云图 YUN TU

2021版

张宇数学教育系列丛书·六

考研数学命题人终极预测8套卷

○ 主编 张宇

【数学三】

北京理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学命题人终极预测8套卷. 数学三 / 张宇主编. —北京:北京理工大学出版社,2020.9

ISBN 978-7-5682-9043-2

Ⅰ. ①考…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-习题集　Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2020)第173956号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 天津市蓟县宏图印务有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 8
字　　数 / 200千字
版　　次 / 2020年9月第1版　2020年9月第1次印刷
定　　价 / 28.80元

责任编辑 / 王玲玲
文案编辑 / 王玲玲
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 李志强

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

前　言

本书严格按照《2021年全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》命制试题，试卷结构、学科比例、考点变化等，均在本书中有全面的贯彻落实。

一

在多年参加考研数学命题工作和常年在一线教学的专家学者们的共同努力下，在各位考生的厚爱和检验下，《考研数学命题人终极预测8套卷》（以下简称《命题人8套卷》）已经成为每一届考研学生必备的考前冲刺复习用书，让人倍感欣慰。今年，我们继续高兴且荣幸地向参加全国硕士研究生招生考试的考生们推荐这本《命题人8套卷》。

为了更加贴近考研数学的命题趋势，反映其命题风格，给予考生在最后冲刺模拟时至关重要的帮助，除前命题组组长外，《命题人8套卷》编写组特邀两位重要的前命题人参与进来。鉴于某些原因，两位成员均以笔名的形式体现于编委中，他们深厚的学术功底和丰富的命题经验，使得《命题人8套卷》编写水平更趋完美，且我们将原来的8套卷扩充为12套卷（最后4套卷将在考前2个月作为最后的模考预测之用另行出版），今年的换题率高达80%。

二

本书是以试卷形式而不是以章为系统的自测题或复习题的形式编写的，这二者不仅有形式的区别，而且有实质的不同。自测题或复习题的重点是练习，其题量多、题型重复、方法重复，强调的是反复训练，看不出哪里是常考的地方。其中也有些考过的题（作为复习来讲，这是必需的，让考生知道真题是什么样子），跨章的综合题也较少。而终极预测卷每份都是一套考卷，全卷搭配难易适中，贴近考试要求，突出常考内容。每份试卷基础题占40%左右，综合题占60%左右。有较简单的计算题，有计算量较大的计算题，有概念题、论证题并适当配置应用题，有些是作者根据命题趋势精心设计，但没有考过的题。全书共8套卷，重点内容——实考中经常命题的内容，试卷中多次体现。较"冷僻"的内容，只要大纲中有的，也照顾到。试卷中有些题目特意设计成要用到多种方法，目的在于引导考生注意这些方法。每题（包括选择题与填空题）均给出详细解答，必要时加以注解，用以画龙点睛或举一反三。

三

《命题人8套卷》的编写目的是实战演练，积累经验，查漏补缺，科学预测。我们希望考生通过高质量题目的演练达到上述目的，最大化自己考试时的分数。千万不要把测量自己的分数作为做《命题人8套卷》的唯一目的，这样就违背了我们的初衷。《命题人8套卷》用高超的命题水平和丰富的命题经验，设置尽可能多的"陷阱"，直击考生的"软肋"和"盲区"，让考生考前"多吃点亏"。如果考生在做《命题人8套卷》时感到"辛苦"，千万不要气馁，记住，这个时候，你每消灭一个错误，就前进一步，好好做题并总结，把错误消灭完了，也就达到考试的最高水平了。

考生最好利用上午的8:30—11:30（考研数学时间）完整测试，算出分数后，把精力放在总

结上(不过分计较分数)，吃透每一个命题点，必会有所收获。

四

考研数学近几年的命题难点主要集中在如下四个方面：①跨章节的综合题较多；②计算量大的题较多；③往年不常考的知识点出题较多；④应用性问题的设计较多。每年《命题人 8 套卷》均在上述四点上特别加强了命题设置，以期对备考学生有针对性地进行训练。

《命题人 8 套卷》的题目均是本编写组的专家们按照考研大纲，集体讨论，亲自科学命制完成的。《命题人 8 套卷》前几版中的个别题目已经被各种书籍广泛“借鉴”了，只希望尊重作者，其他模考卷请勿再次“借鉴”。最后，感谢本书的策划和编辑，是他们将这本全国唯一由命题时间最长的命题专家和辅导人数最多的教学专家通力合作、全程亲编的《命题人 8 套卷》推向全国。相信《命题人 8 套卷》一定会在考生的最后冲刺阶段发挥极其重要、不可替代的作用。在此，衷心祝愿考研学子金榜题名！

张宇

2020 年 9 月　于北京

【编辑推荐】 对于本书中的部分重要试题，张宇老师录制了讲解视频，请考生扫描这些题目旁的二维码，认真学习。

目 录

参考答案与分析

考研数学命题人终极预测卷(一)

一、选择题

1.**【答案】** B

【分析】 先区分 x 的不同情形求出 $f(x)$. 当 x 取整数时, $\sin \pi x = 0$, 此时 $f(x) = x^2$. 当 x 不取整数时, 极限号内的分子、分母同除以 n 后, 取极限 $(n \to \infty)$, 得 $f(x) = x(1-x)$. 所以 $f(x)$ 的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \\ x(1-x), & x \text{ 取其他值}. \end{cases}$$

可见, 当 x 不取整数时, $f(x)$ 连续; 当 x 取整数但 $x \neq 0$ 时, $f(x)$ 有第一类间断点; 当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 仍是连续的. 可见 $f(x)$ 没有第二类间断点, 选 B.

2.**【答案】** C

【分析】 当 $x \to 0^+$ 时, $(1+ax)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \dfrac{1}{3}ax$, 而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{4^n(2n)!} \xlongequal{(*)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{2n}}{(2n)!} = \cos\frac{\sqrt{x}}{2} - 1 \sim -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{8}x,$$

故 $\dfrac{1}{3}a = -\dfrac{1}{8}$, $a = -\dfrac{3}{8}$, 选 C.

【注】 (*)处也可这样处理:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{4^n(2n)!} = -\frac{1}{8}x + o(x) \sim -\frac{1}{8}x\,(x \to 0^+).$$

3.**【答案】** A

【分析】 对 x 求导可得, $f'(x) = \dfrac{(x+3)(x^2-1)}{e^{x^2}\sqrt{1+x^4}}$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $f'(x)$ 的 3 个零点 $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, 即为 $f(x)$ 的 3 个驻点.

① 当 x 从点 $x_1 = -3$ 的左侧经过 x_1 到其右侧时, $f'(x)$ 由负变正, 故 $x_1 = -3$ 为 $f(x)$ 的极小值点;

② 当 x 从点 $x_2 = -1$ 的左侧经过 x_2 到其右侧时, $f'(x)$ 由正变负, 故 $x_2 = -1$ 为 $f(x)$ 的极大值点;

③ 当 x 从点 $x_3 = 1$ 的左侧经过 x_3 到其右侧时, $f'(x)$ 由负变正, 故 $x_3 = 1$ 为 $f(x)$ 的极小值点.

综上, $f(x)$ 有 1 个极大值点, 2 个极小值点, 选 A.

4.**【答案】** D

【分析】 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x^3}} = 1$, 且 $\int_0^2 \dfrac{1}{x}dx$ 发散, 所以 $\int_0^2 \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+x^3}}$ 发散. 同理, $\int_0^2 \dfrac{dx}{x\sqrt{x+2}}$ 也发散.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x+1}\ln(1+x)} = +\infty$, 且 $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$ 发散, 所以 $\int_1^{+\infty} \dfrac{xdx}{\sqrt{x+1}\ln(1+x)}$ 发散.

因此, 选项 A, B, C 都应排除, 只有 D 为正确选项.

事实上, 对于选项 D, 令 $t = x^2$, 则 $\int_0^{+\infty} \dfrac{xdx}{e^{x^4}} = \dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} \dfrac{d(x^2)}{e^{(x^2)^2}} = \dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{e^{t^2}} = \dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$, 故收敛.

故选 D.

【注】 ① 反常积分收敛的比较判别法是《2021 年全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》新增加的考点, 考生应注意.

② 反常积分收敛的比较判别法.

定理 1 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在任何有限区间 $[a, u]$ 上可积, 当 $x \in [a, +\infty)$ 时, $f(x) \geqslant 0$, $g(x) > 0$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c$, 则有:

a. 当 $0<c<+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散；

b. 当 $c=0$ 时，由 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛可推知 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

c. 当 $c=+\infty$ 时，由 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散可推知 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

定理 2 设定义在 $(a,b]$ 上的两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，$f(x)\geqslant 0$，$g(x)>0$，瑕点同为 $x=a$，在任何 $[u,b]\subset(a,b]$ 上都可积，且 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$，则有：

a. 当 $0<c<+\infty$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 同敛散；

b. 当 $c=0$ 时，由 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛可推知 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

c. 当 $c=+\infty$ 时，由 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散可推知 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

5.【答案】 A

【分析】 记 $|u_n(x)|=\dfrac{|(x-a)^n|}{n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|(x-a)^{n+1}|}{n+1}\cdot\frac{n}{|(x-a)^n|}$$

$$=|x-a|\overset{令}{<}1,$$

解得 $x\in(a-1,a+1)$.

当 $x=a-1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n}$，收敛；

当 $x=a+1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，发散.

故收敛域为 $[a-1,a+1)$，由题设条件知 $-1\in[a-1,a+1)$，故 a 的取值范围是 $-2<a\leqslant 0$. 选 A.

6.【答案】 B

【分析】 在区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right\}$ 上，$|x+y|\leqslant|x|+|y|\leqslant\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，$\cos(x+y)\geqslant 0$，$N=\iint\limits_D\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$. 而

$$M=\iint\limits_D(x^3+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

又区域 D 关于 x 轴、y 轴都对称，x^3 是 x 的奇函数，y^3 是 y 的奇函数，所以 $M=0$. 在区域 D 上，显然 $\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2}}-1\leqslant 0$，所以 $P<0$. 故 $N>M>P$，选 B.

7.【答案】 C

【分析】 记 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&0&3\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}$，所以

$$\boldsymbol{P}^{-1}(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3&0&-3\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix},$$

故 $r(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C})=3$.

另一方面，因为 $|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&0&3\\0&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=4$，所以 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=$

$(\boldsymbol{AP})^{-1}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{AP})$，因此$(\boldsymbol{AP})^{-1}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{AP})=2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}$. 故

$$r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})=r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C})=1,$$

所以 $k=2$. 应选 C.

8.【答案】　D

【分析】　$\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{AQ}$，又 $\boldsymbol{A}$ 可逆，可得 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{AQA}^{-1}$，故

$$|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{AQA}^{-1}-\boldsymbol{AEA}^{-1}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{E}||\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{E}|=-24.$$

选 D.

9.【答案】　B

【分析】　已知 $X\sim U[a,b]$，则 $-X\sim U[-b,-a]$，现 X 与 $-X$ 同分布，故有 $a=-b$，即 $X\sim U[-b,b]$，这时，

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2b},&-b\leqslant x\leqslant b,\\0,&\text{其他},\end{cases}\quad f^2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4b^2},&-b\leqslant x\leqslant b,\\0,&\text{其他}.\end{cases}$$

已知 $f^2(x)$ 也是概率密度，有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x=\int_{-b}^{b}\frac{1}{4b^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2b},$$

解得 $b=\dfrac{1}{2}$，故选 B.

10.【答案】　C

【分析】

$$EY=E(\max\{X,1\})=\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{x,1\}f(x)\mathrm{d}x,$$

其中

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x},&x>0,\\0,&x\leqslant 0,\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}EY&=\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{x,1\}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\max\{x,1\}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-1}+2\mathrm{e}^{-1}=1+\mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

故选 C.

二、填空题

11.【答案】　$\ln x$

【分析】　$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(x^{\frac{1}{n-1}}-x^{\frac{1}{n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2x^{\frac{1}{n}}\left[x^{\frac{1}{n(n-1)}}-1\right]=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\dfrac{1}{n(n-1)}\ln x=\ln x.$

【注】　上面的做法用了当 $a>0$，且 $a\neq 1$ 时，$a^u-1\sim u\ln a$，$u\to 0$.

12.【答案】　$\dfrac{4\ln 2}{4-\sqrt{2}\pi}$

【分析】　记 $A=\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，将等式两边对 x 积分，得 $A=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x+A\int_1^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x.$

因为

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{1+x}\bigg|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)}=\ln\frac{x}{1+x}\bigg|_1^{+\infty}=\ln 2,$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Bigg|_1^{+\infty}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4},$$

所以 $A=\ln 2+\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}A$，解得 $A=\dfrac{4\ln 2}{4-\sqrt{2}\pi}$.

13.【答案】 $\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y$

【分析】 法一　设 $F(x,y,z)=xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\sqrt{2}$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{yz+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{xy+\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}=-\frac{yz\sqrt{x^2+y^2+z^2}+x}{xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z},$$

则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0,-1)}=1$，且 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}=-\dfrac{xz\sqrt{x^2+y^2+z^2}+y}{xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0,-1)}=-\sqrt{2}$，于是

$$\left.\mathrm{d}z\right|_{(1,0,-1)}=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y.$$

法二　在 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 两边求全微分得

$$yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)=0,$$

把 $(1,0,-1)$ 代入上式，得 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(1,0,-1)}=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y.$

14.【答案】 45 元

【分析】 根据题设知，销售该商品 Q 件的总利润函数（单位：元）是

$$L=pQ-(30Q+50\ 000)=Q\left(60-\frac{Q}{1\ 200}\right)-30Q-50\ 000$$
$$=30Q-\frac{Q^2}{1\ 200}-50\ 000.$$

欲求使得利润最大时的单价 p，令 $L'(Q)=30-\dfrac{Q}{600}=0$，解得 $Q=18\ 000$（件），且 $L''(18\ 000)<0$，对应的价格为

$$p=\left.\left(60-\frac{Q}{1\ 200}\right)\right|_{Q=18\ 000}=45(\text{元}),$$

即利润最大时的单价为 $p=45$（元）.

15.【答案】 2

【分析】 所给二次型不含平方项，故令 $x_1=y_1+y_2, x_2=y_1-y_2, x_3=y_3$，有

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3.$$

再用配方法，有 $f(x_1,x_2,x_3)=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2$.

令 $z_1=y_1-y_3, z_2=y_2-2y_3, z_3=y_3$，得 $f(x_1,x_2,x_3)=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2$，又上述所作变换均为可逆线性变换，故其正惯性指数为 2.

16.【答案】 $\dfrac{n^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i\right)^2}$

【分析】 设样本值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则当 $0<x_i<1(i=1,2,\cdots,n)$ 时，似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\theta}x_i^{\sqrt{\theta}-1}=\theta^{\frac{n}{2}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\sqrt{\theta}-1},$$

取对数，有

$$\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

令

$$\frac{\mathrm{d}[\ln L(\theta)]}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,$$

解得

$$\theta=\frac{n^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2},$$

从而得到θ的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{n^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i\right)^2}.$$

三、解答题

17.【证】　当$x\in(0,+\infty)$时，$\ln(1+x)>0$，$\arctan x>0$，所以显然$\frac{\arctan x}{\ln(1+x)}>0$. 为证$\frac{\arctan x}{\ln(1+x)}<\frac{\sqrt{2}+1}{2}$，由于$\ln(1+x)>0$，所以相当于证明当$x\in(0,+\infty)$时，有

$$f(x)=\arctan x-\frac{\sqrt{2}+1}{2}\ln(1+x)<0.$$

现证上式成立.

显然$f(0)=0$，又

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1+x-\frac{\sqrt{2}+1}{2}(1+x^2)}{(1+x^2)(1+x)}=\frac{2(1+x)-(\sqrt{2}+1)(1+x^2)}{2(1+x^2)(1+x)}\\&=\frac{(1-\sqrt{2})+2x-(\sqrt{2}+1)x^2}{2(1+x^2)(1+x)}\\&=\frac{-(\sqrt{2}+1)}{2(1+x^2)(1+x)}\left(x^2-\frac{2}{\sqrt{2}+1}x+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).\end{aligned}$$

对于无理分式经常要采取恒等变形，

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2},$$

所以

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{-(\sqrt{2}+1)}{2(1+x^2)(1+x)}\left[x^2-\frac{2}{\sqrt{2}+1}x+\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2\right]\\&=\frac{-(\sqrt{2}+1)}{2(1+x^2)(1+x)}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^2\leqslant 0,\end{aligned}$$

当且仅当$x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$时$f'(x)=0$，所以当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)<0$. 证毕.

18.【解】　求$|z|$的最值对应的自变量的点与求z^2的最值对应的自变量的点是一致的，用拉格朗日乘数法，设

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5),$$

令

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2x\lambda+\mu=0, & ①\\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y\lambda+\mu=0, & ②\\ \frac{\partial F}{\partial z}=2z-4z\lambda+3\mu=0, & ③\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-2z^2=0, & ④\\ \frac{\partial F}{\partial \mu}=x+y+3z-5=0, & ⑤\end{cases}$$

由①与②得$\lambda=0$或$x=y$. 若$\lambda=0$则$\mu=0$，再由③得$z=0$，于是由④得$x=y=0$，与⑤矛

盾.故 $\lambda \neq 0$,从而有 $x = y$.

由 ④ 得 $z^2 = x^2$,因此得 $x = y = z$ 或 $x = y = -z$.

当 $x = y = z$ 时,由 ⑤ 可得 $x = y = z = 1$;当 $x = y = -z$ 时,由 ⑤ 可得 $x = y = -z = -5$.

故在题给约束条件下,$\min\{|z|\} = 1$,$\max\{|z|\} = 5$.

19. (1)【证】 设 $f(x) = \mathrm{e}^x + \ln x - n$,$f(\ln n) = \ln\ln n > 0(n \geqslant 3)$,$f(1) = \mathrm{e} - n < 0(n \geqslant 3)$,故存在 $x_n \in (1, \ln n)$ 使 $f(x_n) = 0$,又 $f'(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x} > 0(x > 0)$,故 $f(x)$ 单调增加,即存在唯一的 x_n,使 $\mathrm{e}^{x_n} + \ln x_n = n(n = 3, 4, \cdots)$,且 $1 < x_n < \ln n$.

(2)【解】 由(1)知,$a_n = \left(\dfrac{x_n}{n}\right)^p > \dfrac{1}{n^p} > 0$,当 $0 < p \leqslant 1$ 时,$\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 发散,故由正项级数的比较判别法知 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} a_n$ 发散.

又 $0 < a_n = \left(\dfrac{x_n}{n}\right)^p < \dfrac{\ln^p n}{n^p}$,当 $p > 1$ 时,对 $\forall\, 0 < \varepsilon < p - 1$,有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{\ln^p n}{n^p}}{\dfrac{1}{n^{p-\varepsilon}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln^p n}{n^{\varepsilon}} = 0,$$

由 $p - \varepsilon > 1$,$\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n^{p-\varepsilon}}$ 收敛,故由正项级数的比较判别法的极限形式知 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{\ln^p n}{n^p}$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} a_n$ 收敛.

综上,当 $p > 1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} a_n$ 收敛,当 $0 < p \leqslant 1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} a_n$ 发散.

【注】 当 $n \to \infty$ 时,$\ln^p n(p > 0)$ 与 $n^q(q > 0)$ 相比较,$\ln^p n(p > 0)$ 是低阶无穷大,在 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n^q \ln^p n}$,$\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{\ln^p n}{n^q}$ 等级数中,只要 $q > 1$,这些级数均收敛,只要 $0 < q < 1$,这些级数均发散,仅在 $q = 1$ 这种临界状态下,$\ln^p n$ 或 $\dfrac{1}{\ln^p n}$ 才对级数的敛散性起到作用,如广义 p 级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^p n}$ 在 $p > 1$ 时收敛,在 $p \leqslant 1$ 时发散.

20.【解】

$$\begin{aligned} I &= \iint_D [(x-1)^2 + (2y+3)^2]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D (x^2 + 4y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D (-2x + 12y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 10\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

其中

$$I_2 = \iint_D (-2x + 12y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0(\text{来自奇函数在对称区域上积分性质}),$$

$$I_3 = 10\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 10ab\pi(\text{来自椭圆的面积公式}),$$

$$I_1 = \iint_D (x^2 + 4y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 4\iint_D y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中

$$\begin{aligned} \iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 4\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} x^2\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{4b}{a}\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } x = a\sin t} 4a^3 b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= 4a^3 b\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,\mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$

$$= 4a^3 b\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}a^3 b\pi.$$

同理 $4\iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ab^3\pi$. 则 $I_1=\frac{1}{4}a^3b\pi+ab^3\pi$,所以

$$I = 10ab\pi+\frac{1}{4}a^3b\pi+ab^3\pi.$$

21.【解】 (1) 因 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$,所以 $\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵,$b=3$. 对于

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2)&=(x_1,x_2)\begin{bmatrix}2&2\\2&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=2x_1^2+ax_2^2+4x_1x_2\\ &=2(x_1+x_2)^2+(a-2)x_2^2;\end{aligned}$$

对于

$$\begin{aligned} g(y_1,y_2)&=(y_1,y_2)\begin{bmatrix}4&3\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=4y_1^2+y_2^2+6y_1y_2\\ &=4\left(y_1+\frac{3}{4}y_2\right)^2-\frac{5}{4}y_2^2.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的正、负惯性指数对应相等,即 $p_{\boldsymbol{A}}=p_{\boldsymbol{B}}$,$q_{\boldsymbol{A}}=q_{\boldsymbol{B}}$,于是 $a-2<0$,即 $a<2$,又 a 为正整数,故 $a=1$.

综上,$a=1$,$b=3$.

(2) 由(1) 知,
$$f(x_1,x_2)=2(x_1+x_2)^2-x_2^2,$$

令 $\begin{cases}z_1=x_1+x_2,\\ z_2=x_2,\end{cases}$ 即经可逆线性变换

$$\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}_1\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},$$

使 $f(x_1,x_2)=2z_1^2-z_2^2$;

$$g(y_1,y_2)=4\left(y_1+\frac{3}{4}y_2\right)^2-\frac{5}{4}y_2^2,$$

令 $\begin{cases}z_1=\sqrt{2}y_1+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}y_2,\\ z_2=\dfrac{\sqrt{5}}{2}y_2,\end{cases}$ 即经可逆线性变换

$$\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\\0&\dfrac{\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}_2\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix},$$

使 $g(y_1,y_2)=2z_1^2-z_2^2$.

于是有
$$\boldsymbol{C}_1\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}_2\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix},$$

故
$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}_1^{-1}\boldsymbol{C}_2\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\\0&\dfrac{\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\\0&\dfrac{\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{4}\\0&\dfrac{\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix},$$

使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$.

22.【解】 (1) 由题设,(U,V) 在 D 上服从均匀分布,则下列事件的概率可由面积之比得到.

$$P\{X=-1,Y=-1\}=P\left\{U\leqslant -1,V\leqslant \frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{8},$$

$$P\{X=-1,Y=1\}=P\left\{U\leqslant -1,V> \frac{1}{2}\right\}=0,$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\left\{U> -1,V\leqslant \frac{1}{2}\right\}=\frac{6}{8},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\left\{U> -1,V> \frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{8},$$

故(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	-1	1	$p_{i\cdot}$
-1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

(2) 由(1)可知，

$$EX=\frac{3}{4},EY=-\frac{3}{4},E(XY)=\frac{1}{8}-\frac{6}{8}+\frac{1}{8}=-\frac{1}{2},$$

$$E(X^2)=E(Y^2)=1,$$

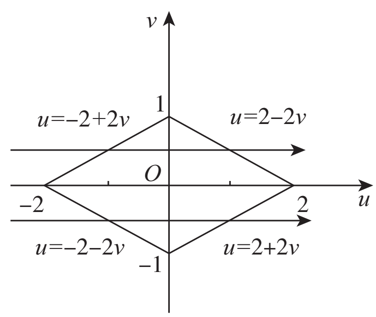
所以
$$DX=E(X^2)-(EX)^2=\frac{7}{16},DY=E(Y^2)-(EY)^2=\frac{7}{16},$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY=\frac{1}{16},$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\ \sqrt{DY}}=\frac{1}{7}.$$

(3) 由题设易知(U,V)的概率密度为

$$f(u,v)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & (u,v)\in D,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$



如图所示，则V的边缘概率密度为

$$f_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)\mathrm{d}u=\begin{cases}\int_{-2-2v}^{2+2v}\frac{1}{4}\mathrm{d}u, & -1<v\leqslant 0,\\ \int_{-2+2v}^{2-2v}\frac{1}{4}\mathrm{d}u, & 0<v<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1+v, & -1<v\leqslant 0,\\ 1-v, & 0<v<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

考研数学命题人终极预测卷(二)

一、选择题

1.【答案】 C

【分析】 通过具体计算.对于选项C，

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\Bigg|_1^{+\infty}=1,$$

收敛，故应选 C.

对于选项 A，$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}=\ln|x+\sqrt{x^2-1}|\Big|_1^{+\infty}=+\infty$，发散.

对于选项 B，$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-1)}\xlongequal{x=\sec t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\tan t}{\sec t\tan^2 t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cot t\mathrm{d}t=\ln|\sin t|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=+\infty$，发散.

对于选项 D，

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-1)}}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\ln\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2-x}\right|\Bigg|_1^{+\infty}=+\infty,$$

发散.

2.【答案】　A

【分析】　设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶泰勒展开式为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n).\qquad①$$

另一方面，利用间接法展开得 $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+o(x^n)$，比较对应系数得

$$f^{(k)}(0)=k!a_k,k=1,2,\cdots,n.$$

现在，利用指数函数 e^x 的 n 阶泰勒公式，有

$$2^x=\mathrm{e}^{x\ln 2}=1+x\ln 2+\cdots+\frac{(x\ln 2)^{n-2}}{(n-2)!}+o(x^{n-2}),$$

所以

$$x^2 2^x=x^2+(\ln 2)x^3+\cdots+\frac{(\ln 2)^{n-2}}{(n-2)!}x^n+o(x^n),$$

与 ① 式比较 x^n 的系数，得 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(\ln 2)^{n-2}}{(n-2)!}$，所以 $f^{(n)}(0)=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$. 选 A.

【注】　本题也可用莱布尼茨高阶求导公式求解，由于 x^2 的 3 阶及 3 阶以上的导数均为 0，故当 $x=0$ 时，$(x^2 2^x)^{(n)}=C_n^{n-2}2\cdot(2^x)^{(n-2)}=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$.

3.【答案】　A

【分析】　将所给方程两边对 x 求导数，y 看成由此式确定的 x 的函数，则有

$$6y^2y'-4yy'+2y+2xy'+y'-2x=0,$$

即

$$(6y^2-4y+2x+1)y'+2(y-x)=0.$$

先考虑驻点，令 $y'=0$，得 $y=x$. 再与原方程联立：

$$\begin{cases}2y^3-2y^2+2xy+y-x^2=0,\\ y=x,\end{cases}$$

得 $2x^3-2x^2+2x^2+x-x^2=0$，即 $x(2x^2-x+1)=0$.

由于 $2x^2-x+1=0$ 无实根，故得唯一实根 $x=0$，相应地有 $y=0$. 在此点有 $y'=0$. 故排除 D.

再看此点是否为极值点，求二阶导数. 由

$$y'=-\frac{2(y-x)}{6y^2-4y+2x+1},$$

则

$$y''=-\frac{(6y^2-4y+2x+1)\cdot 2(y'-1)-2(y-x)(12yy'-4y'+2)}{(6y^2-4y+2x+1)^2}.$$

将 $x=0,y=0,y'=0$ 代入，得 $y''(0)=2>0$，所以该驻点为极小值点. 选 A.

4.【答案】 B

【分析】 令 $F(x,y)=x+y^2+\sin(xy)$，则
$$F'_x=1+y\cos(xy),F'_y=2y+x\cos(xy),$$
于是
$$F'_x(0,0)=1\neq 0,F'_y(0,0)=0,$$
由隐函数存在定理，知B正确.

5.【答案】 B

【分析】 设 S_n 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 的部分和，则 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_0$，因为 $\{S_n\}$ 收敛，所以 $\{a_n\}$ 收敛，$\{a_n\}$ 是有界数列，故存在 $M>0$，使得 $n=1,2,\cdots$ 时，$|a_n|\leqslant M$，从而 $|a_nb_n|\leqslant Mb_n$. 根据 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的收敛性及正项级数的比较判别法，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛. 应选B.

6.【答案】 D

【分析】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0$ 的通解为 $y(x)=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$，这里要注意 $\int p(x)\mathrm{d}x$ 是 $p(x)$ 的一个原函数，不是 $p(x)$ 的全体原函数，故 $\int p(x)\mathrm{d}x$ 也可以写成 $\int_a^x p(t)\mathrm{d}t$，即通解为
$$y(x)=C\mathrm{e}^{-\int_a^x p(t)\mathrm{d}t}(C\text{ 为任意常数}).$$
由题意，
$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=C\mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x p(t)\mathrm{d}t}=0,$$
故
$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x p(t)\mathrm{d}t=\int_a^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x=+\infty,$$
发散，选D.

7.【答案】 C

【分析】 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$. 于是
$$(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=(\lambda^2+2\lambda)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.$$
又由于 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，故有 $\lambda^2+2\lambda=0$，解得 $\lambda=-2$，$\lambda=0$.
因为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必可相似对角化，又 $r(\boldsymbol{A})=2$，所以
$$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}-2&&\\&-2&\\&&0\end{bmatrix}.$$
因此，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，$\lambda_3=0$，矩阵 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $-2+k$，$-2+k$，k.
于是，$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵当且仅当 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 的特征值全大于零，这等价于 $k>2$. 选C.

【注】 对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$. 于是
$$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}+k\boldsymbol{PP}^{-1}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}^{-1},$$
所以
$$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}\sim\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}k-2&&\\&k-2&\\&&k\end{bmatrix}.$$
因此 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{\Lambda}+k\boldsymbol{E}$ 的顺序主子式均大于0，即 k 需满足
$$k-2>0,\ (k-2)^2>0,\ (k-2)^2k>0,$$
由此也可得到 $k>2$.

8.【答案】 D

【分析】 因 $(\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}$，故其为对称矩阵，又 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，于是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}$ 为实对称矩阵，必可相似对角化. 又 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1\perp\boldsymbol{\alpha}_2$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=0$. 又 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是单位特征向量，故 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=1$，$\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=1$. 于是

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1)=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1=(\lambda_1+1)\boldsymbol{\alpha}_1,$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 λ_1+1,λ_2，从而存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\lambda_1+1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}.$$

故选 D.

9.**【答案】**　B

【分析】　设事件 $A_i=\{$元件来自制造厂 $i\}$，$i=1,2,3$，$B=\{$取出一只是次品$\}$，则

$$P(A_1)=0.15,P(A_2)=0.80,P(A_3)=0.05,$$
$$P(B\mid A_1)=0.02,P(B\mid A_2)=0.01,P(B\mid A_3)=0.03.$$

由贝叶斯公式，知

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{P(B)},i=1,2,3.$$

因为分母相同，故只需比较分子大小即可.

$$P(A_1)P(B\mid A_1)=0.003,P(A_2)P(B\mid A_2)=0.008,P(A_3)P(B\mid A_3)=0.0015.$$

所以 $P(A_2\mid B)$ 最大，故选 B.

10.**【答案】**　A

【分析】　根据 t 分布的构造，有 $X=\dfrac{X_1}{\sqrt{Y_1/n}}$，其中 $X_1\sim N(0,1)$，$Y_1\sim\chi^2(n)$，且 X_1,Y_1 相互独立.

而 $X^2=\dfrac{X_1^2}{Y_1/n}$，$X_1^2\sim\chi^2(1)$，且 X_1^2 与 Y_1 相互独立，根据 F 分布的构造，$X^2\sim F(1,n)$.

又 t 分布的概率密度为偶函数，$P\{X>c\}=\dfrac{2}{5}<\dfrac{1}{2}$，所以 $c>0$，且 $P\{X<-c\}=P\{X>c\}$. 于是

$$\begin{aligned}P\{Y\leqslant c^2\}&=P\{X^2\leqslant c^2\}=P\{-c\leqslant X\leqslant c\}=1-P\{X>c\}-P\{X<-c\}\\&=1-\frac{2}{5}-\frac{2}{5}=\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

选 A.

二、填空题

11.**【答案】**　$-\dfrac{2}{3}$

【分析】　当 $x\to0$ 时，$\sqrt[3]{1-4x^2\sin x}-1\sim\dfrac{1}{3}(-4x^2\sin x)$，$\ln(1+2x^2)\sim2x^2$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1-4x^2\sin x}-1}{x\ln(1+2x^2)}=-\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=-\frac{2}{3}.$$

12.**【答案】**　$\dfrac{7}{9}$

【分析】　因为 $2x\mathrm{e}^{-3x}$ 是方程 $y''+ay'+by=0$ 的一个特解，所以 $r=-3$ 是二重特征根，因此原方程的通解为 $y=(C_1x+C_2)\mathrm{e}^{-3x}$.

由初始条件 $y(0)=2,y'(0)=-5$，解得 $C_1=1,C_2=2$，所以 $y(x)=(x+2)\mathrm{e}^{-3x}$. 因此

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}(x+2)\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}(x+2)\mathrm{e}^{-3x}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-3x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}=\frac{7}{9}.\end{aligned}$$

13.**【答案】**　e

【分析】　$$a_n=\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-x^n\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=na_{n-1},n=1,2,\cdots,$$

又 $a_0=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1$，故 $a_n=n!$，于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\bigg|_{x=1}=\mathrm{e}^x\bigg|_{x=1}=\mathrm{e}.$$

14.【答案】 $\frac{1}{x}(x>0)$

【分析】 由$\int_a^{ab}f(x)\mathrm{d}x$与$a$无关，所以$\left[\int_a^{ab}f(x)\mathrm{d}x\right]_a'\equiv 0$，即

$$f(ab)b-f(a)\equiv 0.$$

上式对任意a均成立，所以令$a=1$亦成立，有$f(b)b-f(1)=0$，$f(b)=\frac{1}{b}$，即有$f(x)=\frac{1}{x}(x>0)$.

可以验算，$\int_a^{ab}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(ab)-\ln a=\ln b$，与$a$无关.

15.【答案】 $\begin{bmatrix}1-k_1 & 2-k_2 & 1-k_3\\ -k_1 & 2-k_2 & -1-k_3\\ k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数

【分析】 $$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&4&0\\-1&1&0&-1&0&-2\\1&0&1&a&b&c\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&2&1\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&a-1&b-2&c-1\end{array}\right],$$

由题意，有$r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=2$，即$a-1=b-2=c-1=0$，即$a=1,b=2,c=1$.

记$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$，则

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-1\end{bmatrix},$$

其中，

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

的通解为

$$\boldsymbol{x}_1=k_1(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}+(1,0,0)^{\mathrm{T}}=(1-k_1,-k_1,k_1)^{\mathrm{T}};$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

的通解为

$$\boldsymbol{x}_2=k_2(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}+(2,2,0)^{\mathrm{T}}=(2-k_2,2-k_2,k_2)^{\mathrm{T}};$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

的通解为

$$\boldsymbol{x}_3=k_3(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}+(1,-1,0)^{\mathrm{T}}=(1-k_3,-1-k_3,k_3)^{\mathrm{T}}.$$

故

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1-k_1 & 2-k_2 & 1-k_3\\ -k_1 & 2-k_2 & -1-k_3\\ k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix},$$

其中k_1,k_2,k_3为任意常数.

16.【答案】 $\frac{19}{24}$

【分析】 由题设知$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-5}^{-3}\frac{1}{4}\mathrm{d}x+\int_2^4 ax\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+6a$，故$a=\frac{1}{12}$.

设$g(x)=3x^3-X^2x+6$. 因为

$$g(0)=6>0,\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty,$$

所以，方程$3x^3-X^2x+6=0$有正实根的充分必要条件是函数$g(x)$的最小值