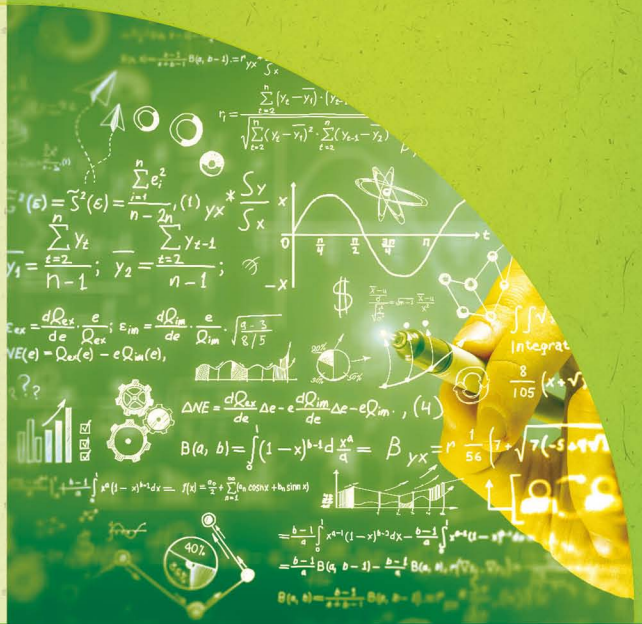




高等院校网络教育系列教材

Mathematical
Grand View Garden



数学大观园

李继根◎编著



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

高等院校网络教育系列教材

数学大观园

李继根 编著



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

· 上海 ·

图书在版编目(CIP)数据

数学大观园 / 李继根编著. —上海: 华东理工大学出版社, 2022. 1

ISBN 978-7-5628-6795-1

I. ①数… II. ①李… III. ①数学-基本知识 IV. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 008222 号

项目统筹 / 左金萍

责任编辑 / 翟玉清

责任校对 / 石 曼

装帧设计 / 戚亮轩

出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司

地址: 上海市梅陇路 130 号, 200237

电话: 021-64250306

网址: www.ecustpress.cn

邮箱: zongbianban@ecustpress.cn

印 刷 / 上海展强印刷有限公司

开 本 / 787mm×1092mm 1/16

印 张 / 16.75

字 数 / 405 千字

版 次 / 2022 年 1 月第 1 版

印 次 / 2022 年 1 月第 1 次

定 价 / 58.00 元

版权所有 侵权必究

前言

许多人在微积分基本定理的帮助下解决了一个又一个积分问题,但却对这份珍贵的礼物视而不见,对于这种现象,在畅销书《微积分的力量》(微积分能有畅销书可是罕见的)中,作者举了个古老的笑话——鱼问它的朋友道:“你难道不感激水吗?”另一条鱼反问道:“水是什么?”

毋庸讳言,很长一段时间以来,学生听过最多的话就是:“这个不考,大家不用看了”“这些要是不理解就记住吧,考试能拿上分就行”“得数学者得天下”“选择、填空要不择手段,蒙也得蒙对”……为了考试,师生只关注考试要考的;为了考试,学生专注于刷题,以“小镇做题家”为荣,练习只是为了“敲门”,学习完全异化,根本无暇发现数学中的人文内涵,更没时间慢下来欣赏数学中的风景;为了考试,老师将考试题型和解题套路固化和八股化,学生照猫画虎,对于证明题,有的甚至背诵下来,考完即弃,完全缺乏创新精神;……按郑也夫先生在《吾国教育病理》中的说法,这些教育异化现象的病原是“学历军备竞赛”。在这种大环境下,学生直奔主题,更关注题目的详细解答在哪里,至于你的思考过程,“我”不感兴趣。

众所周知,数学以抽象而闻名,而且数学抽象是有层次的。史宁中先生进一步指出:第一次抽象是基于现实的抽象,是感性具体到理性具体的过程;第二次抽象则是基于逻辑的抽象,是符号化、形式化和公理化的过程,是理性具体到理性一般的过程,教科书一般表现为“定义→定理和公式→例题和应用”。第一次抽象才是更本质的抽象,因为它创造了新的概念、运算法则和基本原理,更有利于创新精神的培养。而要展示它的过程,一般需要采用启发式教学,这就带来了困惑:课堂上说的话很绕,编出的书很厚,满是文字却只有少量的公式,不符合一般人对数学书的认知。

司马云杰先生在《文化社会学》一书中强调,社会文化基础对国家民族生存绵延具有十分重要的作用,其中所谓社会文化基础,指的是“一个国家民族社会历史生活中由天德、王道、礼教、人心、人性、伦理、道德、宗教、哲学及其信仰、信念等所构成的社会历史根本存在”。“欲知大道,必先为史。灭人之国,必先去其史,欲灭其族,必先灭其文化。”(龚自珍)如今,越来越多的人已经意识到文化的重要性,比如清华大学和华东师范大学的校长们都在向新生推荐《从一到无穷大》等科普名著。那么数学的文化基础是什么呢?社会变迁会带来文化变迁,而思想是数学的物质形态,文化则是数学的时代形态。所以要从数学文化上找到破解之道,那么又该怎样破题呢?

结合数学通识教育的课程要求、学生的数学基础以及作者自身的教学风格,本书打算从“趣精浅”上来做文章:(1)趣,即通过各种趣味性的数学历史掌故和“接地气”的语言叙述,展示数学和数学人生动活泼、有趣滑稽的一面。作者认为,数学文化,首先要展示数学人的人性,展示数学人作为人的喜怒哀乐。本书取名《数学大观园》,就是化用蒋勋先生将《红楼梦》

品读为“秘密的青春王国”的理念,希望能让读者重拾对数学最初的喜爱和热情。(2) 精,即精心选择经典的数学基础知识,重新进行趣味性、思想性乃至哲理性的品读,以期提升学生的数学文化水平、数学思维高度和数学思想深度。(3) 浅,即凡教材中所涉及的知识和方法均以浅显介绍为主,不回避数学符号,保留简单初步的运算,同时尽量减少复杂烦琐的运算。

为了实现这种理念,本书从三个方面进行了递进式铺陈:(1) 数学观的纠偏和重塑. 先引导读者从大众、影视和数学人等视角来观照数学,然后观瞻“数学大都会”的概貌,最后则从哲学和文化两个视角带领读者进一步领略数学中的人文关怀。(2) 数字探秘,即探索“数”的秘密. 这自然要从自然数出发,先谈趣闻再说史话,然后欣赏“数学王冠”上的一些“珍宝”,接下来就是数字的扩张之旅:无理数 \rightarrow 虚数 \rightarrow 超复数,最后则将视线聚焦到最特殊的三大常数(因涉及微积分知识,本部分内容置于书末)。(3) 微积分的探索之旅. 先花费较大笔墨精心论述微积分的核心知识,即极限、微分和积分,然后再佐以微积分激动人心的发展史. 唯冀能通过这样的组合式叙述,使读者能充分领悟到微积分何以被称为“人类精神的最高胜利”. 如此破题“数学文化基础”,功效如何,在前述数学人文教育匮乏的大背景下,作者只能怀着忐忑又期望的心情拭目以待。

在前文所述教育生态的影响下,本书中的大量数学知识和史实,许多学生,甚至一些教师,恐怕都未知一二. 比如,有的高数老师不知道洛必达法则的真正发明人,有的线代老师没听说过数值线性代数……

本书部分内容曾在华东理工大学数学学院专业选修课程“数学文化”以及辅修课程“数学思想与方法”上讲授多轮. 感谢修读这些课程的同学们,希望你们的课堂表现和所思所想已经化入书中。

临近交稿之际,惊悉导师田万海先生(1937—2021)驾鹤西去。“调查全国数学教学为国定策,研究古今初等代数泽被数代”. 先生主持的全国义务教育数学教学质量调查,荣获原国家科委科技进步一等奖;与其他学者合作编著的《初等代数研究》教材,已经累计印刷达 36 次,发行逾百万套. 作为改革开放以来我国数学教育学科的重要奠基人之一,先生仅此两项成果就让同侪艳羡不已,使后学难望其项背. 先生为人更是谦逊正直,一贯要求弟子要讲真话、做真事、解决真问题,真是“为数学教育而生”之人! 谨以此书向先生致以诚挚的仰慕和深切的怀念!

李继根

于华东理工大学数学学院

目 录

第 1 章 数学是何物	1
1.1 众说纷纭的数学	1
1.1.1 大众眼中的数学	1
1.1.2 影视作品中的数学	2
1.1.3 数学人眼中的数学	5
1.2 数学概观	7
1.2.1 经典数学概观	8
1.2.2 现代数学概观	10
1.3 数学与哲学	13
1.3.1 数学哲学的历史视角	13
1.3.2 数学哲学的现代视角	17
1.4 数学与文化	20
1.4.1 文化视角下的数学	20
1.4.2 数学的文化多样性	22
第 2 章 自然数探秘	28
2.1 自然数趣话	28
2.1.1 科幻中的名数	28
2.1.2 拉马努金数和水仙花数	29
2.1.3 怪兽数、缺 8 数和圣数	30
2.2 自然数史话	33
2.2.1 从前有个数	33
2.2.2 数字神秘主义	41
2.3 数学的王冠	47
2.3.1 完全数与梅森数	47
2.3.2 亲和数	49
2.3.3 勾股定理、勾股数和费马大定理	51
2.3.4 斐波那契数	57

第 3 章 数字的扩张	64
3.1 无理数的那些事儿	64
3.1.1 无理数的发现	64
3.1.2 什么是无理数	69
3.1.3 代数数与超越数	72
3.2 虚数的故事	77
3.2.1 虚数 i 引发“大海啸”	77
3.2.2 虚数 i 的漫长接受史	83
3.3 超复数及尺规作图	88
3.3.1 超复数	88
3.3.2 尺规作图	91
第 4 章 微积分之旅(上)	97
4.1 极限的概念和运算	97
4.1.1 数列极限的定义和运算	97
4.1.2 函数极限的定义和运算	101
4.2 特殊极限	108
4.2.1 无穷小	108
4.2.2 函数的连续性	112
4.2.3 幂指函数的极限	114
4.3 微分学	117
4.3.1 导数的定义和求导公式	117
4.3.2 微分的概念	121
4.3.3 导数的运算法则	124
4.4 微分学的应用	128
4.4.1 洛必达法则	128
4.4.2 函数的单调性和极值	130
4.4.3 函数的最值	133
第 5 章 微积分之旅(下)	136
5.1 积分的概念	136
5.1.1 不定积分的概念和公式	136
5.1.2 定积分的概念和性质	139
5.1.3 微元法及其几何应用	142
5.2 微积分基本定理	145
5.2.1 变上限定积分和微积分基本定理	145
5.2.2 定积分的直接积分法	148

5.3 积分的计算	150
5.3.1 分部积分法	150
5.3.2 不定积分的换元积分法	152
5.3.3 定积分的换元积分法	158
5.4 级数和微分方程初步	160
5.4.1 级数初步	161
5.4.2 微分方程初步	165
第6章 驯服无穷	167
6.1 微积分的先驱	167
6.1.1 言必称希腊	167
6.1.2 积分的酝酿	173
6.1.3 微分的酝酿	177
6.2 微积分的创立	182
6.2.1 牛顿的流数术	182
6.2.2 莱布尼茨的无穷小算法	190
6.3 微积分的严格化	196
6.3.1 狂飙世纪	196
6.3.2 驯化“幽灵”	205
第7章 三大常数的秘密	214
7.1 π 的密码	214
7.1.1 π 的文化初体验	214
7.1.2 π 的计算史	216
7.1.3 π 到底是什么	227
7.2 黄金数 φ 和 Φ	230
7.2.1 数学中的黄金数	230
7.2.2 天空中的黄金率	235
7.2.3 绘画中的黄金分割	241
7.3 e 的故事	243
7.3.1 无处不在的 e	243
7.3.2 数学殿堂中的 e	247
7.3.3 先有对数,后有指数	251

第 1 章

数学是何物

1.1 众说纷纭的数学

1.1.1 大众眼中的数学

众所周知,在数学课本中经常露脸的小明和老农、泳池管理员、包工头以及火车司机被读者们幽默地称为数学课本“五大奇人”.作为五人之首的小明,自然非常熟悉其他几位同行,毕竟大家一起合作传播了许多数学知识和文化.同时,思想开明的小明也知道读者们作为数学课程的受众,对数学有许多幽默认知和调侃.

比如,对于数学(mathematics)的英文简称 math,有人极富创意地将其单词字母扩写为 Mental Abuse To Humans(人类精神虐待).还有一个英文单词 aftermath,本意是(战争、事故、不快事情的)后果、创伤,词源上和数学没有任何关系,但是由于它是由 after+math 组成的,被大家机智地发现它的词义也正好完美地表达了考完数学后的心情.

对于 2019 年高考中有关维纳斯身高的这道数学文化题:

古希腊时期,人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $(\sqrt{5}-1)/2$ [$(\sqrt{5}-1)/2 \approx 0.618$,称为黄金分割比例],著名的“断臂维纳斯”便是如此.此外,最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $(\sqrt{5}-1)/2$.若某人满足上述两个黄金分割比例,且腿长为 105 cm,头顶至脖子下端的长度为 26 cm,则其身高可能是()

- A. 165 cm B. 175 cm C. 185 cm D. 190 cm

基于选择题的题型特点,有人给出了“粗暴式解题法”:因为维纳斯是女性,所以排除选项 C 和 D;又因为维纳斯是外国女性,所以排除选项 A.可见在高考数学文化题的考核上,需要更深入的探索研究.

有人从实用角度出发,开始怀疑大学开设高等数学(核心是微积分)课程的意义:学数学有啥用,买菜难道用得上微积分?对此,一种经典的反驳是:买菜是用不上微积分,但微积分能决定你在哪里买菜!反驳得也有道理,但也是从实用角度出发的.有人则欲从“微积分的源头”挖起,一个广为流传的段子是:牛顿(Isaac Newton, 1643—1727,英国物理学家、

数学家)在剑桥大学升职为数学教授后,学校由于资金紧张已欠薪数月,为此牛顿潜心研究并创立了微积分,从而将一门名叫“高等数学”的新科目设为全校必修课,并规定不及格者来年必须缴费重修直至通过,很快教师们的工资便发下来了……

上面的叙述当然是“ $\tan 90^\circ$ ”(不可能的).事实上,牛顿创立微积分是在他读书时,他当上教授是因为恩师巴罗为了提携他而退位让贤.

至于对数学全貌的认知,有人给出了形象的展示:自己眼中的数学是一团乱麻,就像塞·托姆布雷的《无题(纽约市)》;别人眼中的数学则符号清晰可见,甚至于看起来复杂如超大立交枢纽,但各块知识“各行其道”,绝不会“迷路”.事实上,小明觉得《无题(纽约市)》虽然看起来是一团乱麻,但从数学角度看,是一个“一笔画”问题,另外在这一圈圈线中也蕴含了数学规律,比如周期性.

小明也了解到了部分美国学生对数学的认知:

只有书呆子才会喜欢数学;数学是无意义的,与日常生活毫无联系;学习数学的方法就是记忆和模仿,你不用去理解,也不可能真正搞懂;没有学过的东西就不可能懂,只有天才才能在数学中做出发明创造;老师给出的每个问题都是可解的,我解不出来是因为我不够聪明;猜想数学中没有任何地位,因为数学是完全严格的……

他知道其中有些观念是不分国界的,是学生对数学共同的误解和偏见,是数学学科的特点和不当的教学方法所导致的结果.

那些以数学为职业的数学人(其中的优秀者称为数学家),自然遭受了比常人更多的“精神虐待”.那么他们在大众眼中,又是怎样的形象呢?

多数人对数学家的刻板印象有:(数学家)总是一个人坐在书桌前冥思苦想,即使取得了成功也只能孤芳自赏;“花几天或几周时间完全纠缠于一个问题”“费了九牛二虎之力,却一事无成、前功尽弃”.更有甚者,将数学家极端化为“不食人间烟火的奇人或怪物”.比如,关于牛顿,就有根据苹果落地发现了万有引力、请客忘食、煮手表,以及在笔记本中自述用针扎眼底探究光的性质的故事;关于陈景润(1933—1996),则有被关图书馆以及撞树(电线杆)的故事;与之类似的还有北京大学年轻的数学家韦东奕的故事.

1.1.2 影视作品中的数学

1. 影视作品中的数学人

小明将眼光投向受众更多的影视作品,发现它们一方面展示了数学人也有着和普罗大众一样的七情六欲、喜怒哀乐,让数学人走下了“神坛”,从而让大家能从凡人的角度赞叹数学人的超人贡献.但同时,这些作品中仍然存在对数学人脸谱化、刻板化的塑造,给数学人以及数学带来负面影响,毕竟社会心理学家告诉我们:刻板印象会使判断出现偏差,还会扭曲认知解释,影响我们解释事件的方式.

(1) 真实数学家的影视形象.要说数学家传记片中的翘楚,自然非电影《美丽心灵》(*A Beautiful Mind*, 2001)莫属.该片讲述的是美国数学家纳什(John Nash, 1928—2015)如何与自身罹患的精神分裂症斗争的故事.纳什读研时就创立了纳什均衡博弈理论,虽然论文只有短短 26 页,却成为 20 世纪最具影响力的理论,在经济、军事等领域产生了深远的影响.但

就在他蜚声国际之时,他的出众直觉却因为精神分裂症而受到困扰.影片表现了他 在爱妻的鼓励和帮助下,与被认为无法治愈的疾病作斗争的艰辛历程.最终,他凭借过人的意志和不懈努力压制住疯狂的心灵,从疯癫中重获理智,继续向学术上的最高层艰难进军,并于 1994 年站上了诺贝尔经济学奖的领奖台.数学家纳什成为了一个不但拥有美好情感而且具有美丽心灵的人.

该片是根据纳什的传记《美丽心灵:纳什传》改编而成,并最终获得了 2002 年第 74 届奥斯卡最佳影片.纳什的妻子艾丽西亚表示对影片很满意,她说尽管它采用的是虚构的手法,但却成功地展现出了多年来夫妻俩一同走过的风风雨雨的场景和与病痛作斗争的精神.纳什本人在接受记者采访时则表示:“《美丽心灵》是一部制作得非常好的电影,而且取得了很高的艺术成就.我看过好几遍.不过,每次看的时候,我心里并不好受.但我还是认为这部电影有助于人们理解与尊重患有精神疾病的人.另外,这部电影没有反映我 30 岁以前的生活,也没有反映我后半生的生活.”

当然话说回来,影视因为表现手段和剧情需要等原因,对人物真实经历等素材进行艺术加工无可厚非.但如果要了解真实的纳什,可以读一读玳衡(沈诞琦)《我所认识的约翰·纳什》一文,更深入的则是去阅读《美丽心灵:纳什传》,毕竟该书的副标题是“*Genius, Schizophrenia (精神分裂症) and Recovery in the Life of a Nobel Laureate (获奖者)*”,而且入围了美国最受推崇的普利策人文传记奖.经济学家王则柯认为:“如果把天才看作正无穷大,那么白痴离负无穷大不会太远.纳什就是一个生活在无穷大区域的边沿人.”这大概也就是所谓的“天才在左,疯子在右”.不管怎么说,也许正是因为世人的包容与理解,亲友的爱与不离不弃,才创造了“爱的奇迹”,使得纳什可以拥抱实实在在的现实之爱.传记作者将该书题献给了艾丽西亚,因为她才是真正的主角.

根据数学家的生平改编的影片还有《知无涯者》(2015)、《模仿游戏》(2014)、《丈量世界》(2012)、《城市广场》(2009)、《年轻的女王》(2015)等.

(2) 虚构数学家的影视形象.文学创作上有“圆形人物”和“扁形人物”之说.前者指具有复杂性格的人物形象,后者则指具有简单性格的人物形象.在小明看来,影视中的数学人形象更偏向于“扁形人物”.根植于历史的前述关于现实数学人的电影,如果已然让人觉得数学人“不疯魔不成活”,那么虚构的数学人则更成了“神”.日本作家东野圭吾的畅销推理小说《嫌疑人 X 的献身》(由其改编的日本同名电影于 2008 年上映),说的是百年一遇的数学天才石神暗恋邻居靖子,当靖子失手杀了前来纠缠的前夫时,石神主动提出负责料理善后事宜,而石神设了一个匪夷所思的局,令警方始终只能在外围敲敲打打,根本无法触及案件的核心故事.

从数学角度,小明觉得要思考的是作者为什么要将石神设定为数学天才,而不是其他领域的天才?难道是因为情节需要一个逻辑发达却情感白痴的男主角,而数学天才都是如此?要知道这份情感,连靖子的感受都是:“她从未遇到过这么深的爱情,不,她连这世上有这种深情都一无所知.石神面无表情背后,竟藏着常人难以理解的爱.”若果真如此,那么这种设定所基于的就是对数学(包括数学人)的刻板印象,并因小说以及影视的广为流传而得到了更大的传播.

文学及影视作品中设置虚构数学家角色的还有《坏小孩》(后改编为网剧《隐秘的角落》)、《博士的爱情方程式》《质数的孤独》《心灵捕手》等.

2. 影视作品中的数学思想

上述电影主要讲述的都是数学人的故事,极少涉及数学思想,而大量表现数学思想和寓意的电影,小明觉得非“爱丽丝梦游仙境”系列(Alice in Wonderland, 2010 & 2016)莫属,它们改编自卡罗尔(Lewis Carroll)的“爱丽丝”系列小说(1865年出版的《爱丽丝漫游奇境》和1871年出版的《爱丽丝镜中奇遇》).小说突破了西欧传统儿童文学道德说教的刻板写法,甫一出版就大获成功,如今已被翻译成数百种语言.据说当时的维多利亚女王(Alexandrina Victoria, 1819—1901)也很痴迷于“爱丽丝”,她曾下令:以后卡罗尔先生凡有新作,立刻呈上.不久,新作呈上来了,是严谨的数学教材《行列式基础论述》.因为卡罗尔就是牛津大学数学家道奇森(Charles Dodgson, 1832—1898)的笔名,而道奇森本人更是集多重角色于一身,他还是诙谐诗人、逻辑学家和摄影先驱.

《爱丽丝漫游奇境》讲述了小女孩爱丽丝在梦中追逐一只揣着怀表、会说话的白兔,不慎掉进了兔子洞,由此开始漫游奇境,直到最后与扑克牌红皇后发生顶撞才大梦醒来.在续篇《爱丽丝镜中奇遇》中,爱丽丝则进入了一个时光可以倒流的镜中世界:花儿会说话,绵羊会织毛衣,棋子会走路.

“爱丽丝”究竟与数学存在什么联系呢?牛津大学的贝利(Melanie Bayley)在2009年的《爱丽丝的代数冒险:仙境求解》一文中,对此进行了剖析.在道奇森写作的19世纪后期,非欧几何和抽象(符号)代数正在如火如荼地发展.而道奇森是一个“倔强而又保守的数学家”,坚守欧几里得几何(简称欧氏几何)理念.故事主角爱丽丝的身体在一天内从3英寸到9英尺^①间变来变去,甚至在吃了毛毛虫身下的蘑菇后,她的身体还会发生不等比例的变化.欧氏几何强调比例变化,以及相似和全等的几何关系,但是“吃下蘑菇后的任意变化”,则是在暗示非欧几何以及射影几何的发展.对此,毛毛虫的建议是“Keep your temper”,这也许是证明道奇森热爱欧氏几何最有说服力的线索,因为“temper”还有另一层意思——性质混合的协调.这就是说爱丽丝必须表现得像是一个欧氏几何者,保持自己的比例常数,即使自己的身形尺寸会发生改变.

“爱丽丝”接下来的故事里还有对“连续性原理”“时间”“旋转”“四元数”等数学概念的影射.

总之,贝利声称道奇森是一个传统的数学家,感兴趣的是欧氏几何以及18世纪线性方程组的解法和行列式,但对维多利亚时期抽象的数学潮流却十分反感,因此“爱丽丝”成名的原因就在于它是对当时数学发展的讽喻之作.

有趣的是,“爱丽丝”中不仅隐藏了大量逻辑与数学,还穿插了不少与数学相关的语言游戏,比如仿拟、双关语和藏头诗等.例如假海龟对爱丽丝说:“(在学校里)我们学习……算术的不同分支:夹法(ambition)、卷法(distraction)、撑法(uglification)、丑法(derision).”其中分别对加法(addition)、减法(subtraction)、乘法(multiplication)和除法(division)进行了仿拟.有个卡罗尔的超级粉丝甚至花费大量心血于1960年编辑出版了《注释版爱丽丝》(*The Annotated Alice*),并经多次修订增补,于1999年出版了终极版.要知道,20世纪60年代没有互联网,更没有个人电脑.为了纪念他,后人整理了他的研究并于2015年出版了豪华版.他就是著名科普作家马丁·加德纳(Martin Gardner, 1914—2010).加德纳一生创作了大量的科普著作,比如《啊哈,灵机一动》和《矩阵博士的魔法数》等,并长期主持著名科普杂志《科学

① 1英寸=2.54厘米.1英尺=12英寸.

美国人》的趣味数学专栏. 上海科技教育出版社结集出版的《马丁·加德纳数学游戏全集(全15册)》(2020), 为广大趣味数学爱好者提供了饕餮盛宴.

在传播数学思想和解读数学寓意上, 小明觉得能与“爱丽丝”相媲美的, 非1884年出版的科幻小说《平面国》(*The Flatland: A Romance of many Dimensions*)莫属. 书中首先详细介绍了在两维的平面国中“人”的各种活动(包括房屋构造、女性行走、阶级斗争等), 接下来描写了主角正方形先生在圆球公的一路指引下, 探险妙趣横生的零维国、一维国、二维国和三维国的历程, 从而以科幻小说的形式提出了不同维度世界的存在及相互关系.

正如我国香港数学教育家萧文强指出的那样, 《平面国》的副标题“一个多维的传奇故事”语带双关, 充分反映了作者艾勃特(Edwin Abbott, 1838—1926)的精心安排. 这里的“多维”首先当然是数学维度, 因此该书被称为科普数学维度概念的“空间第一书”; 其次则是政治讽刺维度, 针砭的是当时英国沉溺于安逸生活不思进取致使整个国家正逐步走向衰落的社会现实.

在国外, 《平面国》不仅被改编为动画片(2007年有两部同时上映), 还催生出了一位超级粉丝, 即著名的英国科普作家斯图尔特(Ian Stewart). 他不仅编写了《注释版平面国》(*The Annotated Flatland*), 还创作了续作《二维国内外: 数字漫游奇历记》.

《平面国》为何如此受到大家的追捧? 美国著名数学家斯蒂恩(Lynn Arthur Steen)早就给出了理由. 他认为数学是模式的科学, 并在其主编的《站在巨人的肩膀上》一书中, 为当时的“明日数学”提供了看待数学的五种眼光: 维数、数量、不确定性、形状和变化. 其中排在第一位的就是“维数视角”. 空间观念是人类空间想象力的基础, 是数学的核心素养之一, 而维数(维度)则是空间观念的数字反映. 希望深入了解维度的读者, 可以进一步挑战科幻电影《星际穿越》(*Interstellar*, 2014)和《盗梦空间》(*Inception*, 2010), 以及九集纪录片《维度: 数学漫步》(*Dimensions: a walk through mathematics*, 2008). 至于喜欢科幻惊悚片的读者, 则可以挑战《心慌方》(*Cube*, 又名《异次元杀阵》).

1.1.3 数学人眼中的数学

在数学人眼中, 数学又是什么呢? 这其实是一个本体论问题, 所以许多数学人都不愿正面回答. 一位被问到这个问题的教授的回答是: “不知道. 但如果你对偏微分方程的稳定性理论有兴趣, 我可以和你交流一下.” 他的潜台词其实是: “你问的问题太宽泛了, 无法给出答案.” (张景中《数学哲学》)

在《数学大师》一书的正文前, 作者贝尔辑录了一些历史名人对数学的看法, 用的标题则是苏格兰阿伯丁的马歇尔学院大门上镌刻的铭言——他们说, 他们说, 让他们说. 也就是说, 对于数学大师们: 无论我们自由地允许“他们说”, 还是好奇乃至在意“他们说”, 抑或豁达地坚持走自己的路“让他们说”, 他们都是无与伦比的数学大师, 遗世独立.

小明辑录了几组数学家对数学的看法, 罗列如下.

(1) 德摩根(Augustus de Morgan, 1806—1871, 英国数学家): “把圆变成方也比骗过一个数学家容易.”

(2) 皮尔斯(Charles Peirce, 1839—1914, 美国数学家): “数学是引出必然性结论的科学.”

(3) 波莱尔(Émile Borel, 1871—1956, 法国数学家): “数学是唯一的这样一门学

科,在其中我们确切知道自己在说什么,并能肯定自己是否为真。”

(4) 罗素(Bertrand Russell, 1872—1970,英国哲学家、数学家):“数学是这样一门学科,关于它,我们不知道我们谈论的是什么,也不知道谈的是否为真。”

(5) 麦克莱恩(Saunders Mac Lane, 1909—2005,美国数学家):“很少有一个明确给出的绝对严密的证明,大多数用文字写下的数学证明只是些能够详细地指出如何构成一个完全严密证明的概述.于是这种概述用来传递某种信念,即确信结果是正确的,或一个严密的证明是能够构成的。”

小明不知道英国的罗素与法国的波莱尔是否见过面,但他认为两人一旦相见说不定会“老拳相向”。

(1) 康托尔(Georg Cantor, 1845—1918,德国数学家):“数学的本质在于它的自由。”

(2) 庞加莱(Henri Poincaré, 1854—1912,法国数学家):“数学家是‘通过构造’而工作的,他们‘构造’越来越复杂的组合。”

(3) 哈代(Godfrey Harold, 1877—1947,英国数学家):“我认为,数学的实在存在于我们之外,我们的职责是发现它或是遵循它,那些被我们所证明并被我们夸大为我们‘发明’的定理,其实仅仅是我们观察的记录而已。”

(4) 哈尔莫斯(Paul Halmos, 1916—2006,美国数学家):“数学是创造性的艺术,因为数学家创造了美好的新概念,因为数学家像艺术家一样地生活、工作和思索,因为数学家这样对待它。”

数学活动是构造甚至自由的艺术创造,以上几位在“数学家天堂”里一定相见恨晚。

(1) 毕达哥拉斯(Pythagoras,约公元前 570—公元前 490,古希腊数学家、哲学家):“万物皆数。”

(2) 柏拉图(Plato,公元前 427—公元前 347,古希腊哲学家):“上帝乃几何学家。”

(3) 莱布尼茨^①(Gottfried Leibniz, 1646—1716,德国数学家):“神灵在分析的奇境中找到看一个卓越的出口,那是理念的预兆,其意义在存在与不存在之间,我们称之为负单位的虚(平方)根。”

(4) 克罗内克(Leopold Kronecker, 1823—1891,德国数学家):“上帝创造了整数,其他一切都是人造的。”

(5) 希尔伯特(David Hilbert, 1862—1943,德国数学家):“无穷!再没有其他的问题如此深刻地打动过人类的心灵。”

(6) 外尔(Hermann Weyl, 1885—1955,德国数学家):“数学是无限的科学。”

毕达哥拉斯和柏拉图作为古希腊人,将数学与神或上帝联系起来可以理解,小明有点儿

① 旧译莱布尼兹。

纳闷的是莱布尼茨作为微积分的创始人之一怎么也开口闭口“神灵”？至于“无限”或“无穷”，小明知道由于无法解释无理数和芝诺悖论，古希腊哲学家亚里士多德(Aristotle, 公元前384—公元前322)区分了“实无穷”与“潜无穷”。实无穷观认为，无穷是无限延伸或无限变化过程中可以自我完成的无限实体或无限整体。例如，“全体自然数”是存在的，因为每个自然数都是可以数到的。潜无穷观则认为，无穷是无限延伸的、永远完成不了的一个过程。例如，“全体自然数”是不存在的，因为自然数是数不完的。

(1) 维格纳(Eugene Paul Wigner, 1902—1995, 美国物理学家):《数学在自然科学中不可思议的有效性》(文章标题)。

(2) 德摩根:“数学毕竟是人类思想独立于经验之外的产物,它怎么会如此美妙地适应于各种现实目的呢?”

(3) 韦伊(Andre Weil, 1906—1998, 法国数学家):“数学的特别之处,就是它不能为非数学家所理解。”

小明知道,诺贝尔物理学奖得主维格纳的感慨并非夸大其词夺人眼球,而是有着大量的案例支撑,其中最典型的莫过于非欧几何。非欧几何本来只是一个具有纯粹数学趣味的问题,却在提出几十年后成为广义相对论的理论基础。

(1) 陈省身(1911—2004, 中国数学家):“数学好玩。”

(2) 齐民友(1930—2021, 中国数学家、教育家):“一个没有相当发达的数学的文化是注定要衰落的,一个不掌握数学作为一种文化的民族也是注定要衰落的。”

(3) 张奠宙(1933—2018, 中国数学教育家):“结构说到底是一种‘关系’,所以数学是一门‘关系学’。”

(4) 史宁中(1950—, 中国数理统计学家、教育家):“我们把基本数学基本思想归结为三个核心要素:抽象、推理和模型。”

齐民友先生的《数学与文化》曾入选高中语文课本,他在其中提出了数学的三个特点:数学追求一种完全确定、完全可靠的知识;数学的简单性和深刻性;数学不仅研究宇宙的规律,也研究自身。由此产生的文化影响分别是:求真的态度,用理性思维揭示宇宙和人类的真面目;分析与综合的理念;越来越巩固的数学基础。总之,数学大大地促进了人的思想解放,提升了人类整个精神水平;数学作为文化的一部分,其最根本的特征是它表达了一种探索精神。

1.2 数学概观

小明注意到,大众对于高数,首先存在狭义与广义两种理解:狭义的理解仅指大学里一门名为“高等数学”的课程,内容涵盖空间解析几何、微积分(包括极限、导数和积分)、微分方程和无穷级数等;广义的理解则泛指初等数学(包含算术、代数、平面几何、立体几何、三角和平面解析几何等)之外的一切数学。

其次,就是将高数形象化为一棵大树。

小明查阅资料,发现将知识比作大树的说法来自笛卡儿,至于将数学比喻为大树的说法,至少可追溯到著名数学家莫里斯·克莱因(Morris Kline, 1908—1992)的名著《西方文化中的数学》:“数学是一棵富有生命力的树,她随着文明的兴衰而荣枯。”这个比喻充分地反映了数学与其他学科的重大区别,那就是数学是累积性的学科,正如德国数学家汉克尔(Hermann Hankel, 1839—1873)所感慨的:

就大多数学科而言,一代人摧毁的正是另一代人所建造的,而他们所建立的也必将为另一代人所破坏.只有数学不同,每一代人都是在旧的建筑物上加进新的一层.

也有人将数学比喻为“深渊”,可谓一语双关:既比喻数学学得越高深越难以理解,也比喻数学学得越高深越类似于深渊考察那样艰难,因为专业术语里“深渊”指的是海洋深度大于 6 000 m 的海域.

在阅读了一些数学概观类书籍后,小明注意到数学的疆域正日益飞速扩张,因此他觉得可以将数学比喻为一个充满神奇的“大都会”(Metropolis),其中各个领域和分支有机地汇合在一起,形成一个错综复杂却生机盎然的超大型系统.这个数学大都会是如此庞大,以至于中小学 12 年所学的数学,也仅仅只涉及巴掌大的一块区域,至于数学系的本科毕业生,涉及的区域也只有其整个体系的十分之一左右. 2008 年出版的介绍数学最新研究成果的《普林斯顿数学指南》,哪怕由菲尔兹奖得主高尔斯(Timothy Gowers, 英国数学家)领衔主编,也需要多达 133 位著名数学家共同参与撰写.至于对它的粗略概括和划分,则可借鉴胡作玄先生“十大领域,百门学科,千余分支,万种问题”的观点(如图 1-1 所示).

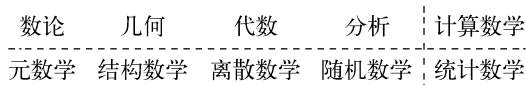


图 1-1 数学十大领域

1.2.1 经典数学概观

1900 年以前,经典数学主要研究数与形及其算法,可分为代数(含数论和计算数学)、几何和分析等领域,其中的内容经过近代几百年的发展演化,也都发生了革命性变化,如今已形成五大领域(如图 1-2 所示).

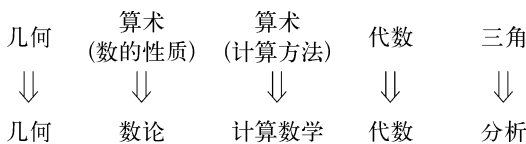


图 1-2 经典数学五大领域

前两个领域主要是“对象数学”,研究的是形与数;后三个领域主要是“演算数学”,主要目标是创立算法.经典数学在中小学数学教育上的反映,就是算术、代数、几何(平面几何、立体几何和解析几何)和三角这四门课程,在大学则对应高代(高等代数)、数分(数学分析)和解几(解析几何),也就是如今数学系大一的三门基础课.

1. 经典代数学

经典代数学的主要内容就是求解代数方程的理论,主要包括:解线性方程组,后来演化为线性代数学;解多项式方程,后来演化为抽象代数学;解多项式方程组,后来演化为代数几何学.

代数学的新研究对象可分为两类:一类是多项式、型(齐次多项式)、矩阵等,结合计算机产生了数值代数(矩阵计算)等学科;另一类则是群、环、域、模、格等,产生了群论、环论、格

论、伽罗瓦理论、李群、李代数、微分代数以及计算机代数(符号计算)等学科。

2. 几何学

几何学的主要研究对象就是形. 与数相比,形具有无比复杂的多样性. 从17世纪开始,随着数学的快速发展,几何学实现了两个重大突破:①笛卡儿引入代数方法,创立解析几何学;②瑞士数学家欧拉(Leonhard Euler, 1707—1783)、法国数学家蒙日(Gaspard Monge, 1746—1818)和德国数学家高斯(Carl Friedrich Gauss, 1777—1855)等引入分析方法,创立微分几何学. 到了19世纪,几何学更是迎来了黄金时代,形成了许多新兴学科(射影几何学以及仿射几何学、综合几何学、非欧几何学、黎曼几何学等),研究对象也随之被扩张. 更重要的是,德国数学家菲利克斯·克莱因(Felix Klein, 1849—1925)于1872年提出了爱尔兰根纲领,认为每一种几何学都对应一个变换群,几何学所要做的就是研究某种变换群下的几何不变量,从而用群论的观点统一了几何学.

3. 分析学

微积分通过引入无穷运算(极限、导数、积分、级数),实现了微分(无限细分)与积分(无限累加)的辩证统一. 分析学则是微积分的延续和发展,理论部分的研究对象是函数及算子,包括实分析(实变函数论)、复分析(复变函数论)、调和分析(傅里叶分析)以及泛函分析(包括算子理论)等;计算和求解部分则包括常微分方程、偏微分方程、积分方程和变分法等. 分析学是经典应用数学的主要组成部分,也是目前工科数学的主要内容之一. 值得注意的是,随着计算机网络中大数据与人工智能技术的发展,非线性分析已逐渐成为显学.

4. 数论

数是数学中第一个抽象概念,来源于数(shǔ)数. 数论则是以自然数为研究对象的数学理论. 在数学大都会中,数论的领地是最小的,但却是数学的核心领域之一,正如高斯所言:数学是自然科学的皇后,数论是数学中的皇冠.

按照使用的方法,数论可分为初等数论、解析数论、概率数论、计算数论、组合数论等;按照研究的对象,数论可分为代数数论、几何数论、超越数论等. 更前沿的数论领域,则有丢番图逼近、朗兰兹纲领、椭圆曲线等.

朗兰兹纲领又称大统一数学理论,是当代数论的一个重要的研究指导纲领,由加拿大数学家朗兰兹(Robert P. Langlands)在1967年给韦伊的一封信中提出. 作为一组影响深远的猜想,朗兰兹纲领精确地预言了数论、分析、代数和几何等领域之间存在的联系,揭示了所有数学的深层结构. 朗兰兹纲领的影响近年来与日俱增,与它有关的每一个新的进展都被看作是重要的成果,其中最经典的莫过于英国数学家维尔斯(Andrew Wiles)对费马大定理的证明.

5. 计算数学

计算数学也叫作数值分析,主要研究与各类科学与工程计算相关的计算方法,还包括解的存在性、唯一性、收敛性和误差分析等理论问题. 计算数学主要包括数值代数(矩阵计算)、微分方程数值解、数值逼近、特征值问题、数值优化、概率统计计算、边界元和有限元、反问题理论与计算、计算几何等学科.

有限元法是一种基于变分原理的偏微分方程数值解技术,由冯康院士(1920—1993)提出于20世纪50年代(发表于1965年). 他是中国计算数学的先驱者和创始人,对中国计算数学事业作出了杰出贡献. 为了纪念他,中国科学院于1994年设立了冯康科学计算奖,并于