的有界性

定义 4　设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，若存在某个正数 L，使得对任一 $x\in D$ 有

$$|f(x)|\leqslant L,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**，也称 $f(x)$ 是 D 上的**有界函数**. 否则，称 $f(x)$ 在 D 上**无界**，也称 $f(x)$ 是 D 上的**无界函数**.

例如，函数 $y=\sin x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对任一 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $|\sin x|\leqslant1$.

注：函数的有界性与 x 取值的区间 D 有关. 例如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上无界，但它在区间 $[1,+\infty)$ 上有界.

2) 函数的单调性

定义 5　设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，若对 D 中的任意两点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\,[\text{或}\,f(x_1)\geqslant f(x_2)],$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**单调增加**(或**单调减少**)的. 若上述不等式中的不等号为严格不等号,则称为**严格单调增加**(或**严格单调减少**)的. 在定义域上单调增加或单调减少的函数统称为**单调函数**;严格单调增加或严格单调减少的函数统称为**严格单调函数**,如图 1.1.7 所示.

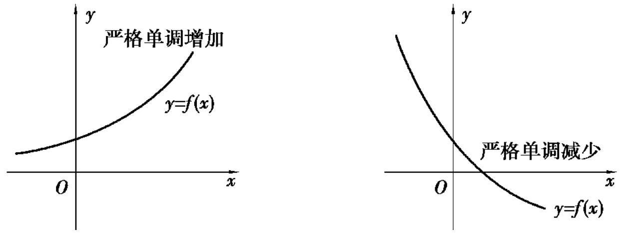


图 1.1.7

例如,函数 $f(x)=x^3$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格单调增加的;函数 $f(x)=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 内是严格单调减少的;$y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不是单调函数,但在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少函数,在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加函数.

从几何上看,若 $y=f(x)$ 是严格单调函数,则任意一条平行于 x 轴的直线与它的图像最多交于一点,因此 $y=f(x)$ 有反函数.

3) 函数的奇偶性

定义 6 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若对任意的 $x\in D$,都有

$$f(-x)=-f(x),$$

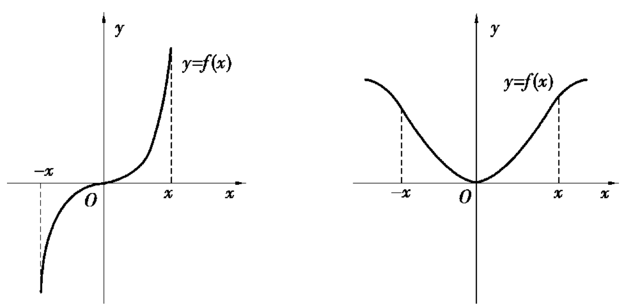
则称 $f(x)$ 是 D 上的**奇函数**;若对任意的 $x\in D$,都有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 是 D 上的**偶函数**.

例如,$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数,$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是偶函数;而 $y=x^2+x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上既不是奇函数也不是偶函数,这样的函数称为非奇非偶函数.

注:在直角坐标系中,奇函数的图像关于原点中心对称,偶函数的图像关于 y 轴对称,如图 1.1.8 所示.



(a)奇函数　　(b)偶函数

图 1.1.8

例 15 讨论函数 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 的奇偶性.

解 函数 $f(x)$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 是对称区间,因为

$$f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数.

例 16　判断函数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的奇偶性.

解　因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，它关于原点对称，又因为

$$f(-x)=(-x)\sin\left(\frac{1}{-x}\right)=x\sin\frac{1}{x}=f(x),$$

所以 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 是偶函数.

4）函数的周期性

定义 7　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个不为零的常数 T，使得对任意 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，并且使

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，其中常数 T 称为 $f(x)$ 的**周期**，通常函数的周期是指它的**最小正周期**，即使上式成立的最小正数 T（如果存在）.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 的周期为 2π；$f(x)=\tan x$ 的周期是 π.

注：周期函数的图形可以由它在一个周期的区间 $[a,a+T]$ 内的图形沿 x 轴向左、右两个方向平移后得到. 由此可见，对于周期函数的性态，只需要在长度为周期 T 的任一区间上考虑即可.

并不是所有函数都有最小正周期，例如，常量函数 $f(x)=C$ 是周期函数，但此函数没有最小正周期.

1.1.6　基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**，它们是研究各种函数的基础. 为了读者学习的方便，下面再对这几类函数作一下简单介绍.

1）幂函数

函数

$$y=x^\mu\ (\mu\text{ 是常数})$$

称为**幂函数**.

幂函数 $y=x^\mu$ 的定义域随 μ 的不同而异，但无论 μ 为何值，函数在 $(0,+\infty)$ 内总是有定义的.

当 $\mu>0$ 时，$y=x^\mu$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，其图像过点 $(0,0)$ 及点 $(1,1)$，图 1.1.9 列出了 $\mu=\dfrac{1}{2}$，$\mu=1$，$\mu=2$ 时幂函数在第一象限的图像.

当 $\mu<0$ 时，$y=x^\mu$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调减少的，其图像通过点 $(1,1)$，图 1.1.10 列出了 $\mu=-\dfrac{1}{2}$，$\mu=-1$，$\mu=-2$ 时幂函数在第一象限的图像.

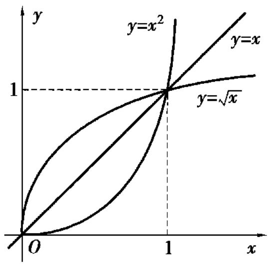


图 1.1.9

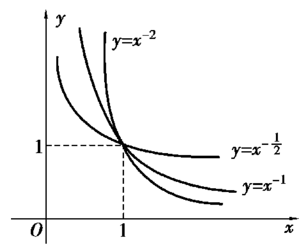


图 1.1.10

2) 指数函数

函数

$$y=a^x\ (a\ \text{是常数且}\ a>0,a\neq 1)$$

称为**指数函数**.

指数函数 $y=a^x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,图像通过点$(0,1)$,且总在 x 轴上方.

当 $a>1$ 时,$y=a^x$ 是单调增加的;当 $0<a<1$ 时,$y=a^x$ 是单调减少的,如图 1.1.11 所示.

以常数 e = 2.718 281 82…为底的指数函数 $y=e^x$ 是科技中常用的指数函数.

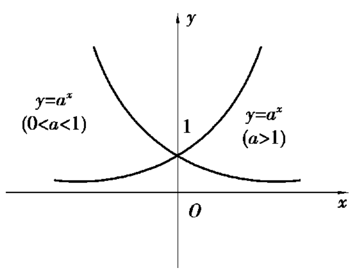


图 1.1.11

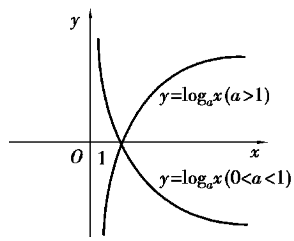


图 1.1.12

3) 对数函数

指数函数 $y=a^x$ 的反函数,记作

$$y=\log_a x\ (a\ \text{是常数且}\ a>0,a\neq 1),$$

称为**对数函数**.

对数函数 $y=\log_a x$ 的定义域为$(0,+\infty)$,图像过点$(1,0)$. 当 $a>1$ 时,$y=\log_a x$ 单调增加;当 $0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 单调减少,如图 1.1.12 所示.

科学技术中常用以 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$,它被称为**自然对数函数**,简记作 $y=\ln x$.

另外以 10 为底的对数函数 $y=\log_{10} x$ 也是常用的对数函数,简记作 $y=\lg x$,称为**常用对数**.

4) 三角函数

常用的三角函数有:

正弦函数:$y=\sin x$,

余弦函数:$y=\cos x$,

正切函数:$y=\tan x$,

余切函数:$y=\cot x$,

其中自变量 x 以弧度作单位来表示.

它们的图形如图 1.1.13—图 1.1.16 所示，分别称为**正弦曲线**、**余弦曲线**、**正切曲线**和**余切曲线**.

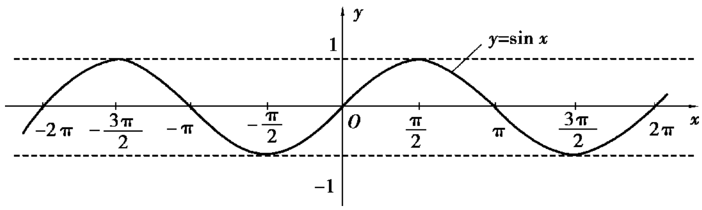


图 1.1.13

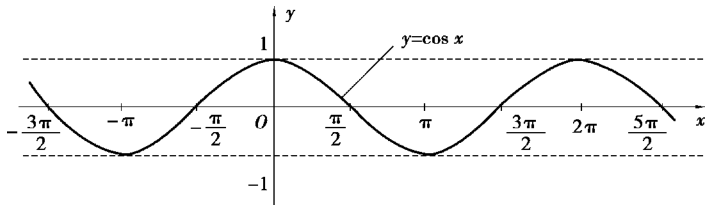


图 1.1.14

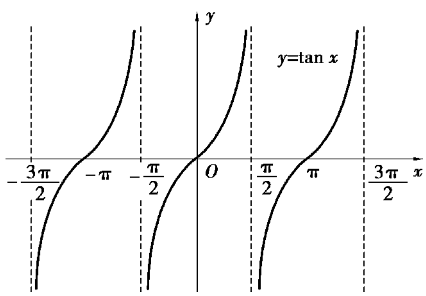


图 1.1.15

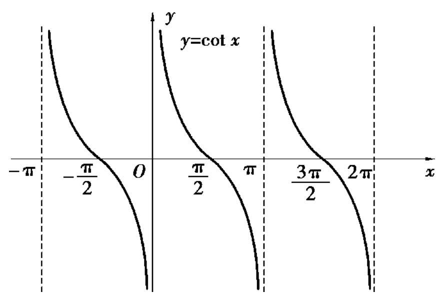


图 1.1.16

正弦函数和余弦函数都是以 2π 为周期的周期函数，它们的定义域都为 $(-\infty,+\infty)$，值域都为 $[-1,1]$. 正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数.

由于 $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，所以，把正弦曲线 $y=\sin x$ 沿 x 轴向左移动 $\frac{\pi}{2}$ 个单位，就获得余弦曲线 $y=\cos x$.

正切函数 $y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ 的定义域为

$$D(f)=\left\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\text{ 为整数}\right\}$$

余切函数 $y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ 的定义域为

$$D(f)=\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq n\pi, n\text{ 为整数}\}.$$

正切函数和余切函数的值域都是 $(-\infty,+\infty)$，它们都是以 π 为周期的函数，且都是奇函数.

另外，常用的三角函数还有

正割函数：$y=\sec x$；余割函数：$y=\csc x$.

它们都是以 2π 为周期的周期函数，且

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com