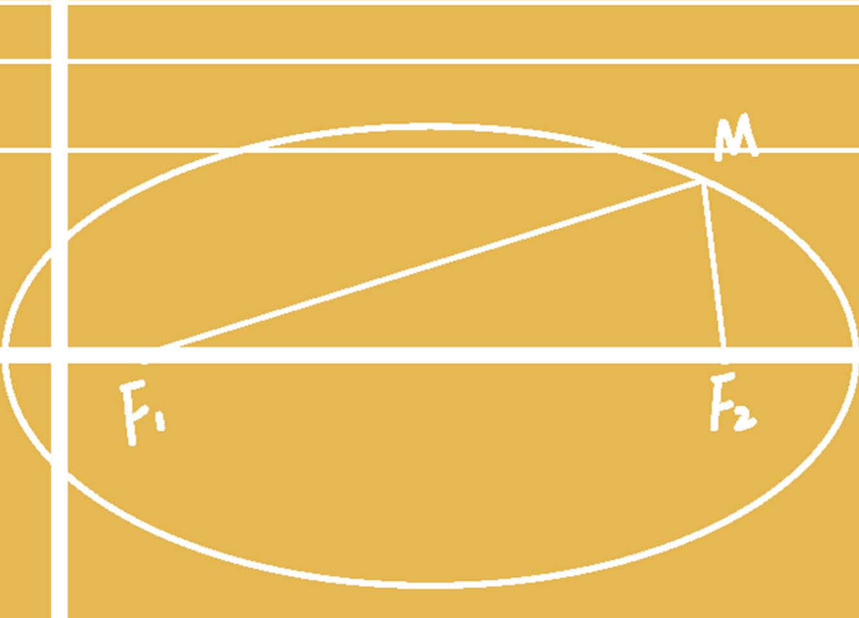
高中数学
基础与提高

张　炜◎编著



西南交通大学出版社

高 中 数 学

基础与提高

张 炜 编著

西南交通大学出版社
· 成 都 ·

图书在版编目（CIP）数据

高中数学基础与提高 / 张炜编著. —成都：西南交通大学出版社，2022.4
ISBN 978-7-5643-8632-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①中学数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2022）第 046978 号

Gaozhong Shuxue Jichu yu Tigao

高中数学基础与提高

张 炜 编著

责任编辑 孟秀芝
封面设计 GT 工作室

出版发行 西南交通大学出版社
（四川省成都市金牛区二环路北一段 111 号
西南交通大学创新大厦 21 楼）
邮政编码 610031
发行部电话 028-87600564 028-87600533
网址 http://www.xnjdcbs.com
印刷 四川森林印务有限责任公司

成品尺寸 185 mm × 260 mm
印张 12.75
字数 317 千
版次 2022 年 4 月第 1 版
印次 2022 年 4 月第 1 次
书号 ISBN 978-7-5643-8632-0
定价 55.00 元

前　言

在使用常规的两轮复习资料进行高考复习时，教师往往要进行增删的工作，增加一些实用的方法和思维训练题目，删减一些不必要的内容和偏繁难的题目. 于是，萌生了自己编写点东西的念头.

笔者认为，学习高中数学知识，一般要经历两个层次：第一个层次是熟练掌握基础知识和基本方法，遇到一道题，知道要用什么样的知识和什么样的方法，这样足以完成一张试卷的 70%；第二个层次是对知识和方法有着更深层的理解，达到融会贯通，能从更高的维度理解知识和题，有题感，能领会命题者的意图.

本书基本按照高中数学知识由易到难的顺序分为七章：三角函数，数列，统计与概率，立体几何，解析几何，函数，其他. 每章设基础篇、方法篇和提高篇.

基础篇对必要的基础知识进行梳理，尽量做到简明扼要，易于记忆，配有适量题目训练基础.

方法篇从方法本身及题目类型例举了一些常用的解题方法，配有适量题目训练方法.

提高篇有对从 2013 年以来的高考全国卷的选择和填空题的最后一题的分析，还有一些是笔者搜集整理的课堂关注度不高但有点意思的知识与方法.

书后对书中的练习题只给出最终结果，没有详细解答过程.

本书可以作为高考复习参考书，也可作为高中各学段的资料书，还可作为教师和学生的工具书.

从最开始的利用假期编写点东西，到逐渐成型为一本书，历时三年有余. 书中内容曾用于笔者的教学实践中，对不同层次的学生均有较好的效果. 由于笔者水平有限，书中若有错漏之处，敬请读者批评指正.

张　炜

二〇二一年十二月

目　录

第一章

三角函数

一、基础篇

【基础知识】

1. 三角函数定义：角 α 的始边为 x 轴的非负半轴，$P(x,y)$ 是其终边上异于原点的一点，它到原点的距离 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)$.

特殊地，角 α 的始边为 x 轴的非负半轴，$P(x,y)$ 是其终边与单位圆的交点，则 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)$.

2. 弧长公式：$l=|\alpha|r$.

扇形面积公式：$S=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}|\alpha|r^2$.

$1弧度=\dfrac{180°}{\pi}\approx 57.3°$.

3. 同角三角函数关系.

平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

商数关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right)$.

4. 诱导公式：

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha,\quad \tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$

口诀：奇变偶不变，符号看象限.

5. 两角和与差的三角函数公式：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

6. 二倍角公式及变形：

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

7. 辅助角公式：$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)\left(\text{其中}\tan\varphi=\dfrac{b}{a}\right)$.

8. 正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[-1,1]$，为奇函数，单调递增区间为 $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，单调递减区间为 $\left[\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，对称轴为 $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$，对称中心为 $(k\pi,0),k\in\mathbf{Z}$，其图象如图 1.1 所示.

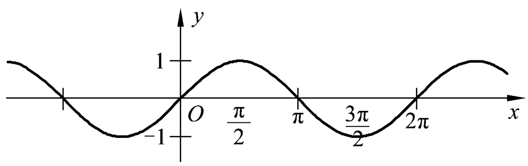


图 1.1

余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[-1,1]$，为偶函数，单调递增区间为 $[-\pi+2k\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$，单调递减区间为 $[2k\pi,\pi+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$，对称轴为 $x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，对称中心为 $\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi,0\right),k\in\mathbf{Z}$，其图象如图 1.2 所示.

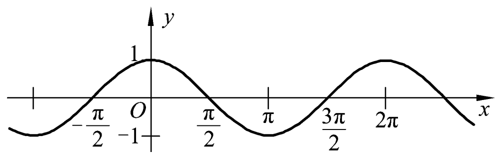


图 1.2

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为 $\mathbf{R}$，为奇函数，单调递增区间为 $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$，对称中心为 $\left(\dfrac{k\pi}{2},0\right),k\in\mathbf{Z}$，其图象如图 1.3 所示.

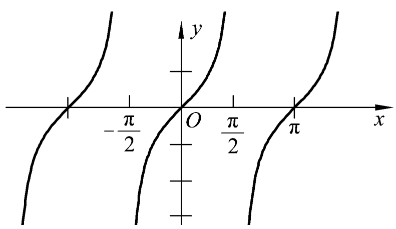


图 1.3

9．函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$，函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{\pi}{|\omega|}$.

物理意义：对于 $y=A\sin(\omega x+\varphi),x\in[0,+\infty),A>0,\omega>0$，$A$ 称为振幅，频率 $f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$，$\omega x+\varphi$ 称为相位，φ 称为初相.

10．正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径）.

余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

变形：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

三角形面积公式：$S=\dfrac{1}{2}\times$底$\times$高.

$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$,

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\left(\text{其中}p=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$,

$S=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r$（r为$\triangle ABC$内切圆半径）.

11．特殊角的三角函数值（见表 1.1）.

表 1.1

角度	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$
弧度	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{6}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$
正弦	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	-1
余弦	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
正切	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在

12．三角函数线：设角 α 的始边与 x 轴非负半轴重合，与单位圆交于点 A，终边与单位圆

交于点 P（如图 1.4），过点 P 作 PM 垂直 x 轴于 M，过点 A 作 AT 垂直 x 轴，交角 α 的终边于 T，则称有向线段 MP，OM，AT 分别为角 α 的正弦线、余弦线、正切线.

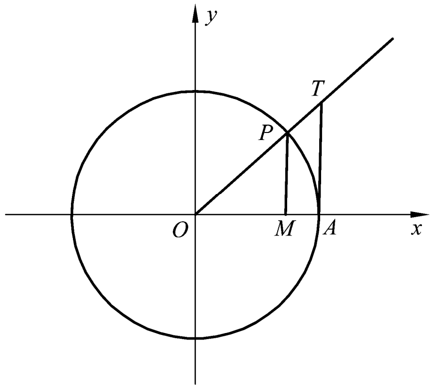


图 1.4

13. 平移变换和伸缩变换.

（1）平移变换.

图象的左右平移规则是“左加右减”，注意紧跟自变量，分清是从哪个图象平移到哪个图象；图象的上下平移规则是“上加下减”.

（2）伸缩变换.

① 周期变换：当 $\omega>1$时，由 $y=\sin x$ 的图象的横坐标缩短为原来的 $\dfrac{1}{\omega}$ 倍（纵坐标不变），得到 $y=\sin\omega x$ 的图象；当 $0<\omega<1$时，由 $y=\sin x$ 的图象的横坐标伸长为原来的 $\dfrac{1}{\omega}$ 倍（纵坐标不变），得到 $y=\sin\omega x$ 的图象.

② 振幅变换：当 $A>1$时，由 $y=\sin x$ 的图象的纵坐标伸长为原来的 A 倍（横坐标不变），得到 $y=A\sin x$ 的图象；当 $0<A<1$时，由 $y=\sin x$ 的图象的纵坐标缩短为原来的 A 倍（横坐标不变），得到 $y=A\sin x$ 的图象.

14.“五点作图法”.

【基础训练】

1. 若 $\tan\alpha>0$，则（　　）.

A. $\sin\alpha>0$　　B. $\cos\alpha>0$　　C. $\sin 2\alpha>0$　　D. $\cos 2\alpha>0$

2. 已知角 α 的终边经过点 $(-4,3)$，则 $\cos\alpha=$（　　）.

A. $\dfrac{4}{5}$　　B. $\dfrac{3}{5}$　　C. $-\dfrac{3}{5}$　　D. $-\dfrac{4}{5}$

3. 若 $\sin\alpha=-\dfrac{5}{13}$，且 α 为第四象限角，则 $\tan\alpha$ 的值等于（　　）.

A. $\dfrac{12}{5}$　　B. $-\dfrac{12}{5}$　　C. $\dfrac{5}{12}$　　D. $-\dfrac{5}{12}$

4. $\tan 255^\circ =$（　　）.

A. $-2-\sqrt{3}$　　B. $-2+\sqrt{3}$　　C. $2-\sqrt{3}$　　D. $2+\sqrt{3}$

5. 函数 $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}$ 的最小正周期为（　　）.

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$

C. π　　D. 2π

6. 将函数 $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\dfrac{1}{4}$ 个周期后，所得图象对应的函数为（　　）.

A. $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　B. $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

C. $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$　　D. $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

7. 在函数① $y=\cos|2x|$，② $y=|\cos x|$，③ $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，④ $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 中，最小正周期为 π 的所有函数为（　　）.

A. ①②③　　B. ①③④　　C. ②④　　D. ①③

8. 函数 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$ 在 $[0,2\pi]$ 的零点个数为（　　）.

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

9. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，已知 $a=\sqrt{5}$，$c=2$，$\cos A=\dfrac{2}{3}$，则 $b=$（　　）.

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

10. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，已知 $b=2$，$B=\dfrac{\pi}{6}$，$C=\dfrac{\pi}{4}$，则 $\triangle ABC$ 的面积为（　　）.

A. $2\sqrt{3}+2$　　B. $\sqrt{3}+1$　　C. $2\sqrt{3}-2$　　D. $\sqrt{3}-1$

11. 已知曲线 $C_1: y=\cos x$，$C_2: y=\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$，则下面结论正确的是（　　）.

A. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

B. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

C. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

D. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

12. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$BC=1$，$AC=5$，则 $AB=$（　　）.

A. $4\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{30}$　　C. $\sqrt{29}$　　D. $2\sqrt{5}$

13. 函数 $f(x)=4\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+a$ 的最大值为 2，则 a 的值为________.

14. 函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)-2\sin\varphi\cos x$ 的最大值为________.

15. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $\cos A=\frac{4}{5}$，$\cos C=\frac{5}{13}$，$a=1$，则 $b=$________.

16. 如图 1.5，一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶，到 A 处时测得公路北侧一山顶 D 在西偏北 30°的方向上，行驶 600m 后到达 B 处，测得此山顶在西偏北 75°的方向上，仰角为 30°，则此山的高度 $CD=$________m.

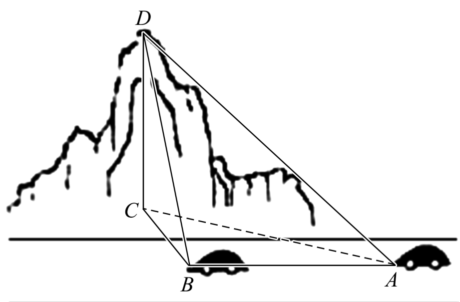


图 1.5

17. （1）①证明两角和的余弦公式 $C_{(\alpha+\beta)}:\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$；

②由 $C_{(\alpha+\beta)}$ 推导两角和的正弦公式 $S_{(\alpha+\beta)}:\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

（2）已知 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$，且 $\cos B=\frac{3}{5}$，求 $\cos C$.

18. 设函数 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期和对称轴方程；

（2）当 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，求 $f(x)$ 的值域.

19. 设函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(-\pi<\varphi<0)$，$y=f(x)$ 图象的一条对称轴是直线 $x=\frac{\pi}{8}$.

（1）求 φ；

（2）在图 1.6 中画出函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的图象.

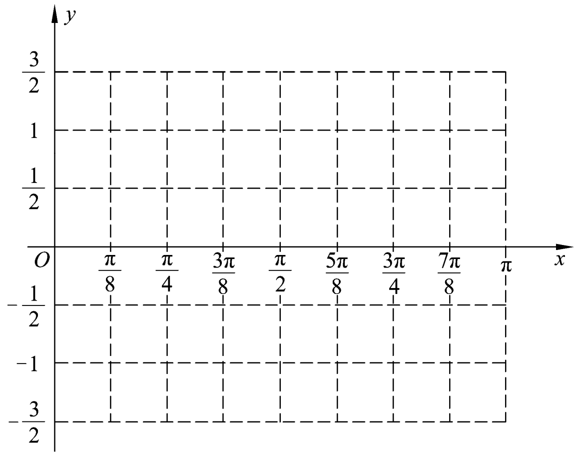


图 1.6

20. $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上的点，AD 平分 $\angle BAC$， $BD = 2DC$.

（1）求 $\dfrac{\sin B}{\sin C}$；

（2）若 $\angle BAC = 60°$，求 $\angle B$.

二、方法篇

(一) 逆用公式或公式变形运用

例 1　$\sin 20°\cos 10° - \cos 160°\sin 10° =$（　　）.

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

分析：先使用诱导公式化角，然后逆用两角和与差的正弦、余弦公式.

$$\text{原式} = \sin 20°\cos 10° + \cos 20°\sin 10° = \sin 30° = \frac{1}{2}$$

选 D.

例 2　求 $\tan 20° + \tan 40° + \sqrt{3}\tan 20°\tan 40°$ 的值.

分析：变形运用两角和的正切公式.

由 $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$，得

$$\tan\alpha + \tan\beta = \tan(\alpha+\beta)(1 - \tan\alpha\tan\beta)$$

所以

$$\text{原式} = \tan 60°(1 - \tan 20°\tan 40°) + \sqrt{3}\tan 20°\tan 40° = \sqrt{3}$$

（二）切化弦、弦化切

例 3　设 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，则（　　）.

A. $3\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　B. $3\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$　　C. $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　D. $2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

分析：先“切化弦”，再化简，结合角的范围得到角之间的关系.

由已知得 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，所以

$\sin\alpha\cos\beta=\cos\alpha+\cos\alpha\sin\beta$，即 $\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

由于 $\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$\frac{\pi}{2}-\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$，即 $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$.

选 C.

例 4　若 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$，则 $\cos^2\alpha+2\sin2\alpha=$（　　）.

A. $\frac{64}{25}$　　B. $\frac{48}{25}$　　C. 1　　D. $\frac{16}{25}$

分析：巧用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，再“弦化切”.

$$\cos^2\alpha+2\sin2\alpha=\frac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1+4\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{64}{25}$$

选 A.

（三）配凑角

例 5　若 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，则 $\tan\beta=$（　　）.

A. $\frac{1}{7}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{5}{7}$　　D. $\frac{5}{6}$

分析：注意到 $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$，

所以 $\tan\beta=\tan(\alpha+\beta-\alpha)=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=\frac{1}{7}$.

选 A.

例 6　已知 θ 是第四象限角，且 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$，则 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=$________.

分析：注意到 $\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{\pi}{2}$，

所以 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$，则 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$.

而 $\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi<\theta<2\pi+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

所以 $\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi<\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

故 $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{4}{5}$，则 $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{4}{3}$.

（四）整体思想

例 7　已知 $\sin 2\alpha=\dfrac{2}{3}$，则 $\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$（　　）.

A. $\dfrac{1}{6}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

分析：把 $\alpha+\dfrac{\pi}{4}$ 作为整体先运用二倍角公式的变形，再运用诱导公式.

$$\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1-\sin 2\alpha}{2}=\frac{1}{6}$$

选 A.

（五）方程思想

例 8　已知 $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{3}{5}$，求 $\tan\alpha\tan\beta$ 的值.

分析：利用两角和与差的余弦公式建立方程组求解.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5},$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}$$

所以
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{2}{5},\quad \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$$

故
$$\tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{1}{2}$$

例 9　四边形 $ABCD$ 的内角 A 与 C 互补，$AB=1$，$BC=3$，$CD=DA=2$.

（1）求 C 和 BD；

（2）求四边形 $ABCD$ 的面积.

分析：如图 1.7，在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ABD$ 中分别运用余弦定理即可建立方程组.

（1）$BD^2=3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos C$，$BD^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos(\pi-C)$，

解得 $C=\dfrac{\pi}{3}$，$BD=\sqrt{7}$.

（2）$S_{\text{四边形}ABCD}=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}\times3\times2\times\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{2}\times1\times2\times\sin\dfrac{2\pi}{3}=2\sqrt{3}$.

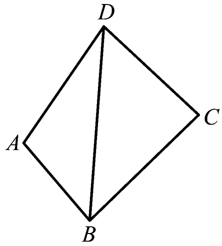


图 1.7

（六）设而不求

例 10　在$\triangle ABC$中，$B=\dfrac{\pi}{4}$，BC边上的高等于$\dfrac{1}{3}BC$，则$\sin A=$（　　）.

A. $\dfrac{3}{10}$　　B. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

分析：如图 1.8，设$BC=x$，则BC边上的高$AD=\dfrac{1}{3}x$.

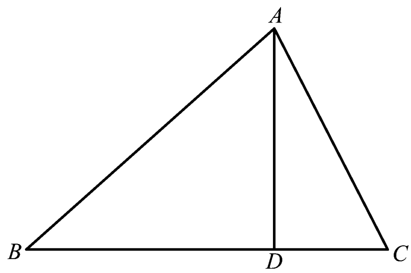


图 1.8

因为$B=\dfrac{\pi}{4}$，所以$BD=\dfrac{1}{3}x$，$CD=\dfrac{2}{3}x$.

由勾股定理，得$AC=\dfrac{\sqrt{5}}{3}x$.

再由正弦定理，得$\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{3}x}{\sin\frac{\pi}{4}}=\dfrac{x}{\sin\angle BAC}$.

所以$\sin A=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

选 D.

（七）函数图象问题

例 11　如图 1.9，圆O的半径为 1，A是圆上的定点，P是圆上的动点，角x的始边为射线OA，终边为射线OP，过点P作直线OA的垂线，垂足为M，将点M到直线OP的距离表示成x的函数$f(x)$，则$y=f(x)$在$[0,\pi]$的图象大致为（　　）.