高等院校基础课系列教材

课书房

高等数学及其应用（下）

Gaodeng Shuxue Jiqi Yingyong（Xia）

主　编　张振祺　马跃福

重庆大学出版社

内容提要

本书是为适应教学改革而编写的应用型本科(独立院校、民办本科)少课时教材.全书共5章,内容包括微分方程初步、无穷级数、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学及多元函数积分学.本书根据应用型本科院校,特别是民办本科(独立院校)学生实际情况和教学现状,本着以“易学、便于应用”为目的,“适度、够用”为原则,对教学内容、要求、篇幅作了适当调整.书中尽量突出对基本概念、基本理论、基本方法与运算的教与学,相对于传统教材,删除了大量理论证明与繁杂例题计算,增加了数学建模、数学实验与数学文化,使教学内容更形象、更具体、更生动,从而激发学生的学习兴趣.书中各章节都配有难度适中的练习题,有利于学生及时归纳和总结本章知识点.

本书适合培养应用型人才的理工科高等本专科院校(民办高校)作为教材,也可供经济管理类专业学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学及其应用.下 / 张振祺,马廷福主编. -- 重庆 :重庆大学出版社,2021.6

ISBN 978-7-5689-2611-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… ②马… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2021)第082353号

高等数学及其应用(下)

主　编　张振祺　马廷福
副主编　卢　琴　金　涛
　　　　张　娜　王建玲
参　编　武旭艺　杨文海　郭　锐
　　　　刘　斌　吕贤利

策划编辑:鲁　黎

责任编辑:李定群　　版式设计:鲁　黎
责任校对:邹　忌　　责任印制:张　策

*

重庆大学出版社出版发行
出版人:饶帮华
社址:重庆市沙坪坝区大学城西路21号
邮编:401331
电话:(023)88617190　88617185(中小学)
传真:(023)88617186　88617166
网址:http://www.cqup.com.cn
邮箱:fxk@cqup.com.cn(营销中心)
全国新华书店经销
重庆市国丰印务有限责任公司印刷

*

开本:787mm×1092mm　1/16　印张:14　字数:361千
2021年6月第1版　2021年6月第1次印刷
印数:1—3 000
ISBN 978-7-5689-2611-9　定价:38.00元

前言

本书是按照宁夏回族自治区重大教学改革项目“应用型本科院校-实施数学理论、数学实验及数学文化融合教学改革的探索”要求编写的一套教材，面向应用型本科(独立院校、民办本科)的理工科非数学专业学生.独立学院办学定位于培养“应用型人才”，新的培养模式的一个重要方面就是突出和加强实践性的实验实训、实习和课程设计等教学环节.作为学科的基础公共课教学，势必受到一定的影响.因此，我们要与时俱进，认同并参与教学改革与实践，适应并服务于培养“应用型人才”的教学模式，确立大众化高等教育的教学质量观，将新的教学理念、教学方法和教学手段在教学的各个环节中实践与实施.

本书编写以“因材施教，学以致用”为指导思想，贯彻“以应用为目的，简单易学，提高学习兴趣”的教学原则，突出“基本概念、基本理论、基本计算”的教学要求，力求做到利于“以学生为中心”的教学活动.相对于传统教材，本书删除了过于抽象、难度较大的理论证明、推导和例题，降低课程学习难度，根据实际教学增加数学建模教学案例和数学文化赏析，提高学生的实践应用能力和数学文化素养;根据教学内容增加数学实验，使教学内容更形象、更具体，以提高学生的学习兴趣.

参与本书编写的人员都是长期在一线从事本科数学教学的教师，有一定的教学经验，在编写内容及深度方面较好地反映和体现了应用型本科教学的需求.本书各章内容都包含数学建模、数学文化、数学实验，教学过程中融入课程思政，教数学建模时可以实验形象化展示，把数学理论、数学建模、数学实验和数学文化有机结合在一起.各章的内容小结是本章重要知识点及主要方法的汇总，简单介绍了本章内容在学科中的地位作用以及与和其他章节内容的联系，便于学生融会贯通地掌握学习内容.各章的教学要求以及重点与难点是依据学科教学大纲，结合学生实际水平提出的一个多层次基本要求，作为教与学的指导意见.每章节配置了较多的例题与习题，易于练习，便于自学.教师在授课时可以有选择地使用，其余供有精力的学生自主学习，自行完成.

《高等数学及其应用》(下)由中国矿业大学银川学院数学教研室编写.本书由张振祺、马廷福任主编,卢琴、金涛、张娜、王建玲任副主编,参编的有武旭艺、杨文海、郭锐、刘斌、吕贤利.本书的教学时数建议64学时,用“*”号标的内容,针对不同层次的教学要求,教师在授课中可有选择地使用.

在本书的编写过程中,学校、各职能部门及二级学院领导给予了极大的关注和支持.自治区教改项目“一流基层教研室”及其他教改项目给予了大量的经费支持.出版社的领导和编辑们对本书的编辑和出版给予了具体的指导和帮助,编者对此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,教材中难免存在不妥之处,敬请专家、同行及读者批评指正,使本书在教学实践中不断完善.

编　者

2020年9月

目录

第 5 章　微分方程初步 …… 1
5.1　微分方程的基本概念 …… 1
5.2　一阶微分方程 …… 4
5.3　可降阶的高阶微分方程 …… 11
5.4　二阶常系数线性微分方程 …… 15
实验 5.1　微分方程的通解 …… 21
实验 5.2　微分方程的特解 …… 23
实验 5.3　导弹追踪问题 …… 26
小结与练习 …… 28

第 6 章　无穷级数 …… 32
6.1　数项级数 …… 32
6.2　数项级数的审敛法 …… 36
6.3　幂级数 …… 43
6.4　函数展开成幂级数 …… 49
*6.5　傅里叶级数 …… 53
实验 6.1　级数 …… 59
小结与练习 …… 62

第 7 章　空间解析几何与向量代数 …… 68
7.1　空间直角坐标系与向量 …… 68
7.2　向量的数量积和向量积 …… 73
7.3　空间平面及其方程 …… 76
7.4　空间直线及其方程 …… 80
7.5　曲面与空间曲线 …… 84
实验 7.1　空间曲线 …… 93
实验 7.2　二次曲面 …… 97
小结与练习 …… 101

第 8 章　多元函数微分学 …… 106
8.1　多元函数 …… 106
8.2　偏导数与全微分 …… 110
8.3　多元复合函数与隐函数的偏导数 …… 117
8.4　多元函数微分学的应用 …… 124
实验 8.1　二元函数的极限 …… 135

实验 8.2　多元函数的偏导数 …………………………… 136
实验 8.3　隐函数的偏导数 …………………………… 138
实验 8.4　高阶偏导数 ………………………………… 141
实验 8.5　偏导数的几何应用 ………………………… 142
实验 8.6　多元函数的极值 …………………………… 144
小结与练习 ……………………………………………… 146

第 9 章　多元函数积分学 …………………………… 151
9.1　二重积分…………………………………………… 151
9.2　二重积分的计算…………………………………… 155
9.3　三重积分…………………………………………… 166
9.4　重积分的应用……………………………………… 173
9.5　第一类线面积分…………………………………… 178
9.6　第二类曲线积分与曲面积分……………………… 183
9.7　各种积分的联系及其应用………………………… 189
实验 9.1　二重积分 …………………………………… 195
实验 9.2　三重积分 …………………………………… 198
实验 9.3　第一类曲线积分 …………………………… 201
实验 9.4　第二类曲线积分 …………………………… 203
小结与练习 ……………………………………………… 207

参考文献 ……………………………………………… 215

第 5 章
微分方程初步

在许多实际问题中,往往不能直接找出所需要的函数关系,却比较容易列出所求函数的导数满足的关系式. 这样的关系式称为**微分方程**. 微分方程广泛应用于工程技术学科和经济学领域,已成为科技工作者的重要工具. 本章主要介绍有关微分方程的基本概念和几种常见类型的微分方程的解法.

5.1 微分方程的基本概念

为便于阐述微分方程的基本概念,先来考察两个简单的实际例子.

例 1 (冷却一个煮熟了的鸡蛋问题) 一个煮熟了的鸡蛋有 98 ℃,把它放在 18 ℃的水池里. 5 min之后,鸡蛋的温度是 38 ℃. 假定没有感到水变热,鸡蛋到达 20 ℃需要多长时间?

解 设在 t 时刻,鸡蛋温度为 $T(t)$. 由牛顿冷却定律(物体的温度在任何给定时刻变化的速率大致地正比于它的温度和周围介质温度之差)可得

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=k(T-18)$$

其中,k 为比例常数.

上式化为$\frac{\mathrm{d}T}{T-18}=k\mathrm{d}t$,积分得

$$\ln(T-18)=kt+\ln C$$

由题设可知,$t=0$ 时,$T=98$ ℃;$t=5$ 时,$T=38$ ℃. 由此确定 $C=80$,$k=-\frac{\ln 4}{5}$.

于是,物体温度 T(℃)与时间 t(min)的函数关系为

$$T-18=80\mathrm{e}^{-\frac{t\ln 4}{5}}$$

即

$$T=18+80\cdot \mathrm{e}^{-(0.2\ln 4)t}$$

由题意,令 $T=20$ ℃,得

$$t=\frac{\ln 40}{0.2\ \ln 4}\approx 13\ \text{min}$$

故物体从 98 ℃冷却到 20 ℃需 13 min.

例 2　设有一个质量为 m 的物体,以初始速度 v_0 垂直上抛,开始上抛时的位移(高度)为 s_0. 设此物体的运动只受重力的影响,试确定该物体运动的位移 s 与时间 t 的函数关系.

解　设位移与时间的函数关系为 $s=s(t)$,因为物体运动的加速度是位移 s 对时间 t 的二阶导数,且假设只受重力的影响,所以根据牛顿第二定律有

$$ms''(t)=-mg$$

即

$$s''(t)=-g$$

其中,g 是重力加速度,它是一常数.

因为物体运动速度 $v=v(t)=s'$,所以上式改写为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-g$$

两端积分,得

$$v=-gt+C_1$$

再积分一次,得

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$$

其中,C_1,C_2 是两个任意常数.

由题设初始速度为 v_0,且开始上抛时的位移为 s_0,代入上式,得 $C_1=v_0$,$C_2=s_0$. 于是

$$s=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$$

即所求的函数关系.

上面两个例子就是利用函数的导数或微分建立了函数关系,并解决了有关问题. 下面介绍微分方程的一般概念.

定义 5.1　含未知函数的导数或微分的方程,称为**微分方程**. 微分方程中未知函数的导数的最高阶数,称为**微分方程的阶**.

未知函数为一元函数的微分方程,称为**常微分方程**. 例如,例 1 中 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=k(T-18)$ 是一阶常微分方程,例 2 中 $s''(t)=-g$ 是二阶常微分方程.

未知函数为多元函数,从而出现多元函数的偏导数的方程,称为**偏微分方程**.

本章简要介绍微分方程初步知识,因此,后文提到微分方程或方程时,均指常微分方程.

定义 5.2　若某个函数代入微分方程中,能使该方程成为恒等式,则称此函数为该**微分方程的解**.

如果微分方程的解中包含任意独立的(即不可合并而使个数减少的)常数,且任意常数的个数与微分方程的阶数相同,这样的解被称为微分方程的**通解**;在通解中给予任意常数以确定的值而得到的解,称为**特解**.

例 1 中,方程 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=k(T-18)$ 的通解为 $\ln(T-18)=kt+\ln C$,而 $T=18+80\cdot \mathrm{e}^{-(0.2\ln 4)t}$ 为

特解.

例 2 中,方程 $s''(t)=-g$ 的通解为 $s=-\dfrac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$,而 $s=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$ 为特解.

一般地,特解是当自变量取定某个特定值时确定的解,这种特定条件称为微分方程的**初值条件**. 例如,例 1、例 2 初值问题的微分方程分别表示为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=k(T-18)\\ T(0)=98\end{cases}\qquad\begin{cases}s''(t)=-g\\ v(0)=v_0,s(0)=s_0\end{cases}$$

例 3　验证 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x$ 是微分方程 $y''+y=x$ 的解;并求满足初始值 $y(0)=1$, $y'(0)=3$ 的特解.

解　由于

$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+1$$
$$y''=-C_1\cos x-C_2\sin x$$

将 y'',y 代入方程左边

$$y''+y=-C_1\cos x-C_2\sin x+C_1\cos x+C_2\sin x+x\equiv x$$

函数 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x$ 及其导数代入 $y''+y=x$ 后成为一个恒等式.

因此,函数 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x$ 是微分方程 $y''+y=x$ 的解.

将条件 $y(0)=1$,$y'(0)=3$ 代入 y 及 y'的表达式,得

$$\begin{cases}C_1\cos 0+C_2\sin 0+0=1\\ -C_1\sin 0+C_2\cos 0+1=3\end{cases}$$

解得 $C_1=1$,$C_2=2$,故所求的特解为

$$y=\cos x+2\sin x+x$$

习题 5.1

1. 指出下列各微分方程的阶数:

(1)$(2x-y^2)\mathrm{d}x+(x^2+y)\mathrm{d}y=0$;　　(2)$x(y')^3-2y''=0$;

(3)$x^3y'''-2y''-y=0$;　　(4)$x^2(y')^3-2y'=0$.

2. 验证下列各给定函数是否为对应微分方程的解:

(1)$xy'=2y$,$y=5x^2$;

(2)$y''+y=0$,$y=3\sin x-4\cos x$;

(3)$y''-2y'+y=0$,$y=x^2\mathrm{e}^x$;

(4)$y''=1+(y')^2$,$y=x^2+C$.

3. 确定下列函数中任意常数 C_1,C_2 的值,使函数满足所给的初值条件:

(1)$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$,$y|_{x=0}=0$,$y'|_{x=0}=1$;

(2)$y=C_1\cos x+C_2\sin x$,$y|_{x=0}=1$,$y'|_{x=0}=3$.

5.2 一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y')=0$$

其中,x 为自变量,y 为未知函数,y'为 y 的一阶导数.

本节介绍几种常见的一阶微分方程及其解法.

5.2.1 可分离变量微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$$

的一阶微分方程,称为**可分离变量微分方程**.

其解法是将变量分离,使自变量 x 及其微分 $\mathrm{d}x$,未知函数 y 及其微分 $\mathrm{d}y$ 分离到等号的两边,即上式化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\,\mathrm{d}x \qquad g(y)\neq 0$$

两边积分,即可得到方程的通解.

例 1 求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解.

解 当 $y\neq 0$ 时,分离变量后,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x$$

两边积分$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\mathrm{d}x$,得

$$\ln|y|=x^2+C_1$$

即

$$|y|=\mathrm{e}^{x^2+C_1}$$

或

$$y=\pm\mathrm{e}^{x^2+C_1}=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2}$$

其中,e^{C_1}为任意正常数.

去掉绝对值记号,将正负号转移到常数上,可记 $C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$. 因此,方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{x^2} \qquad C\text{ 为任意常数}$$

经检验,当 $C=0$ 时,$y=0$ 仍是原方程的解. 不难验证,$y=C\mathrm{e}^{x^2}$的确使原方程成为恒等式.

为了简便,以后再遇到类似情形时,不再详细写出处理绝对值正负记号的过程. 例如,本例可直接把求解过程写成:

分离变量后,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x$$

两边积分$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$，得

$$\ln y = x^2 + \ln C$$

即

$$y = Ce^{x^2} \qquad C \text{ 为任意常数}$$

例 2　求初值问题的特解$\begin{cases} dy = -\frac{y}{x}dx \\ y|_{x=2} = 4 \end{cases}$.

解　对方程分离变量，得

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

两边积分$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x}$，得

$$\ln y = -\ln x + \ln C$$

于是，得方程的通解 $xy = C$.

因 $y|_{x=2} = 4$，故 $C = 8$. 于是，此初解问题的解为

$$xy = 8$$

即

$$y = \frac{8}{x}$$

例 3（驾驶者酒驾问题）　设警方对驾驶员饮酒后驾车时血液中酒精含量的规定为不超过 80%（mg/mL）. 现有一起交通事故，在事故发生 3 h 后，测得驾驶员血液中酒精含量为 56%（mg/mL）. 又过 2 h 后，测得驾驶员血液中酒精含量降为 40%（mg/mL）. 试判断事故发生时，驾驶员是否违反了血液中酒精含量的规定?

解　设 $x(t)$ 为时刻 t 的驾驶员血液中酒精的含量，依题意得

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

其中，$k>0$ 为比例常数. 因为酒精含量随时间推移是递减的，所以 k 前有负号. 由初始条件 $x(0) = x_0$，得 $x = x(t)$ 满足微分方程的初值问题为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -kx \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

解可分离变量方程

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

两边积分，得

$$\ln x = -kt + \ln C$$

故通解为

$$x = Ce^{-kt}$$

由初始条件 $x(0) = x_0$，得 $C = x_0$. 于是，驾驶员血液中酒精含量 $x(t)$ 随 t 变化的规律为

$$x(t)=x_0\mathrm{e}^{-kt}$$

则 $x_0=x(0)$ 为所求.

又由 $x(3)=56$,$x(5)=40$,代入 $x(0)=x_0$,可得

$$\begin{cases}x_0\mathrm{e}^{-3k}=56\\x_0\mathrm{e}^{-5k}=40\end{cases}\Rightarrow \mathrm{e}^{2k}=\frac{56}{40}\Rightarrow k=0.17$$

将 $k=0.17$ 代入,得

$$x_0\mathrm{e}^{-3\times0.17}=56\Rightarrow x_0=56\cdot\mathrm{e}^{3\times0.17}\approx93.25>80$$

故事故发生时,驾驶员血液中酒精含量已超出规定.

*例 4　设降落伞从跳伞塔下落后,所受空气阻力与速度成正比. 又设降落伞离开跳伞塔时($t=0$)速度为零,求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解　设降落伞下落速度为 $v(t)$. 降落伞在空中下落时,同时受到重力 P 与阻力 R 的作用. 重力大小为 mg,方向与 v 一致;阻力大小为 kv(k 为比例系数),方向与 v 相反. 因此,降落伞所受外力为

$$F=mg-kv$$

根据牛顿第二运动定律 $F=ma$,以及初始条件为 $v|_{t=0}=0$,故函数 $v(t)$ 应满足的方程为

$$\begin{cases}m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv\\v|_{t=0}=0\end{cases}$$

方程 $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv$ 是可分离变量. 分离变量后,得

$$\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv}=\frac{\mathrm{d}t}{m}$$

两端积分,并考虑 $mg-kv>0$,有

$$-\frac{1}{k}\ln(mg-kv)=\frac{t}{m}+C_1$$

得方程的通解为

$$v=\frac{mg}{k}+C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\qquad C=-\frac{\mathrm{e}^{-kC_1}}{k}$$

将初始条件 $v|_{t=0}=0$代入通解,得

$$C=-\frac{mg}{k}$$

故所求方程的特解为

$$v=\frac{mg}{k}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t})$$

由上式可知,随着时间 t 的增大,速度 v 逐渐接近于常数$\dfrac{mg}{k}$. 也就是说,跳伞后开始阶段是加速运动,但以后逐渐接近于等速运动.

5.2.2　齐次微分方程

形如

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的微分方程,称为**齐次微分方程**.

变量替换,设 $u=\frac{y}{x}$,则 $y=xu$,$y'=u+xu'$,代入微分方程即可化为可分离变量方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

求得解后,将 $u=\frac{y}{x}$ 回代,即得齐次微分方程的解.

例 5　解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{xy}{x^2-y^2}$.

解　原方程可写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

属于齐次方程.

令 $\frac{y}{x}=u$,有 $f(u)=\frac{u}{1-u^2}$,$f(u)-u=\frac{u}{1-u^2}-u=\frac{u^3}{1-u^2}$,代入 $\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$,得可分离变量方程

$$\frac{(1-u^2)\mathrm{d}u}{u^3}=\left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

两边积分,得

$$-\frac{1}{2u^2}-\ln u=\ln x+\ln C$$

或写为

$$ux=-C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2u^2}}$$

把 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式,得原方程的通解为

$$y+C\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2y^2}}=0$$

*例 6　求过点 $A(0,1)$ 的曲线,使曲线上任意一点 $M(x,y)$ 与原点的距离与曲线过点 M 的切线在 y 轴上的截距等长.

解　设所求曲线的方程为 $y=y(x)$,过其上任意一点 $M(x,y)$ 作切线交 y 轴于 N(见图 5.1). 由题设可知,$|ON|=|OM|$,显然

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2}$$

过点 M 的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x)$$

上式令 $X=0$,得 $Y=|ON|=y-xy'$. 由此得齐次微分方程

$$\sqrt{x^2+y^2}=y-xy'$$

即

$$y'=\frac{y}{x}-\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

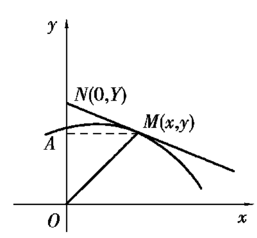

图 5.1

令 $u=\frac{y}{x}$,解可分离变量方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

积分得

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln C-\ln x$$

由此得通解

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=C$$

即

$$x^2=C(C-2y)$$

这是以 y 轴为对称轴的抛物线簇.

把 $A(0,1)$ 代入通解,得 $C=2$. 于是,所求曲线是抛物线

$$x^2=4(1-y)$$

即

$$y=1-\frac{x^2}{4}$$

5.2.3 一阶线性微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{1}$$

的微分方程,称为**一阶线性微分方程**.

其中,$P(x)$ 和 $Q(x)$ 为已知的连续函数,$P(x)$ 是函数 y 的系数,$Q(x)$ 称为自由项.

一阶线性微分方程的特点是:方程中关于未知函数 y 及未知函数的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$都是一次的.

如果 $Q(x)\neq 0$,则称方程(1)为**一阶非齐次线性微分方程**.

如果 $Q(x)\equiv 0$,即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0 \tag{2}$$

称方程(2)为方程(1)所对应的**一阶齐次线性微分方程**.

1. 一阶齐次线性微分方程的解法

方程(2)属于可分离变量微分方程,整理可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$$

两端积分,并把任意常数写成 $\ln C$ 的形式,得

$$\ln y=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln C$$

即

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\qquad C\text{ 为任意常数} \tag{3}$$

式(3)即方程(2)的通解.

2. 一阶非齐次线性微分方程的解法(**常数变易法**)

由于方程(1)与方程(2)的差异在于自由项 $Q(x)\neq 0$,因此,推测方程(1)的通解应与式(3)的形式类似,但其中的 C 不可能是常数,而应该是一个关于 x 的函数,记作 $u(x)$.

不妨设函数

$$y = u(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{4}$$

是非齐次线性微分方程(1)的解,此时问题转化为确定函数 $u(x)$.

为此将式(4)两端对 x 求导,得

$$\frac{dy}{dx} = u'(x)e^{-\int P(x)dx} - u(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

代入方程(1)中,得

$$u'(x)e^{-\int P(x)dx} - u(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

化简后,得

$$u'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

将上式积分,得

$$u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \tag{5}$$

其中,C 是任意常数.

把式(5)代入式(4)中,即得非齐次线性方程(1)的通解为

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right] \qquad C\text{ 为任意常数} \tag{6}$$

式(6)为一阶非齐次线性方程的**通解公式**.

将式(6)改写为两项之和

$$y = e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + Ce^{-\int P(x)dx}$$

容易看出上式第一项就是方程(1)的一个特解;第二项是方程(1)所对应的齐次线性方程的通解. 由此可知,**一阶非齐次线性方程的通解是非齐次方程的一个特解与对应的齐次方程的通解之和.**

例 7　求微分方程$\frac{dy}{dx}+2xy=2xe^{-x^2}$的通解.

解　方法 1:直接利用通解公式

将 $P(x)=2x, Q(x)=2xe^{-x^2}$,代入式(6),得原方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int 2xdx}\left[\int 2xe^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx + C\right] \\ &= e^{-x^2}\left[\int 2xdx + C\right] \\ &= e^{-x^2}(x^2 + C) \qquad C\text{ 为任意常数} \end{aligned}$$

*方法 2:用常数变易法求解

先求原方程对应齐次微分方程

$$\frac{dy}{dx}+2xy=0$$

的通解;再对上式分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -2x\mathrm{d}x$$

两端积分,得

$$\ln y = -x^2 + \ln C$$

即

$$y = C\mathrm{e}^{-x^2} \qquad C \text{ 为任意常数}$$

是所求对应齐次方程的通解.

令 $C = u(x)$,则 $y = u(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ 为原方程的解,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u'(x)\mathrm{e}^{-x^2} - 2xu(x)\mathrm{e}^{-x^2}$$

将 y 及 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 代入原方程,得

$$u'(x)\mathrm{e}^{-x^2} - 2xu(x)\mathrm{e}^{-x^2} + 2xu(x)\mathrm{e}^{-x^2} = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$$

化简后,得

$$u'(x) = 2x$$

积分得

$$u(x) = \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C \qquad C \text{ 为任意常数}$$

故得原方程的通解为

$$y = (x^2 + C)\mathrm{e}^{-x^2} \qquad C \text{ 为任意常数}$$

例 8(溶液的混合问题) 一容器内盛有 50 L 的盐水溶液,其中含有 10 g 的盐. 现将每升含盐 2 g 的溶液以 5 L/min 的速度注入容器,并不断进行搅拌,使混合液迅速达到均匀,同时混合液以 3 L/min 的速度流出溶液. 问在任一时刻 t 容器中含盐量是多少?

解 设 t 时刻容器中含盐量为 x g,则容器中含盐量的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \text{盐流入容器的速度} - \text{盐流出容器的速度}$$

其中

$$\text{盐流入容器的速度} = 2\ \mathrm{g/L} \times 5\ \mathrm{L/min} = 10\ \mathrm{g/min}$$

$$\text{盐流出容器的速度} = \frac{x}{50 + 2t}\ \mathrm{g/L} \times 3\ \mathrm{L/min} = \frac{3x}{50 + 2t}\ \mathrm{g/min}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 10 - \frac{3x}{50 + 2t}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{3x}{50 + 2t} = 10$$

直接利用通解公式,将 $P(t) = \frac{3}{50 + 2t}$,$Q(t) = 10$,代入式(6),得原方程的通解为

$$x = \mathrm{e}^{-\int \frac{3}{50+2t}\mathrm{d}t}\left[\int 10\mathrm{e}^{\int \frac{3}{50+2t}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + C\right]$$

$$= (50+2t)^{-\frac{3}{2}}\left[10\int(50+2t)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t + C\right]$$
$$= C(50+2t)^{-\frac{3}{2}} + 2(50+2t)$$
$$= C(50+2t)^{-\frac{3}{2}} + 4t + 100$$

将初始条件$x\big|_{t=0}=10$代入通解,故 $C=-22\,500\sqrt{2}$.

因此,在时刻 t 容器中的含盐量(g)为

$$x = 100 + 4t - 22\,500\sqrt{2}(50+2t)^{-\frac{3}{2}}$$

注意　直接使用一阶非齐次线性方程的通解式(6)时,必须先把方程化为形如式(1)的标准形式,再确定未知函数 y 的系数 $P(x)$ 及自由项 $Q(x)$.

习题 5.2

1. 求下列各微分方程的通解:

(1) $xy' - y\ln y = 0$;　　(2) $yy' = \mathrm{e}^x \sin x$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1+y}{1-x}$;　　(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{xy}{\sqrt{1-x^2}}$;

(5) $\mathrm{d}y = -\dfrac{(1+2y)x}{1+x^2}\mathrm{d}x$;　　(6) $\mathrm{d}y = \dfrac{xy^2+x}{x^2y-y}\mathrm{d}x$.

2. 求下列齐次微分方程的通解:

(1) $y' = \dfrac{y}{y-x}$;　　(2) $(x+y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$;

(3) $xy' - y - \sqrt{x^2+y^2} = 0$;　　(4) $xy' = y(\ln y - \ln x)$.

3. 求下列一阶线性微分方程的通解:

(1) $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$;　　(2) $xy' = x - y$;

(3) $y' + 2xy = 4x$;　　(4) $y' - 2xy = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

4. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}x}{y} + \dfrac{\mathrm{d}y}{x} = 0, y\big|_{x=3} = 4$;

(2) $y'\sin x - y\cos x = 0, y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$;

(3) $(y^2 - 3x^2)\mathrm{d}y - 2xy\mathrm{d}x = 0, y\big|_{x=0} = 1$;

(4) $xy' + y = 3, y\big|_{x=1} = 0$;

(5) $xy' - 2y = x^3\mathrm{e}^x, y\big|_{x=1} = 0$.

5. 曲线通过原点,且该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线斜率等于 $2x+y$,求该曲线的方程.

5.3　可降阶的高阶微分方程

上一节讨论了几种一阶微分方程的解法. 对某些二阶或二阶以上的高阶微分方程,一般可