## 内容提要

本书主要介绍有限单元法的基本理论、格式与求解方法,包括平面、三维应力、等参数单元,以及杆系结构单元、薄板和薄壳问题。另外,也简要介绍了有限元动力分析,并在附录中介绍了作为有限元理论基础的插值函数、变分和能量原理等。

本书可作为土木、水利、力学类专业本科教材,也可作为研究生、工程技术人员学习有限单元法的参考用书。

**图书在版编目(CIP)数据**

有限单元法及应用/赵冬,张卫喜,毛筱霏编著. --重庆:重庆大学出版社,2022.8

高等教育土木类专业系列教材

ISBN 978-7-5689-3214-1

Ⅰ.①有… Ⅱ.①赵… ②张… ③毛… Ⅲ.①有限元法—高等学校—教材 Ⅳ.①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 072849 号

高等教育土木类专业系列教材

**有限单元法及应用**

编著 赵 冬 张卫喜 毛筱霏

策划编辑:王 婷

责任编辑:陈 力 版式设计:王 婷

责任校对:夏 宇 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:饶帮华

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编:401331

电话:(023)88617190 88617185(中小学)

传真:(023)88617186 88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn(营销中心)

全国新华书店经销

重庆市联谊印务有限公司印刷

*

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:12 字数:286 千

2022 年 8 月第 1 版 2022 年 8 月第 1 次印刷

印数:1—2 000

ISBN 978-7-5689-3214-1 定价:39.00 元

---

# 前　言

有限单元法自20世纪70年代兴起以来,已成为工程结构的数值分析方法中重要的方法之一。本书以能量原理作为理论基础,结合弹性理论中的平面和三维应力问题,对有限单元法中位移法的基本原理、格式与求解方法做了详尽的论述。并以此为基础,给出了杆系结构的杆和梁单元,介绍了薄板和薄壳基本方程和常见单元以及有限元动力分析初步。

本书结合作者多年来从事有限元法的教学工作和工程实践,对于有限元法的学习方法,既重视基本原理,也需与专业知识和工程应用结合,才能做到学以致用。因此,本书编写力求简洁,注重基本概念和逻辑关系,对一些纯理论型的数学推证则不做过多讨论。

本书的初稿作为西安建筑科技大学课程讲义和教材已使用了十余年,其间参考了大量资料并逐年修改、补充和完善。本书既可作为土木、水利、力学类专业本科教材,也可作为研究生、工程技术人员学习有限单元法的参考书。

由于编者水平有限,书中不当之处,恳请读者不吝指正。

编　者

2021年8月

# 主要符号

| | |
|---|---|
| $A$ | 面积或横截面面积 |
| $\boldsymbol{B}$ | 单元几何矩阵 |
| $\boldsymbol{c}$ | 单元阻尼矩阵 |
| $\boldsymbol{C}$ | 整体结构阻尼矩阵 |
| $\boldsymbol{D}$ | 弹性矩阵 |
| $E$ | 杨氏弹性模量 |
| $\boldsymbol{F}_L$ | 整体结点荷载列阵 |
| $\boldsymbol{F}_L^e$ | 单元等效结点荷载列阵 |
| $\boldsymbol{f}, f_{ix}, f_{iy}, f_{iz}$ | 体力矢量及其分量 |
| $\bar{\boldsymbol{f}}, \bar{f}_{ix}, \bar{f}_{iy}, \bar{f}_{iz}$ | 面力矢量及其分量 |
| $G$ | 剪切弹性模量 |
| $I$ | 惯性矩 |
| $I_p$ | 极惯性矩 |
| $\boldsymbol{J}$ | 雅可比矩阵 |
| $\boldsymbol{k}$ | 单元刚度矩阵 |
| $\boldsymbol{K}$ | 整体刚度矩阵 |
| $l, m, n$ | 边界外法线方向余弦 |
| $L_1, L_2, L_3 (L_4)$ | 三角形面积坐标,四面体体积坐标 |
| $\boldsymbol{m}$ | 单元质量矩阵 |
| $\boldsymbol{M}$ | 板壳问题中的内力列阵 |
| $M_x, M_y, M_{xy}$ | 板壳中的弯矩与扭矩 |
| $N_i$ | 形函数 |
| $\boldsymbol{N}$ | 形函数矩阵 |
| $n, s$ | 边界的法向、切向 |
| $U$ | 系统或单元的应变能 |
| $\boldsymbol{S}$ | 应力转换矩阵 |
| $\boldsymbol{T}$ | 坐标转换矩阵 |
| $t$ | 板壳或平面单元的厚度 |
| $\boldsymbol{u}$ | 位移函数列阵 |
| $\boldsymbol{u}^*$ | 虚位移函数列阵 |

| | |
|---|---|
| $u,v,w$ | 位移分量 |
| $u_i,v_i,w_i$ | 结点位移分量 |
| $\dot{\boldsymbol{u}}$ | 速度列阵 |
| $\ddot{\boldsymbol{u}}$ | 加速度列阵 |
| $U^*$ | 余能 |
| $\boldsymbol{\upsilon}$ | 阻尼系数 |
| $W^*,\delta W$ | 虚功 |
| $\alpha$ | 线膨胀系数 |
| $\boldsymbol{\delta}^e$ | 单元结点位移列阵 |
| $\boldsymbol{\delta}$ | 整体结点位移列阵 |
| $\boldsymbol{\varepsilon};\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{xy},\gamma_{yz},\gamma_{zx}$ | 应变列阵及其分量 |
| $\boldsymbol{\kappa}$ | 板壳的曲率列阵 |
| $\kappa_x,\kappa_y,\kappa_{xy}$ | 板壳中面的曲率、扭率 |
| $\theta_x,\theta_y,\theta_z$ | 绕 $x$ 轴、$y$ 轴和 $z$ 轴的转角 |
| $\mu$ | 泊松比 |
| $\Pi_S$ | 各种能量的泛函 |
| $\frac{1}{\rho}$ | 曲率 |
| $\boldsymbol{\sigma};\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{zx}$ | 应力向量及其分量 |
| $[\phi]$ | 方向余弦矩阵 |
| $\xi,\eta,\zeta$ | 局部坐标 |
| $\boldsymbol{\Psi}$ | 板弯曲问题转角场 |

# 目　录

# 1

# 绪　论

## 1.1　引言

在工程结构分析中,有限元方法已成为数值求解的强有力工具,所涉及的领域从土木工程、机械、航空航天等传统固体力学领域的变形和应力分析,到热流、磁通量、渗流等流动问题的场分析。随着计算机技术和计算机辅助工程技术的发展,可以较为便捷地对许多复杂问题进行建模分析,使结构分析发生了质的飞跃。

从应用数学的角度考虑,有限单元法的基本思想可以追溯到应用数学家(如 R. Courant)、物理学家(J. L. Synge)和工程师(J. H. Argyris 和 S. Kelsey 等)。其中 R. Courant(1943)首先尝试应用在一系列三角形区域定义的分片连续函数和最小位能原理相结合,来求解 St. Venant 扭转问题。此后,不少应用数学家、物理学家和工程师分别从不同角度对有限元法的离散理论、方法及应用进行了研究。M. J. Turner, Ray W. Clough(1956)等人将刚架分析中的位移法推广到弹性理论平面问题,并用于飞机结构的分析。他们首次给出了用三角形单元求解平面应力问题的正确解答。三角形单元的特性刚度矩阵和结构的求解方程是由弹性理论的方程通过直接刚度法确定的。他们的研究工作开启了利用电子计算机求解复杂弹性理论问题的新阶段。1960 年 Ray W. Clough 进一步求解了平面弹性问题,并第一次提出来“Finite Element Method(有限单元法)”的名词,使人们更清楚地认识到有限单元法的特性和作用。

解决实际工程问题的有限元法的发展始于数字计算机的出现,换言之,数字计算机的使用实现了有限元法的实用性和普遍适用性。随着计算科学和技术的快速发展,有限元法的通用性和有效性愈加突出,受到了工程技术界的高度重视。近 40 年来,随着与计算机科学与技

术的深度融合,有限元法在理论及方法的研究、计算机程序的开发及应用领域的开拓等方面均取得了根本性的发展,已成为当今工程结构分析中应用最广泛的数值计算方法,也成为计算机辅助设计(CAD)、计算机辅助工程(CAE)和计算机辅助制造(CAM)的重要组成部分。

对于工程结构的分析,作为一种求解微分方程(组)定解问题的数值方法,有限元法以弹性理论的研究方法和基本方程作为基础。

## 1.2 弹性分析的数值解法

勒夫(A. E. H. Love)(1944)在其经典著作《*A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*》中首先指出:“数学弹性理论致力于研究某一受平衡力系作用或处于轻微的内部相对运动状态下的固体,试图把它的内部应变或相对位移纳入计算,并努力为建筑、工程以及所有构造材料为固体的工艺方面,求得实用上重要的结果。”这似乎已经成为弹性理论的一个标准定义。

弹性理论对于应力、应变和位移这些物理量,通过几何学、物理学和静力学的分析,建立了这些变量需要满足的弹性域内控制方程(一般表达式多为偏微分方程组的形式),根据弹性域所受外力与边界约束状况确定问题的定解条件。

而其求解方法可大致分为两大类:其一,对于各类给定的问题,求解上述控制方程,得到各个物理量在弹性域内的连续函数解,即解析解(精确解),这类方法称为解析解法。然而,虽经数学、力学工作者长期的努力,也只是对少数几何形状规则、荷载与边界比较简单的问题得到了解答。对于多数问题,尤其是在工程实际问题中,当弹性域或者边界条件较为复杂时,通常难以得到解答。其二,为此,对已建立的微分方程需要寻求近似解法——数值解法。

在弹性力学问题中,变分法是被广泛应用的数值解法之一。

变分法是将待求函数应满足的一定的微分方程和定解条件这样的提法变为待求函数是一定的泛函(函数的函数)的极值函数,也就是说,令泛函取极值的函数就是微分方程的解。用这种方法寻求近似解,首先要针对给定问题推导出相应的泛函,泛函一般表达式为求解区域内的定积分形式;然后设出待求函数(在泛函中包含的函数)的试探函数,试探函数中包含已知的函数系列和系列中每个待求系数;把试探函数代入泛函,对其中的已知函数进行运算后,泛函中未定的也只有各个待定系数,泛函也就变成了待求系数的多变量函数了,泛函的极值问题就变成了函数的极值问题;利用多变量函数求极值点的条件可以推导出求待定函数的代数方程组。

变分法在弹性力学问题求解中曾成功得到了应用,但因其对工程中几何形状和边界条件较为复杂的各种问题仍难以得到解答,因而未能在工程问题中得到广泛应用。自 20 世纪 70 年代以来,依托电子计算机的高速发展和普及而迅速发展的有限单元法,则很好地弥补了上述方法的缺陷,极大地推动了数值计算的应用。

图 1.1 给出了弹性分析的主要方法。

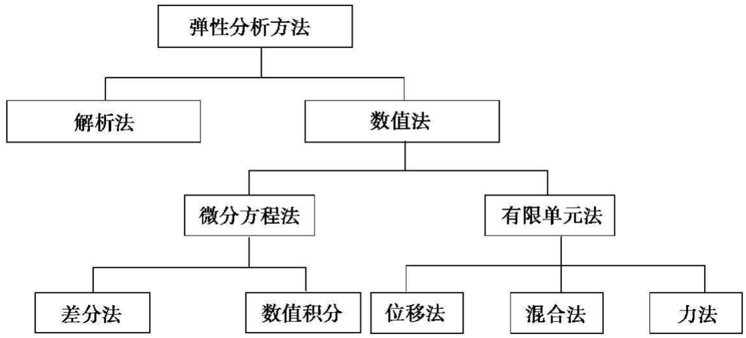


图 1.1　结构分析常用方法

## 1.3　有限单元法基本概念

从选择基本未知量的角度可分为 3 类:位移法、力法和混合法,其中以位移法应用较为广泛。本书着重介绍基于弹性理论的以位移为未知量的有限单元法的基本理论,及其在结构分析中的初步应用。

这里先介绍经典的变分问题近似解法——里兹法。里兹法是先假设未知解为带有未知参数的已知函数(试函数)。代入泛函表达式后得到由未知参数来表示的泛函。应用变分原理,根据泛函的极值条件,得到 $n$ 个线性代数方程。解出未知参数,也就得到了问题的近似解答。这种方法可以说是通过对函数的“离散”而得到方程组的。它的困难在于所试选函数必须满足整个区域的边界条件,这在一般情况下是十分困难的,有时甚至是难以做到的。

有限单元法的基本思想,就是对求解的弹性域进行离散化,即将具有无限多个自由度的连续体,化为有限多个自由度的结构体系。具体来说,就是将具有无限自由度的整个弹性域用有限多个、有限大小(微小)且相互之间仅在有限多个点处连接的一系列区域的集合体来替代(图 1.2)。这些微小的区域称作单元,各单元间相互连接点称作结点。整体结构将以结点位移参数作为基本未知量(有限自由度)。这一区域剖分的过程称作结构**离散化过程**,即建立有限元数值分析模型。

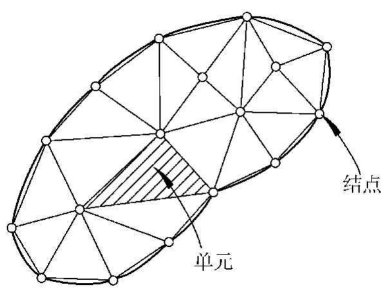


图 1.2　连续介质的离散过程

其次是考虑单元的平衡。在单元区域内设置一个函数表示任意点位移随位置变化形态,这种假设的试函数称为位移模式,在一般情况下,它应当满足单元之间位移的连续性。按照函数插值理论,将单元内任意点的位移通过一定的函数关系用结点位移参数来表示,即位移插值函数。随后则从分析单元入手,采用能量原理建立单元基本方程。这一过程称作**单元分析**。

再把所有单元集合起来,进行整体受力分析,得到一组以结点位移参数为基本未知量(自由度)的多元代数方程组,称为结构或求解区域的有限单元法整体分析方程。结合位移边界

条件即可求解结点位移参数。这一过程称为**整体分析**。

解出结点位移参数后，可根据单元位移插值函数以及弹性理论基本方程得出弹性域任意点的应变和应力。

将整个弹性域剖分和以有限的结点位移参数为基本未知量是有限单元法的基本构想和分析问题的出发点。

对于实际工程结构的多样性、荷载与边界约束的复杂性，有限单元法解的基本思想就是采用基于能量原理的变分方法将难以求解的弹性理论基本方程中多元偏微分方程组变换为求解多元代数方程组，使得结构分析易于实现。

## 1.4 小位移弹性理论基本方程的矩阵表示

矩阵运算是有限单元法采用的基本方法之一。本节将弹性理论基本方程和边界条件等采用矩阵形式表述。

### ► 1.4.1 平衡微分方程

弹性体 $V$ 域内任一点的平衡微分方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+f_x&=0\\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+f_y&=0\\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+f_z&=0\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

平衡微分方程用矩阵表示为

$$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{f} \tag{1.2}$$

式中 $\boldsymbol{L}_1$——平衡方程中的微分算子矩阵；

$\boldsymbol{\sigma}$——应力列阵或应力向量；

$\boldsymbol{f}$——体力列阵或体力向量。

$$\boldsymbol{L}_1=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\end{bmatrix} \tag{1.3}$$

在物体内任一点处，其内力状态可由 6 个应力分量来定义

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy}]^{\mathrm{T}} \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = [f_x \quad f_y \quad f_z]^{\mathrm{T}} \tag{1.5}$$

对于平面问题,平衡微分方程简化为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \end{aligned}\right\}$$

则(1.2)式中

$$\boldsymbol{L}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = [f_x \quad f_y]^{\mathrm{T}}$$

### ► 1.4.2　几何方程

在小变形条件下,弹性体内任一点的应变-位移方程为:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.6}$$

可用矩阵表示为:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{u} \tag{1.7}$$

式中　$\boldsymbol{L}$——微分算子矩阵;

$\boldsymbol{\varepsilon}$——应变列阵或称为应变向量;

$\boldsymbol{u}$——位移列阵或位移向量。

$$
\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\
0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\
0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\
\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\
\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0
\end{bmatrix} \tag{1.8}
$$

在物体内的任一点处,其应变状态由 6 个应变分量来定义:

$$
\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}
\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy}
\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} & \gamma_{xy}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{1.9}
$$

$$
\boldsymbol{u}=\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} u & v & w\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{1.10}
$$

对于平面问题,几何方程可简化为

$$
\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.11}
$$

则式(1.7)中

$$
\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \tag{1.12}
$$

$$
\boldsymbol{u}=\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\
0 & \frac{\partial}{\partial y} \\
\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}
\end{bmatrix} \tag{1.13}
$$

### ▶ 1.4.3 物理方程(应力-应变关系)

各向同性材料线弹性体的应力与应变关系,即物理方程为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]\\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]\\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}\\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz}\\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx}\end{aligned}\right\} \tag{1.14a}$$

也可表示为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_x\\ \sigma_y &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_y\\ \sigma_z &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_z\\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}\\ \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}\end{aligned}\right\} \tag{1.14b}$$

其中

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

式中 $\lambda$——拉梅(Lame)常数;

$E$——弹性模量(也称杨氏模量);

$\mu$——泊松比;

$G$——剪切模量,且

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{1.15}$$

物理方程用矩阵表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.16}$$

式中,$\boldsymbol{D}$ 为弹性矩阵

$$
\boldsymbol{D}=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \tag{1.17}
$$

对于平面应力问题,弹性矩阵可简化为

$$
\boldsymbol{D}=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{1.18}
$$

对于平面应变问题,弹性矩阵简化为

$$
\boldsymbol{D}=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \tag{1.19}
$$

可以看到,两类平面问题其弹性矩阵是不同的。若在平面应力问题弹性矩阵式(1.18)中将 $E$ 换成$\frac{E}{1-\mu^2}$, $\mu$ 换成$\frac{\mu}{1-\mu}$,就能得到平面应变问题弹性矩阵(1.19)。

因此,设

$$
E'=\frac{E}{1-\mu^2},\quad \mu'=\frac{\mu}{1-\mu} \tag{1.20}
$$

则平面应变问题弹性矩阵可表述为

$$
\boldsymbol{D}=\frac{E'}{1-(\mu')^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu' & 0 \\ \mu' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu'}{2} \end{bmatrix} \tag{1.21}
$$

可以看出,式(1.21)与式(1.18)在形式上完全相似,故对于平面问题弹性矩阵在后续的表述中均采用式(1.18)的形式。

表 1.1 和表 1.2 分别给出了不同结构问题中对应的基本量与弹性矩阵。

表 1.1 各类结构问题中对应的物理变量

| 结构问题 | 位移分量 $\boldsymbol{u}$ | 应变分量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ | 应力分量 $\boldsymbol{\sigma}$ |
|---|---|---|---|
| 杆/桁架 | $u$ | $\varepsilon_x$ | $\sigma_x$ |
| 纯弯曲梁 | $w$ | $\kappa_x$ | $M_x$ |
| 平面应力问题 | $[u \quad v]^{\mathrm{T}}$ | $[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^{\mathrm{T}}$ | $[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^{\mathrm{T}}$ |
| 平面应变问题 | $[u \quad v]^{\mathrm{T}}$ | $[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^{\mathrm{T}}$ | $[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^{\mathrm{T}}$ |
| 轴对称问题 | $[u \quad v]^{\mathrm{T}}$ | $[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \quad \varepsilon_z]^{\mathrm{T}}$ | $[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \quad \sigma_z]^{\mathrm{T}}$ |
| 三维应力问题 | $[u \quad v \quad w]^{\mathrm{T}}$ | $[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^{\mathrm{T}}$ | $[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^{\mathrm{T}}$ |
| 薄板弯曲问题 | $w$ | $[\kappa_x \quad \kappa_y \quad \kappa_{xy}]^{\mathrm{T}}$ | $[M_x \quad M_y \quad M_{xy}]^{\mathrm{T}}$ |

表 1.2 各类结构问题中对应的弹性矩阵

| 结构问题 | 弹性矩阵 $\boldsymbol{D}$ |
|---|---|
| 杆/桁架 | $E$ |
| 纯弯曲梁 | $EI$ |
| 平面应力 | $\dfrac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}$ |
| 平面应变 | $\dfrac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \dfrac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}$ |
| 轴对称 | $\dfrac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\mu}{1-\mu} & 0 & \dfrac{\mu}{1-\mu} \\ \dfrac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & \dfrac{\mu}{1-\mu} \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ \dfrac{\mu}{1-\mu} & 1-\mu & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |

续表

| 结构问题 | 弹性矩阵 $\boldsymbol{D}$ |
| --- | --- |
| 三维应力 | $\dfrac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\mu}{1-\mu} & \dfrac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\mu}{1-\mu} & 1 & \dfrac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\mu}{1-\mu} & \dfrac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}$ |
| 板弯曲 | $\dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}$ |

### ► 1.4.4 边界条件

(1)应力边界条件

在受已知力作用的边界 $S_\sigma$ 上,应力与面力满足的条件为

$$\left.\begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} &= \bar{f}_x \\ l\tau_{yx} + m\sigma_y + n\tau_{yz} &= \bar{f}_y \\ l\tau_{zx} + m\tau_{zy} + n\sigma_z &= \bar{f}_z \end{aligned}\right\} \tag{1.22}$$

式中 $l,m,n$——分别为边界外法线方向余弦;

$\bar{f}_x,\bar{f}_y,\bar{f}_z$——分别为已知面力分量。

应力边界条件用矩阵表示为

$$\boldsymbol{n\sigma} = \bar{\boldsymbol{f}} \tag{1.23}$$

式中 $\boldsymbol{n}$——方向余弦阵;

$\bar{\boldsymbol{f}}$——面力列阵。

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & m & 0 & n \\ 0 & m & 0 & l & n & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & m & l \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{f}} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \\ \bar{f}_z \end{Bmatrix} = [\bar{f}_x \quad \bar{f}_y \quad \bar{f}_z]^{\mathrm{T}} \tag{1.24}$$

对于平面问题

$$\left.\begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{xy} &= \bar{f}_x \\ m\sigma_y + l\tau_{xy} &= \bar{f}_y \end{aligned}\right\}$$

则

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} l & m \\ m & l \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{f}} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{Bmatrix} = [\bar{f}_x \quad \bar{f}_y]^{\mathrm{T}} \tag{1.25}$$

(2)位移边界条件

在位移已知的边界 $S_u$ 上,位移函数应等于已知位移,即

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} \tag{1.26}$$

式中 $\bar{\boldsymbol{u}}$——已知位移向量。

对于平面问题

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} \tag{1.27}$$

### ► 1.4.5 弹性理论问题解答

弹性理论问题的定解条件为:弹性体的应力 $\boldsymbol{\sigma}$、应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 以及位移 $\boldsymbol{u}$,应当满足弹性理论 3 组基本方程,包括平衡微分方程[式(1.2)]、几何方程[式(1.7)]以及物理方程[式(1.16)],同时满足所有边界条件,包括应力边界条件(1.26)和位移边界条件(1.23),即为求解偏微分方程的边值问题。

图 1.3 表示了弹性力学定解条件。

$$\text{边值问题}\begin{cases} \text{基本方程}\begin{cases} \text{平衡方程} & \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f} \\ \text{几何方程} & \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{u} \\ \text{物理方程} & \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} \end{cases} \\ \text{边界条件}\begin{cases} \text{应力边界条件} & \boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{f}} \\ \text{位移边界条件} & \boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \end{cases} \end{cases}$$

图 1.3 弹性力学定解条件

可以看出,对于三维问题,在 3 组 15 个基本方程中包含了 15 个未知量,即 6 个应力分量;6 个应变分量和 3 个位移分量。于是,弹性理论问题解答就是在边界条件下求解这 15 个方程。对于平面问题 3 组基本方程为 8 个,包含 8 个未知量,即 3 个应力分量;3 个应变分量和 2 个位移分量。