高等职业教育基础课程系列教材
GAODENG ZHIYE JIAOYU JICHU KECHENG XILIE JIAOCAI

高等数学应用基础学习指导书

GAODENG SHUXUE YINGYONG JICHU XUEXI ZHIDAOSHU

主　编○冯耀川
主　审○尹志平

西南交通大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学应用基础（含学习指导书）. 1，高等数学应用基础 / 冯耀川主编. —成都：西南交通大学出版社，2020.4
ISBN 978-7-5643-7361-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①冯… Ⅲ. ①高等数学－高等职业教育－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2020）第 012520 号

Gaodeng Shuxue Yingyong Jichu (Han Xuexi Zhidao Shu)

高等数学应用基础（含学习指导书）

主编　冯耀川

责任编辑　张宝华
封面设计　何东琳设计工作室

总印张：26.75　总字数：667千
成品尺寸：185 mm × 260 mm
版次：2020年4月第1版
印次：2020年4月第1次
印刷：四川森林印务有限责任公司
书号：ISBN 978-7-5643-7361-0

出版发行：西南交通大学出版社
网址：http://www.xnjdcbs.com
地址：四川省成都市金牛区二环路北一段111号
西南交通大学创新大厦21楼
邮政编码：610031
发行部电话：028-87600564　028-87600533
套价：68.00元

课件咨询电话：028-81435775
图书如有印装质量问题　本社负责退换

目　录

第 1 章
多元函数微积分

1.1 多元函数的基本概念

基本内容

1. 二元函数的概念

1）平面区域

平面区域是平面的一部分，通常是由一条或几条曲线所围成的部分平面，围成区域的曲线叫作区域的边界，包括边界在内的区域称为**闭区域**，不包括边界的区域称为**开区域**.

点 P_0 的 δ **邻域** $U(P_0,\delta)=\{(x,y)|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$；

点 P_0 的**去心** δ **邻域** $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)=\{(x,y)|0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$.

$U(P_0,\delta)$ 在几何上表示以 P_0 为圆心、以 δ 为半径的圆内部的点的集合.

2）二元函数的定义

设 D 是平面 xOy 上的一个非空点集，如果对于任意一点 $P(x, y)\in D$，变量 z 按照一定的对应法则总有唯一的值与之对应，则称 z 是变量 x, y 的**二元函数**，记作

$$z=f(x, y),$$

其中 x, y 称为**自变量**，z 称为**因变量**，点集 D 称为函数的**定义域**.

3）二元函数的几何意义

在空间直角坐标系中，二元函数 $z=f(x, y)$一般表示一空间曲面. 设点 $P(x, y)$是二元函数 $z=f(x, y)$的定义域 D 内任意一点，其相应的函数值为 $z=f(x, y)$，当 P 在 D 内变动时，对应点 $M(x, y, z)$的轨迹就是函数 $z=f(x, y)$的几何图形. 该几何图形一般是一曲面.

2. 二元函数的极限与连续

1）二元函数的极限

设函数 $z=f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$的某去心邻域内有定义，如果当动点 $P(x, y)$沿任意路径趋近于点 P_0 时，函数 $z=f(x, y)$总趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为二元函数 $z=f(x, y)$当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

需要注意的是，在一元函数的极限中，点 x 只是沿着 x 轴趋向于点 x_0，而在二元函数的极限中，$P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 是在平面上沿任意路径或任意方式趋近的过程，如果点 P 只取某

些特殊的方式趋近于点 P_0（如点 P 沿坐标轴或其他某条曲线趋近于 P_0），即使这时函数值趋近于某一个确定的值，也不能断定函数的极限就一定存在. 因此，当点 P 沿不同路径趋近于点 P_0 时，如果函数趋近于不同的值，则函数的极限不存在.

关于二元函数的极限运算，有与一元函数类似的运算法则.

2）二元函数的连续

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 及它的某个邻域内有定义，$P(x,y)$ 是该邻域内任意一点，如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)\ ,$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**连续**.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上每一点处都连续，则称函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上**连续**，或称 $z=f(x,y)$ 是区域 D 上的**连续函数**.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处不连续，则称点 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $z=f(x,y)$ 的**间断点**.

二元连续函数经过有限次和、差、积、商（分母不为 0）及有限次复合后仍是连续函数. 由此可以得出：**多元初等函数在其定义域内连续**.

性质 1（有界性与最大值最小值定理）　在有界闭区域 D 上连续的二元函数，必在区域 D 上有界，且能取得它的最大值和最小值.

性质 2（介值定理）　在有界闭区域 D 上连续的二元函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

学习要求

1. 理解平面区域和二元函数的概念；会求二元函数的定义域.
2. 会求二元函数的极限；掌握二元连续函数的性质，会判断二元函数的连续性.

例题解析

例 1　求下列极限：（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{1+xy}-1}$；（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

解　（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{1+xy}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy(\sqrt{1+xy}+1)}{1+xy-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{1+xy}+1)=2$；

（2）
$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\left[\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y\right]$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{y\to 2}y=1\times 2=2\ .$$

例 2 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点(0, 0)处的连续性.

解 当点(x, y)沿直线 $y=x$ 趋近于点(0, 0)时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\frac{xx}{x^2+x^2}=\frac{1}{2};$$

当点(x, y)沿直线 $y=2x$ 趋近于点(0, 0)时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=2x\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=2x\to 0}}\frac{x\cdot 2x}{x^2+(2x)^2}=\frac{2}{5},$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

虽然函数 $f(x,y)$ 在点(0, 0)处有定义，但在点(0, 0)处不连续.

例 3 讨论函数 $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ 的连续性.

解 函数的定义域为 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\neq 1\}$.

因为函数 $f(x,y)$ 是初等函数，而初等函数在其定义域内是连续函数，所以函数 $f(x,y)$ 的连续区域为 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\neq 1\}$，且函数 $f(x,y)$ 在圆周 $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$ 上的各点都不连续，即圆周 C 上各点都是函数的间断点.

精选习题

1. 在平面直角坐标系中画出下列各点集，并判断它们是有界集还是无界集.

（1）$D=\{(x,y)\,|\,1\leqslant x^2+y^2<4\}$；

（2）$D=\{(x,y)\,|\,y>x^2\}$；

（3）$D=\{(x,y)\,|\,x\neq 0, y\neq 2\}$；

（4）$D=\{(x,y)\,|\,x^2+(y-2)^2<4\}\cap\{(x,y)\,|\,x^2+(y-1)^2\geqslant 1\}$.

2. 已知 $f(x,y)=\cos(x^2-y^2)+xy\ln\dfrac{y}{x}$，求 $f\left(\dfrac{x}{3},2y\right)$.

3. 求下列极限.

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy^2}{\sqrt{2xy^2+1}-1}$；

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

（3）$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{x-y}{3x^2+y^2-1}$；

（4）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\ln(e^x+y)}{2x^2+3y^2}$.

4. 讨论函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 的连续性.

1.2　偏导数与全微分

基本内容

1. 偏导数的概念

设二元函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$及它的某个邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处**对 x 的偏导数**，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \quad 或 \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \quad 或 \quad z_x(x_0,y_0) \quad 或 \quad f_x(x_0,y_0).$$

类似地，函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处**对 y 的偏导数**为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

如果函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内每一点(x,y)处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 x,y 的函数，称之为函数 $z=f(x,y)$对自变量 x 的**偏导数函数**，简称**偏导数**，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad 或 \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad 或 \quad z_x \quad 或 \quad f_x(x,y).$$

类似地，函数 $z=f(x,y)$对自变量 y 的偏导数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial y} \quad 或 \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad 或 \quad z_y \quad 或 \quad f_y(x,y).$$

2. 偏导数的几何意义

偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 是曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\y=y_0\end{cases}$在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率；偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 是曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\x=x_0\end{cases}$在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率.

3. 高阶偏导数

一般来说，函数 $z=f(x,y)$的两个偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 仍是 x,y 的函数，如果这两个函数关于 x,y 的偏导数也存在，则称它们的偏导数是 $f(x,y)$的**二阶偏导数**. 按照对变量求导次序的不

同有下列四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)\text{；}\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)\text{；}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)\text{；}\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)\text{，}$$

其中第二、第三两个偏导数称为**混合偏导数**. 同样可以定义三阶、四阶……n 阶偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**.

定理　若函数 $z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续，那么在区域 D 内，这两个二阶混合偏导数必相等.

4. 全微分

1）全微分的概念

设函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)的某邻域内有定义，如果函数在点(x,y)处的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\text{，}$$

其中 A, B 与 $\Delta x, \Delta y$ 无关，只与 x, y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)处可微分，$A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)处的**全微分**，记作 dz，即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y\,.$$

如果函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)处可微，则函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)处连续.

可微的必要条件：如果函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)处可微，则函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)处的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)处的全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\,.$$

可微的充分条件：如果函数 $z=f(x,y)$的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点(x,y)处连续，则函数在该点可微.

2）全微分的计算

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\,.$$

学习要求

1. 理解偏导数、微分的概念，掌握可微的充分条件和必要条件.
2. 会求一阶和二阶偏导数.
3. 会求全增量和全微分.

例题解析

例 1　已知函数 $z=f(x,y)=x^3-2x+\mathrm{e}^{y^2-1}+\sin(x+y)-3$，求函数 $f(x,y)$ 在点$(0,2)$处的两个偏导数.

这是教材中的例 1，除了教材中的解法外，还可以先固定一个自变量的值，将求二元函数的偏导数转化为求一元函数的导数，下面用这种方法来解.

解　将 $y=2$ 代入函数式得

$$f(x,2)=x^3-2x+\mathrm{e}^3+\sin(x+2)-3\,.$$

从而

$$f_x'(x,2)=3x^2-2+\cos(x+2)\,.$$

所以

$$f_x'(0,2)=3\times0^2-2+\cos(0+2)=-2+\cos2\,.$$

将 $x=0$ 代入函数式得

$$f(0,y)=\mathrm{e}^{y^2-1}+\sin y-3\,.$$

从而

$$f_y'(0,y)=2y\mathrm{e}^{y^2-1}+\cos y\,.$$

所以

$$f_y'(0,2)=4\mathrm{e}^3+\cos2\,.$$

例 2　求下列函数的偏导数.

（1）$z=(1+xy)^y$；　　　　（2）$u=x^{\frac{y}{z}}$.

解　（1）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}(1+xy)=y^2(1+xy)^{y-1}$；

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}[\mathrm{e}^{y\ln(1+xy)}]=\mathrm{e}^{y\ln(1+xy)}\frac{\partial}{\partial y}[y\ln(1+xy)]\\&=\mathrm{e}^{y\ln(1+xy)}\left[\ln(1+xy)+y\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial y}(1+xy)}{1+xy}\right]=\mathrm{e}^{y\ln(1+xy)}\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]\\&=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right].\end{aligned}$$

（2）$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$；

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac{y}{z}}\ln x\cdot\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{z}\right)=\dfrac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$；

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{\frac{y}{z}}\ln x\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{z}\right)=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x .$$

例 3 设 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，求证 $l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=0$.

证明 因为

$$\frac{\partial T}{\partial l}=2\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}}\cdot\frac{1}{g}=\frac{\pi}{\sqrt{gl}} ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial g}=2\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}}\cdot\left(-\frac{l}{g^2}\right)=-\frac{\pi l}{g\sqrt{gl}} ,$$

所以
$$l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=l\frac{\pi}{\sqrt{gl}}+g\left(-\frac{\pi l}{g\sqrt{gl}}\right)=\frac{\pi l}{\sqrt{gl}}-\frac{\pi l}{\sqrt{gl}}=0 .$$

例 4 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$，$f_{yz}(0,-1,0)$.

解 因为

$$f_x=y^2+2zx ,\quad f_y=2xy+z^2 ,$$

所以
$$f_{xx}=2z ,\quad f_{xz}=2x ,\quad f_{yz}=2z .$$

所以
$$f_{xx}(0,0,1)=2 ,\quad f_{xz}(1,0,2)=2 ,\quad f_{yz}(0,-1,0)=0 .$$

例 5 求函数 $z=\frac{y}{x}$ 当 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

解 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\frac{y}{x}$；

$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=-\frac{y}{x^2}\Delta x+\frac{1}{x}\Delta y$.

将 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$ 代入上面两个式子得：

全增量 $\Delta z=\frac{1+(-0.2)}{2+0.1}-\frac{1}{2}=-0.119$；

全微分 $\mathrm{d}z=-\frac{1}{2^2}\times 0.1+\frac{1}{2}\times(-0.2)=-0.125$.

精选习题

1. 求下列函数的偏导数.

（1）$z=x^3y-xy^3$；（2）$s=\frac{u^2+v^2}{uv}$；（3）$z=\sqrt{\ln(xy)}$；

（4）$z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$；（5）$z=\ln\tan\frac{y}{x}$；（6）$u=\arctan(x-y)^z$.

2. 已知曲线 $\begin{cases} z = \dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$，求该曲线在点(2, 4, 5)处的切线对于 x 轴的倾斜角.

3. 已知 $z = f(x, y) = \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，求证 $x^2 f_x + y^2 f_y = 2z$.

4. 求函数 $z = \mathrm{e}^{xy}$ 当 $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0.2$, $\Delta y = 0.1$ 时的全增量和全微分.

5. 设 $z = u^2 + v^2$， $u = x - y$， $v = x + y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

1.3　二元函数的极值与最值

基本内容

1. 二元函数的极值

1）二元函数极值的概念

设二元函数 $z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某个邻域内有定义，如果对于该邻域内任何异于(x_0, y_0)的点(x, y)都有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0)\ （或 f(x, y) > f(x_0, y_0)\ ），$$

则称 $f(x_0, y_0)$为函数 $f(x, y)$的极大（小）值. 极大值极小值统称为极值. 使函数取得极值的点称为极值点.

定理 1（极值存在的必要条件） 设函数 $z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处的一阶偏导数存在，且在点(x_0, y_0)处有极值，则它在该点的偏导数一定为零，即

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 . \tag{1.3.1}$$

满足 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ 的点(x_0, y_0)称为函数 $z = f(x, y)$的**驻点**.

定理 2（极值存在的充分条件） 设函数 $z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处的某邻域内连续且有连续的一阶及二阶偏导数，且 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$，令

$$A = f_{xx}(x_0, y_0)，\quad B = f_{xy}(x_0, y_0)，\quad C = f_{yy}(x_0, y_0)，$$

则（1）当 $AC - B^2 > 0$ 时，函数 $z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处有极值，且当 $A < 0$ 时 $f(x_0, y_0)$是极大值，当 $A > 0$ 时 $f(x_0, y_0)$是极小值；

（2）当 $AC - B^2 < 0$ 时，函数 $z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处无极值；

（3）当 $AC - B^2 = 0$ 时，函数 $z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)处可能有极值，也可能没有极值.

2）求函数极值的步骤

（1）求驻点(x_0, y_0). 通过解方程组 $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ 可得.

（2）求每个驻点(x_0, y_0)处的二阶偏导数：$A = f_{xx}(x_0, y_0)$，$B = f_{xy}(x_0, y_0)$，$C = f_{yy}(x_0, y_0)$，以及$AC - B^2$的值.

（3）确定$AC - B^2$的符号，并根据定理 2 判定$f(x_0, y_0)$是不是极值，是极大值还是极小值，并求出极值.

2. 二元函数的最大值和最小值

有界闭区域D上的连续函数一定有最大值和最小值. 但在实际问题中，通常函数在所讨论的区域内是连续可导的，且最大（小）值一定在区域的内部取得，这时只需要比较驻点的函数值就可以求出函数的最值. 如果函数在区域内部只有一个驻点，则该驻点就是函数的最值点.

求二元函数的最大值和最小值的步骤为：

（1）求驻点、一阶偏导数不存在的点、区域边界上的点；

（2）求以上各点的函数值，最大的为最大值，最小的为最小值.

*3. 条件极值　拉格朗日乘数法

对自变量有附加条件的极值称为**条件极值**. 有些条件极值可转化为无条件极值来求解，而有些则不能转化或转化后很复杂.

拉格朗日乘数法　要找函数$z = f(x, y)$在附加条件$\varphi(x, y) = 0$下的可能极值点，可以先作拉格朗日函数：

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

其中λ为参数.

再解方程组：

$$\begin{cases} L_x(x, y) = 0, \\ L_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda\varphi_x(x, y) = 0, \\ f_y(x, y) + \lambda\varphi_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

得$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \\ \lambda = \lambda_0. \end{cases}$则点$(x_0, y_0)$就是函数$z = f(x, y)$在附加条件$\varphi(x, y) = 0$下的可能极值点.

学习要求

1. 理解二元函数极值的概念.

2. 掌握求二元函数的极值和最值的步骤，会求二元函数的极值，能将求二元函数的最值问题应用于实际中.

例题解析

例 1　求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值.

解　$f_x(x,y)=4-2x$，$f_y(x,y)=-4-2y$.

解方程组 $\begin{cases}4-2x=0\\-4-2y=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$.

$f_{xx}(x,y)=-2$，$f_{xy}(x,y)=0$，$f_{yy}(x,y)=-2$.

则在驻点 $(2,-2)$ 处，

$$A=f_{xx}(2,-2)=-2,\quad B=f_{xy}(2,-2)=0,\quad C=f_{yy}(2,-2)=-2,\quad AC-B^2=4,$$

即 $AC-B^2>0$ 且 $A<0$. 由判定极值的充分条件知：在点 $(2,-2)$ 处函数有极大值，极大值为 $f(2,-2)=8$.

例 2　求函数 $f(x,y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$ 的极值.

解　$f_x(x,y)=(6-2x)(4y-y^2)$，$f_y(x,y)=(6x-x^2)(4-2y)$.

解方程组 $\begin{cases}(6-2x)(4y-y^2)=0\\(6x-x^2)(4-2y)=0\end{cases}$，

得 $\begin{cases}x_1=0,\\y_1=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=0,\\y_2=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=3,\\y_3=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=6,\\y_4=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x_5=6,\\y_5=4.\end{cases}$

$f_{xx}(x,y)=-2(4y-y^2)$，$f_{xy}(x,y)=(6-2x)(4-2y)$，$f_{yy}(x,y)=-2(6x-x^2)$.

则在驻点(0, 0)处，

$$A=f_{xx}(0,0)=0,\quad B=f_{xy}(0,0)=24,\quad C=f_{yy}(0,0)=0,\quad AC-B^2=-24^2<0,$$

故 $f(0,0)$ 不是极值；

在驻点(0, 4)处，

$$A=f_{xx}(0,4)=0,\quad B=f_{xy}(0,4)=-24,\quad C=f_{yy}(0,4)=0,\quad AC-B^2=-24^2<0,$$

故 $f(0,4)$ 不是极值；

在驻点(3, 2)处，

$$A=f_{xx}(3,2)=-8<0,\quad B=f_{xy}(3,2)=0,\quad C=f_{yy}(3,2)=-18,\quad AC-B^2=144>0,$$

故函数在点(3, 2)处取得极大值，极大值为 $f(3,2)=36$；

在驻点(6, 0)处，

$$A=f_{xx}(6,0)=0,\quad B=f_{xy}(6,0)=-24,\quad C=f_{yy}(6,0)=0,\quad AC-B^2=-24^2<0,$$

故 $f(6,0)$ 不是极值；

在驻点(6, 4)处，

$$A=f_{xx}(6,4)=0,\quad B=f_{xy}(6,4)=24,\quad C=f_{yy}(6,4)=0,\quad AC-B^2=-24^2<0,$$

故 $f(6,4)$ 不是极值.

例 3　求函数 $z=xy$ 在附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

解　本题是条件极值问题，可化为无条件极值问题来解.

将条件 $x+y=1$ 化为 $y=1-x$，再代入函数 $z=xy$ 得

$$z=x(1-x).$$

由
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1-2x=0,$$

得 $x=\frac{1}{2}$. 故当 $x<\frac{1}{2}$ 时，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}>0$；当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}<0$. 由一元函数取得极值的充分条件知：$x=\frac{1}{2}$ 为极大值点，极大值为 $z=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

例 4　在表面积为 a^2 的长方体中，求体积最大的长方体的体积.

解　设长方体的三棱长分别为 x,y,z，则求体积最大的长方体的体积，就是求在条件 $\varphi(x,y,z)=2xy+2yz+2xz-a^2=0$ 下，函数 $V=xyz$ 的最大值.

作拉格朗日函数：

$$L(x,y,z)=xyz+\lambda(2xy+2yz+2xz-a^2),$$

求其对 x,y,z 的偏导数，得

$$L_x(x,y,z)=yz+2\lambda(y+z),$$
$$L_y(x,y,z)=xz+2\lambda(x+z),$$
$$L_z(x,y,z)=xy+2\lambda(y+x).$$

解方程组
$$\begin{cases}yz+2\lambda(y+z)=0,\\ xz+2\lambda(x+z)=0,\\ xy+2\lambda(y+x)=0,\\ 2xy+2yz+2xz-a^2=0,\end{cases}$$

得 $x=y=z=\frac{\sqrt{6}}{6}a$. 这是唯一可能的极值点. 因为由问题本身可知最大值一定存在，所以最大值就在这个可能的极值点处取得. 也就是说，表面积为 a^2 的长方体中，以棱长为 $\frac{\sqrt{6}}{6}a$ 的正方体的体积最大，最大体积为 $V=\frac{\sqrt{6}}{36}a^3$.

精选习题

1. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

2. 从斜边长为 l 的一切三角形中，求有最大周长的直角三角形的周长.

3. 要造一个容积等于定数 k 的长方体无盖水池，问如何选择水池的尺寸，才使它的表面积最小？