趣味数学史

QUWEI SHUXUE SHI

温庆峰　编

蘭州大學出版社
LANZHOU UNIVERSITY PRESS

QUWEI SHUXUE SHI

趣味数学史

温庆峰　编

兰州大学出版社
LANZHOU UNIVERSITY PRESS

前　言

数学史是研究数学学科发生、发展的一门学科分支，简单地说就是研究数学的发展历史。它不仅追溯数学内容、思想和方法的演变以及发展过程，而且探索影响这个过程的各种因素，以及历史上数学的发展对人类文明所带来的影响。因此，数学史的研究对象不仅包括具体的数学内容，而且涉及历史学、哲学、文化学、宗教等社会科学内容，是一门交叉性学科。研究数学史的意义体现在以下方面。

1.数学史的科学意义

每一门学科都有其发展的历史。作为历史上的学科，数学既有其历史性又有其现实性。其现实性首先表现在数学概念与方法的延续性方面，今日的数学研究在某种程度上是对历史上数学传统的深化与发展，或者是对历史上数学难题的解决，因此我们无法割裂数学现实与数学史之间的联系。数学具有悠久的历史，与其他自然科学学科相比，数学更是积累性学科，其概念和方法更具有延续性，比如古代文明中形成的十进位值制记数法和四则运算法则，我们今天仍在使用，诸如费马猜想、哥德巴赫猜想等历史上的难题，长期以来一直是现代数论领域中的研究热点，数学传统与数学史材料可以在现实的数学研究中获得发展。

2.数学史的文化意义

美国数学史家M.克莱因曾经说过："一个时代的总的特征在很大程度上与这个时代的数学活动密切相关。这种关系在我们这个时代尤为明显。""数学不仅是一种方法、一门艺术或一种语言，数学更主要的是一门有着丰富内容的知识体系，其内容对自然科学家、社会科学家、哲学家、逻辑学家和艺术家十分有用，同时影响着政治家和神学家的学说。"数学已经广泛地影响着人类的生活和思想，是形成现代文化的主要力量。因而数学史是从一个侧面反映的人类文化史，又是人类文明史最重要的组成部分。许多历史学家通过数学这面镜子，了解古代其他主要文化的特征与价值取向。古希腊（公元前600—公元前300）数学家强调严密的推理和由此得出的结论，因此他们不关心这些成果的实用性，

而是教育人们去进行抽象的推理，激发人们对理想与美的追求。通过对希腊数学史的考察，就十分容易理解，为什么古希腊具有很难为后世超越的优美文学、极端理想化的哲学以及理想化的建筑与雕塑。而罗马数学史则告诉我们，罗马文化是外来的，罗马人缺乏独创精神而注重实用。

3.数学史的教育意义

当我们学习过数学史后，自然会有这样的感觉：数学的发展并不合逻辑，或者说，数学发展的实际情况与我们今日所学的数学教科书很不一致。我们今日中学生所学的数学内容基本上属于17世纪微积分学以前的初等数学知识，而大学数学系学生学习的大部分内容则是17—18世纪的高等数学。这些数学教材业已经过千锤百炼，是在科学性与教育要求相结合的原则指导下经过反复思考编写的，是将历史上的数学材料按照一定的逻辑结构和学习要求加以取舍编撰的知识体系，这样就必然舍弃了许多数学概念和方法形成的实际背景、知识背景、演化历程以及导致其演化的各种因素，因此仅凭数学教材的学习，难以获得数学的原貌和全景，同时忽视了那些被历史淘汰掉的但对现实科学或许有用的数学材料与方法，而弥补这方面不足的最好途径就是学习数学史。

数学史既属史学领域，又属数学科学领域，因此，数学史研究既要遵循史学规律，又要遵循数理科学的规律。根据这一特点，可以将数理分析作为数学史研究的特殊的辅助手段，在缺乏史料或史料真伪难辨的情况下，站在现代数学的高度，对古代数学内容与方法进行数学原理分析，以达到正本清源、理论概括以及提出历史假说的目的。数理分析实际上是“古”与“今”间的一种联系。

校本课程趣味数学史，是以传统的课堂教学为基础，以开放、创新的思维模式，集中体现了素质教育思想，立足培养兴趣，提高学生数学核心素养，通过讲、学、练这一科学有效的训练方法，培养学生的数学兴趣和数学思维。立足基础知识，结合教学实际，博采众长，寓理于例，重在思维训练，并加以适当的延伸和拓展，以提高学生对数学的兴趣，启发学生的创造力和思维能力，使学生爱学、乐学，增强学生的学习主动性，提高学生思维的敏捷性、灵活性、准确性和深刻性，这是我们的宗旨和目标。

“千里之行，始于足下”。愿广大同学在汗水中积累知识，在灵感中启迪智慧，在和谐中走向成功！

让我们走进数学史，走进数学吧！

温建峰

2020年9月

目　录

上　编

下 编

上　编

第一讲　早期的算术与几何

一、古埃及和古巴比伦的数学

（一）纸草书

纸草书是研究古埃及数学的主要来源。

莱因德纸草书：最初发现于埃及底比斯古都废墟，1858年为苏格兰收藏家莱因德购得，现藏于伦敦大英博物馆。莱因德纸草书又称阿姆士纸草书。阿姆士在公元前1650年左右用僧侣文抄录了这部纸草书，据他加的《前言》知，所抄录的是一部已经流传了两个世纪的著作，莱因德纸草书含84个数学问题。

莫斯科纸草书：又称戈列尼雪夫纸草书，1893年由俄国贵族戈列尼雪夫在埃及购得，现存于莫斯科博物馆。莫斯科纸草书产生于公元前1890年前后，含有25个数学问题。

古埃及的计算技术具有叠加的特征。乘除法运算，往往用连续加倍来完成。由于方法较为繁复，古埃及算术难以发展到更高的水平。

相对于算术，古埃及的几何具有更高的成就。古埃及人留下了许多气势宏伟的建筑，可以说明古埃及几何学的发达。

（二）古埃及几何

古埃及几何产生于土地测量，是一种实用几何。

对于面积、体积的计算，他们给出了一些计算的法则，有准确的也有粗略的。代表性例子是莫斯科草书第14题，这道题给出了计算平截头方锥体积的公式，用现代的符号表示相当于：

$$V=\frac{h}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$$

这里的h是高，a、b是底面正方形的边长。

这是古埃及几何中最出色的成就之一。

（三）古巴比伦的数学

古巴比伦人发明了六十进制计数法。

古巴比伦人长于计算，他们编制了许多数表：乘法表、倒数表、平方表、立方表、平方根表、立方根表，甚至有特殊的指数（对数）表。

古巴比伦人能解二次方程。

二、中国的早期数学

中国古代数学的起源可以上溯到公元前数千年。《史记》中记载，夏禹治水，“左规矩，右准绳”。这可以看作是中国古代几何学的起源。在殷商甲骨文中已经使用了完整的十进制计数法，春秋战国时代又出现了十进位值制筹算计数法。而战国时代的《考工记》《墨经》《庄子》等著作中则探讨了许多抽象的数学概念，并记载了大量实用几何知识。

（一）《周易》中的数学

《周易》是中国古代专讲卜筮的书，也可以看作是古人探索自然的朴素的哲学著作，成书于殷商时期。《周易》由《易经》和《易传》两部分组成，先有《易经》，后有《易传》，两部分成书的时间相距七八百年。《易经》包括古代占卜的卦辞及爻辞；《易传》由《系辞》《说卦》等十篇文章组成，是对《易经》中卦辞及爻辞的解释。

卜筮是原始人类共有的社会现象。中国古代常用龟甲和兽骨作为占卜工具，以决定事情的吉凶。筮，是按一定的规则得到特定的数字，并用它来预测事情的吉凶。《周礼》称：“凡国之大事，先筮后卜。”《史记·龟策列传》则说：“王者决定诸疑，参与卜筮，断以蓍龟，不易之道也。” 筮的工具起初是竹棍（以后出现的筹算数码则形成了中国古代用竹棍表示数字的传统），后来改用蓍草——一种有锯齿的草本植物。

在中国古代众多的儒、道典籍中，《周易》是包含数学内容最丰富的著作，因而对中国古代数学家产生了极大的影响。比如，刘徽在《九章算术注》的《序》中就写道：“昔伏羲氏始作八卦，以通神明之德，以类万物之情。作九九之数，以合六爻之变。”实际上就把数学方法与《周易》中的六爻、八卦等内容联系起来了。

计算机的发明与《周易》中的八卦有着十分密切的联系。众所周知，现代电子计算机最基本的数学基础是二进制数。二进制符号是德国数学家莱布尼茨（1646—1716）发明的。莱布尼茨于1679年撰写了《二进制算术》，阐述了二进

制理论。莱布尼茨自称，他之所以会想到二进制数，就是因为受到了八卦符号的启发。他还说："可以让我加入中国籍了吧。"

（二）太极图

《周易》中的另一重要概念是太极。《周易》中写道："易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦。"

太极即太一，这段话讲的是八卦产生的原理，也试图解释天地造分、化成万物的原理。后经宋代陈抟的发展，便有了太极图。

《周易》中另一个与数学相关的内容是"河图洛书"。《周易》中有"河出图，洛出书，圣人则之"的记载。相传，上古伏羲氏时，洛阳东北孟津县境内的黄河中浮出龙马，背负"河图"，献给伏羲。伏羲依此而演成八卦，后为《周易》来源。又相传，大禹时，洛阳西洛宁县洛河中浮出神龟，背驮"洛书"，献给大禹。大禹依此治水成功，遂划天下为九州。又依此定九章大法，治理社会，流传下来收入《尚书》中，名《洪范》。也就是说，在古人看来，八卦与九数实出于河图洛书。宋代陈抟以此形成了"洛书图"（九宫图）。

（三）数的概念的产生

数和形是数学最早的研究对象，考古研究发现，人类在5万年前就已经有了一些计数的方法。现代人的研究认为，人类数的概念的发展过程是，先有原始的数感，再形成一一对应的计数方法，最后通过集合的等价关系建立抽象的数的概念。

1.计数符号的产生

《易系辞》中载："上古结绳而治，后世圣人易之以书契。"结绳计数，是指在绳子上打一个结表示一个数或一件事，绳结的多少，根据事物多少而定。而所谓的"书契"，就是刻划，"书"是划痕，"契"是刻痕。古人常常在各种动物骨头、金属、泥板上刻痕计数。如中国殷商时期常将文字刻划在牛的肩胛骨或龟甲上，故称甲骨文。

从刻划计数，人类很自然地过渡到刻出数的符号，并进而创造出第一批数字。古代中国、古埃及、古巴比伦等民族，均在公元前5000年前后就有了计数符号。由于古人用手指作为计数的参照物十分方便，因而许多民族都不约而同地使用了十进制计数法。当然也存在着少量的其他进位制，如5进制、12进制、

16进制、20进制、60进制等。

公元前500年左右的战国时代，中国人创造了具有十进位值制特征的筹算数码。

筹算数字的摆放方法规定，个位用纵式，十位用横式，百位用纵式，千位用横式，万位又用纵式，如此纵横相间，不会发生误会。并规定用空位表示零。

到了13世纪，中国数学家又明确地用“0”表示零，从而使中国计数法完全位值化。

2.拉普拉斯对十进位值制的评价

十进位值制是一个深远而又重要的思想，它今天看来如此简单，以致于使我们忽视了它的真正伟绩。但恰恰是它的简单性以及对一切计算都提供了极大的方便，才使我们的算术在一切有用的发明中列在首位；而当我们想到它竟逃过了古代最伟大的两位人物阿基米德和阿波罗尼奥斯的天才思想的关注时，我们更感到这一成就的伟大。

第二讲　古希腊数学

古希腊数学一般指从公元前600年至公元600年间，活动于希腊半岛、爱琴海区域、马其顿与色雷斯地区、意大利半岛、小亚细亚以及非洲北部的数学家们所创造的数学。

古希腊早期文明中心在雅典；公元前338年古希腊诸邦被马其顿控制，文明中心转到亚历山大城（今埃及）；公元前30年左右，罗马帝国完全控制古希腊各国，文明中心转到罗马（今意大利）。公元640年前后，阿拉伯民族征服东罗马，古希腊文明落下帷幕。

一、古希腊数学与哲学的交织

古希腊早期的自然科学往往是与哲学交织在一起的，古希腊的自然哲学乃是古代自然科学的一种特殊形态，虽然有许多错误的东西，但也有不少合理的知识和包含着合理成分的猜测。恩格斯说："在希腊哲学的多种多样的形式中，差不多可以找到以后各种观点的胚胎、萌芽。因此，如果理论自然科学想要追溯自己今天的一般原理发生和发展的历史，它就不得不回到希腊人那里去。"

古希腊数学表现出很强的理性精神，追求哲学意义上的真理．在公元前400年—公元前300年的时候，他们的数学思想中就已经涉及了无限性、连续性等深刻的概念。

经过古埃及人和古巴比伦人长期积累数学知识的萌芽时期以后，古希腊人把数学推进到了一个崭新的时代。古希腊数学不仅有十分辉煌的研究成果，而且提出了数学的基本观点，建立了数学理论的方法，给以后的数学发展提供了坚实的基础。

泰勒斯确定了几条最早的几何定理：

等腰三角形两底角相等；

如果两个三角形有一边及这边上的两个角对应相等，那么这两个三角形全

等；

直角彼此相等；

两条直线相交时，对顶角相等；

圆的直径平分圆周。

二、万物皆数

毕达哥拉斯学派认为世界万物都是数，最重要的数是1、2、3、4，而10则是理想的数；相应地，自然界由点（一元）、线（二元）、面（三元）和立体（四元）组成。他们认为自然界中的一切都服从于一定的比例数，天体的运动受数学关系的支配，形成天体的和谐。

三、 理论算术（数论的雏形）

完全数、过剩数（盈数）、不足数（亏数）分别表现为其因数之和等于、大于、小于该数本身（规定因数包括1但不包括该数自身）。他们发现的前几个完全数是6=1+2+3，28=1+2+4+7+14，496。

而220和284则是一对亲和数，因为前者的因数和等于284，后者的因数和等于220。

后来，在数学中寻找完全数就成为一项任务来研究。在前八千多正整数中只有4个完全数：6、28、496、8128；第五个完全数在1538年才找到：33550336；50年后发现了第六个完全数： 8589869056；2005年发现了第42个梅审素数，从而有了第42个完全数。

四、几何成就

使几何学从经验上升到理论的关键性贡献应归功于毕达哥拉斯学派。他们基本上建立了所有的直线形理论，包括三角形全等定理、平行线理论、三角形的内角和定理、相似理论等。

1.正多边形和正多面体

毕达哥拉斯学派掌握了正多边形和正多面体的一些性质。他们发现，同名正多边形覆盖平面的情况只有三种：正三角形、正方形、正六边形，而且这些正多边形个数之比为6∶4∶3，边数之比则为3∶4∶6。

毕达哥拉斯学派的另一项几何成就是正多面体作图，他们称正多面体为“宇宙形”。三维空间中仅有五种正多面体：正四面体、正六面体、正八面体、

正十二面体、正二十面体。

2.正五边形与五角星

在五种正多面体中，除正十二面体外，每个正多面体的界面都是三角形或正方形，而正十二面体的界面则是正五边形。

正五边形作图与著名的“黄金分割”有关。五条对角线中每一条均以特殊的方式被对角线的交点分割。据说毕达哥拉斯学派就是以五角星作为自己学派的标志。

五、勾股数

毕达哥拉斯数：

$2n+1$，$2n^2+2n$，$2n^2+2n+1$（n为正整数）

一般形式之一：

$x^2+y^2=z^2$（x、y、z两两互素）

六、无理数的发现

毕达哥拉斯学派的信条是“万物皆数”，这里的数实际上是指正的有理数。传说，毕达哥拉斯学派成员希帕苏斯（公元前470年左右）发现了“不可公度比”的现象，并在一次航海时公布了他的想法，结果他被恐慌的毕达哥拉斯学派的其他成员抛进了大海。

项武义教授的一项研究认为，希帕苏斯首先发现的是正五边形边长与对角线长不可公度比。

七、第一次数学危机

不可公度比的发现使毕达哥拉斯学派对许多定理的证明都不能成立。

例：如果两个三角形的高相同，则它们的面积之比等于两底边之比。

新比例论

100多年后，欧多克斯（公元前408—公元前355）提出了“新比例论”，才用回避的方法暂时消除了“第一次危机”。

新比例定义：设A、B、C、D是任意四个量，其中A和B同类（即均为线段、角或面积），C和D同类，若对任意两个（正）整数m和n，mA与nB的大小关系，取决于mC与nD的大小，则称$A:B=C:D$。

柏拉图（公元前427—公元前347）是当时最著名的哲学家之一，虽然他不

是数学家，但热心于数学，在柏拉图学园的门口挂着牌子："不懂几何者免进。"值得注意的是，公元前4世纪的重要数学工作几乎都是柏拉图的朋友和学生做的。与柏拉图学园有联系的欧多克斯（公元前408—公元前355）是这一时期最伟大的数学家，他在几何学上的研究成果，后来有些收入了欧几里得的《几何原本》。

亚里士多德（公元前384—公元前322）是柏拉图的学生和同事，他们相处达20年之久，亚里士多德公元前335年成立了自己的学派，以后曾是马其顿王亚历山大的老师。他是古希腊时期最伟大的思想家，他的一些思想在数学史上影响很大。

八、形式逻辑的建立

亚里士多德不像柏拉图那样只崇尚思辩，而是重视观察、分析和实验性的活动（如解剖）。亚里士多德是古希腊学者中最博学的人，是古代百科全书式的自然科学家，也是对近代自然科学影响最大的古代学者。他的著作甚多，在自然科学方面主要有《物理学》《论产生和消灭》《天论》《气象学》《动物的历史》《论动物的结构》等。

九、亚历山大时期的数学

从公元前330年左右到公元前30年左右，古希腊数学的中心从雅典转移到了亚历山大城。亚历山大帝国一分为三后，托勒密帝国统治古希腊，其首都亚历山大城成为古希腊文化的中心。

托勒密一世曾经是亚里士多德的学生，他在执政后修建了缪斯艺术宫，这实际上是一个大博物馆，收藏的图书和手稿据说有50万～70万卷。当时的许多著名学者都被请到亚历山大城，用国家经费供养着。

这一时期思辩猜测已不盛行，观察、计算及定量分析的方法开始流行。天文学家阿利斯塔克（公元前310—公元前230）通过对日、月、地的体积和相对距离的观测和计算做出了日心说的猜测。他通过测量角度推算出太阳直径比地球直径大六七倍，并断定小天体（地球等）应围绕大天体（太阳）旋转。尽管他的计算很不精确，但思维方式是重要的。著名天文地理学家、数学家埃拉托色尼（约公元前284—公元前192）根据太阳在两个地方的投影角之差，计算出地球的周长是24662英里（现在算出的通过地球南北极的周长为24819英里），他绘制了世界地图，并标明了经纬线以及寒带、热带和温带。

十、欧几里得与《几何原本》

欧几里得（约公元前330—公元前260），应托勒密一世之邀到亚历山大城，成为亚历山大学派的奠基人。欧几里得系统地整理了以往的几何学成就，写出了13卷《几何原本》，欧几里得的工作不仅为几何学的研究和教学提供了蓝本，而且对整个自然科学的发展有深远的影响。爱因斯坦说："西方科学的发展是以两个伟大的成就为基础的，那就是：希腊哲学家发明形式逻辑体系（在欧几里得几何学中），以及通过系统的实验发现有可能找到因果关系（在文艺复兴时期）。"

公理化方法：从一些基本的概念和公理出发，利用纯逻辑推理的方法，把一门学科建立成演绎系统的方法。后来的许多著作都仿照这种格式写成，如牛顿的《自然哲学的数学原理》。

《几何原本》的影响：《几何原本》对后来数学思想有重要影响。其一，公理化思想；其二，几何直观与严格逻辑推理的结合使欧几里得几何长期被认为是最正宗的数学知识，笛卡儿在发明了解析几何后仍坚持对每一个几何作图给出综合证明，牛顿在第一次公开他的微积分发明时也对这一算法做出了几何解释；其三，导致非欧几何的诞生。

十一、 阿基米德的数学成就

阿基米德（公元前287—公元前212）出生于西西里岛的叙拉古，曾在亚历山大跟欧几里得的学生学习过，离开亚历山大后仍与那里的师友保持联系，他的许多成果都是通过与亚历山大学者的通信而保存下来的。因此，阿基米德通常被看成是亚历山大学派的成员。

阿基米德的著作很多，内容涉及"穷竭法"与"平衡法"。

穷竭法是安蒂丰首先使用，并被古希腊数学家普遍用来证明面积和体积的方法。穷竭法可以用来严格证明已经猜想出来的命题，但不能用来发现新的结果。

阿基米德发明了求面积和体积的"平衡法"，求出面积或体积后再用"穷竭法"加以证明。阿基米德"平衡法"与"穷竭法"的结合是严格证明与创造技巧相结合的典范。

阿基米德用"平衡法"推导了球体积公式。刻在阿基米德墓碑上的几何图形代表了他所证明的一条数学定理：以球的直径为底和高的圆柱，其体积是球