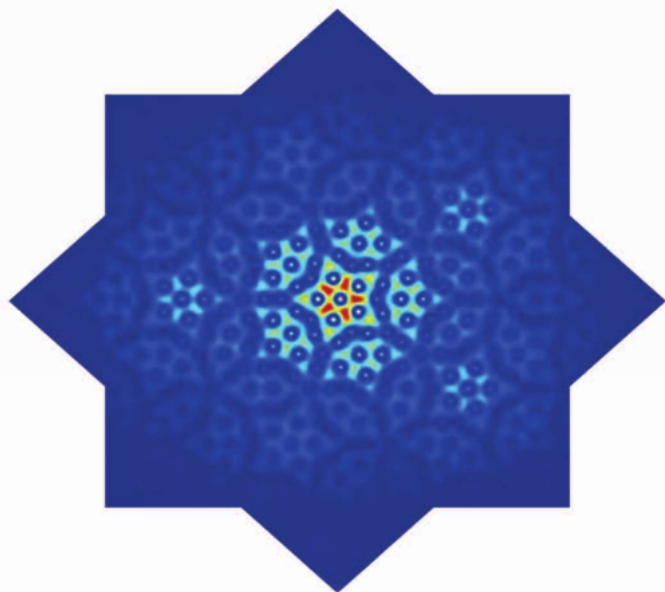


Contact Problems of Quasicrystalline Materials

准晶材料的接触问题

· 赵雪芬 李 星 著 ·



黄河出版传媒集团
宁夏人民出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

准晶材料的接触问题 / 赵雪芬, 李星著. -- 银川:
宁夏人民出版社, 2019.9
ISBN 978-7-227-07085-6

I. ①准… II. ①赵… ②李… III. ①准晶体-材料
科学-研究 IV. ①0753②TB3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 211677 号

准晶材料的接触问题

赵雪芬 李星 著

责任编辑 周淑芸
责任校对 姚小云
封面设计 杨祎霞
责任印制 肖 艳



黄河出版传媒集团

宁夏人民出版社

出版发行

出 版 人 薛文斌
地 址 宁夏银川市北京东路 139 号出版大厦(750001)
网 址 <http://www.yrpubm.com>
网上书店 <http://www.hh-book.com>
电子信箱 nxrmcbs@126.com
邮购电话 0951-5052104 5052106
经 销 全国新华书店
印刷装订 宁夏银报智能印刷科技有限公司
印刷委托书号 (宁) 0014755

开本 889 mm × 1194 mm 1/16
印张 13.75
字数 180 千字
版次 2019 年 9 月第 1 版
印次 2019 年 9 月第 1 次印刷
书号 ISBN 978-7-227-07085-6
定价 30.00 元

版权所有 侵权必究

序 言

准晶材料的发现是材料科学领域的又一次革命,对材料学家和物理学家提出了新的挑战。同时,准晶弹性理论的研究也为应用数学和力学工作者提出了新的课题。与经典弹性理论一样,准晶数学弹性理论通过建立准晶应力—应变关系(即广义胡克定律)、几何关系及平衡方程,在外部环境因素作用下(给定的边界条件下),求解准晶体的弹性平衡。

随着准晶材料在工程实际中的应用,其接触力学行为的研究成为人们关注的焦点。复变函数和积分变换方法是求解接触问题非常有效的方法。本书发展了经典弹性理论中求解各向同性和各向异性材料接触问题的复变函数及积分变换方法,将其应用于准晶平面弹性接触问题的研究,为准晶材料的实际工程应用奠定了理论基础。

本书包括两部分:第一部分研究了一维、二维和三维准晶材料平面弹性接触问题,系本书研究重点。第二部分简单介绍了带裂纹准晶材料的平面弹性接触问题。限于笔者的学识水平,这部分的研究还很粗浅,这也是我们今后研究工作的重点内容。

本书的出版得到了宁夏大学新华学院院级重点学科项目(数学与应用数学)、宁夏大学博士培优计划项目(2015年)、国家自然科学基金项目(批准号:12062021、11762017)的资助。在此,衷心感谢国家自然科学基金委员会、宁夏大学、宁夏大学新华学院,以及帮助过我们的所有老师和同学们!

由于水平、经验有限,书中难免有遗漏和不妥之处,欢迎广大读者批评指正。

笔 者

2019年9月

目 录

第一章 准晶概述	1
1.1 准晶的发现	1
1.2 准晶的分类及性质	3
1.3 准晶弹性理论	4
第二章 一维准晶周期平面弹性接触问题	6
2.1 一维正方准晶弹性理论	6
2.2 一维正方准晶周期平面弹性无摩擦接触问题	9
2.3 一维正方准晶周期平面弹性有限摩擦接触问题	12
2.4 一维正方准晶周期平面弹性粘结接触问题	15
2.5 一维正方准晶周期平面弹性接触问题的讨论与数值算例	17
2.6 一维正方准晶周期平面弹性无摩擦周期接触问题	21
2.7 一维正方准晶周期平面弹性有限摩擦周期接触问题	29
2.8 一维正方准晶周期平面弹性粘结周期接触问题	34
第三章 一维准晶非周期平面弹性接触问题	38
3.1 一维正方准晶非周期平面弹性理论	38
3.2 一维正方准晶非周期平面弹性无摩擦接触问题	41
3.3 一维正方准晶非周期平面弹性有限摩擦接触问题	50
3.4 一维正方准晶非周期平面弹性粘结接触问题	60
3.5 一维正方准晶非周期平面弹性无摩擦周期接触问题	69
3.6 一维正方准晶非周期平面弹性有限摩擦周期接触问题	76
3.7 一维正方准晶非周期平面弹性粘结周期接触问题	84
第四章 二维准晶材料的接触问题	89
4.1 二维十二次对称准晶平面弹性理论	90
4.2 二维十二次对称准晶平面弹性无摩擦接触问题	93



4.3 二维十二次对称准晶平面弹性有限摩擦接触问题	98
4.4 二维十二次对称准晶平面弹性粘结接触问题	103
4.5 数值算例	105
4.6 二维十次对称准晶弹性理论	110
4.7 二维十次对称准晶平面弹性无摩擦周期接触问题	112
4.8 二维十次对称准晶平面弹性有限摩擦周期接触问题	119
4.9 二维十次对称准晶平面弹性粘结周期接触问题	122
4.10 数值算例	126
第五章 三维准晶材料的接触问题	132
5.1 三维二十面体准晶弹性理论	132
5.2 三维二十面体准晶平面弹性无摩擦接触问题	135
5.3 三维二十面体准晶平面弹性有限摩擦接触问题	138
5.4 三维二十面体准晶平面弹性粘结接触问题	141
5.5 数值算例	143
5.6 三维二十面体准晶平面弹性无摩擦周期接触问题	148
5.7 三维二十面体准晶平面弹性有限摩擦周期接触问题	154
5.8 三维二十面体准晶平面弹性粘结周期接触问题	157
5.9 数值算例	161
第六章 带裂纹准晶材料的接触问题	165
6.1 带裂纹一维正方准晶非周期平面弹性无摩擦接触问题	165
6.2 带裂纹一维正方准晶非周期平面弹性粘结接触问题	174
6.3 带裂纹二维十次对称准晶平面弹性接触问题	181
6.4 数值算例	190
6.5 带裂纹三维二十面体准晶平面弹性接触问题	195
6.6 数值算例	202
参考文献	205

第一章 准晶概述

1.1 准晶的发现

长期以来,人们把固体材料划分为晶体和非晶体两大类^[1]。晶体材料的原子排列具有周期性,或称为长程有序性。而非晶体材料的原子排列不具备长程周期性。1984年10月9日,美国科学家 Shechtman 等^[2]在 Al-Mn 合金中发现了一种具有五重对称轴、斑点鲜明的电子衍射图样的合金相。这种合金相被称为二十面体,它虽然具有长程有序性,但不具备周期性,这表明其结构与传统的晶体和非晶体都是不相同的,其电子衍射图显示斑点的明锐程度不亚于晶体情况(如图 1.1 所示)。同年,美国宾州大学的 Levine 等^[3]从理论上研究并论证了二十面体结构存在的可能性,认为这是不同于晶体学对称性的三维准周期结构。准周期晶体,简称为准晶,就是他们在这篇文章中首先提出的。更为巧妙的是,在准晶发现

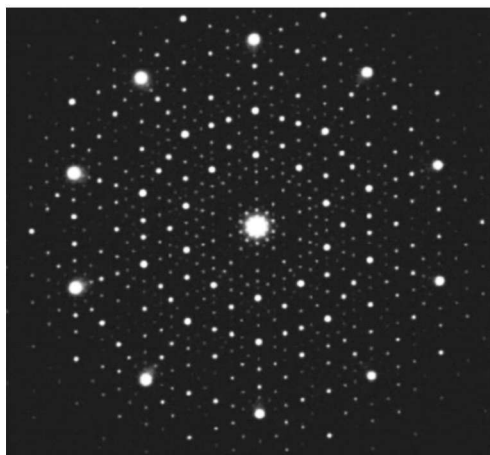


图 1.1 Al-Mn 合金的电子衍射图



的十多年之前,就已经有学者提出了非周期拼砌,并在数学上证明了三维准周期结构的存在。Penrose^[4]曾在 1974 年就提出过一种拼块只有两种的新拼砌。随后,在其他一些合金中,具有八次、十次和十二次的准晶相继被发现。

在准晶的发现过程中,中国科学家也作出了重大的贡献。郭可信院士和他指导的研究小组独立发现了具有五重对称轴的电子衍射图^[5]和 Ti-V-Ni 合金中的三维二十面体准晶^[6]。中国科学院物理研究所冯国光等^[7]在急冷 Al-Fe 合金中发现了二维十次对称准晶。陈焕等^[8]发现了 V-Ni-Si 合金中的二维十二次对称准晶。何伦雄等^[9]在 Al-Ni-Si, Al-Cu-Mn 等快速急冷固化合合金中发现了一维准晶。杨文革等^[10]在 Al-Cu-Fe-Mn 合金中也发现了一维稳定准晶。冯永昌等^[11]在急冷的 V-Ni-Si 合金中得到了立方 D432 的立方准晶。

到目前为止,已在 200 余种合金中观察到了准晶相,它们大多数是 Al 基二元素或三元素合金或者是与 Al 相类似的 Ga 及 Ti 元素的合金,并且还在不断报道一些新的类型的准晶被发现。早期发现的准晶是亚稳态的,它不适合进行一些力学性能的测试,对其研究以微观结构和形成机制为主。随后在一些 Al-Cu-Fe 和 Al-Li-Cu 等合金系中发现了大量热动力学稳定的准晶,而且人们还可以通过普通的凝固方法制备出高质量、大单晶的准晶。这样以来,对稳定的准晶结构内部沿不同方向可以做物理性能测量和实验分析等。

2009 年 7 月 15 日,准晶的研究取得了突破性进展。科学家们首次在一种名为 Khatyrkite 的岩石找到了准晶,这一发现使得准晶被划入一种真实存在的矿物质。2011 年 10 月 5 日,瑞典皇家科学院宣布授予准晶的发现者 Shechtman 教授诺贝尔化学奖,称准晶的发现打破了人们对传统晶体学的认识,开辟了固体结构材料研究的新型领域。准晶的发现,让人们重新审视了“晶体”这个固体理论中的基本概念,从根本上改变了凝固态物理把固体划分为晶体和非晶体的传统概念,揭示了准周期对称性这种新的对称性的存在,很大程度上深化了人们对晶体学、衍射物理和凝聚态物理的认识。

1.2 准晶的分类及性质

根据热力学的稳定性,准晶可分为两大类:稳定准晶和亚稳定准晶^[12]。至今发现的 200 多种准晶中,仅有 70 多种属于热力学稳定准晶,其余准晶结构都是非平衡的亚稳定结构。

所有的准晶都是三维空间中的材料。根据三维物理空间中材料呈现出准周期性的维数,又可以把准晶分为一维准晶、二维准晶和三维准晶三大类^[13]。一维准晶是指沿一个方向上原子是排列为准周期的,在与这个方向(轴)垂直的二维平面上原子是周期分布的。一维准晶分为六大晶系,共有 31 个点群、10 个 Laue 类^[14]。目前已经发现的一维准晶有三斜、单斜、正方、四方、立方、六方 6 个准晶系。二维准晶指的是在二维平面上原子是准周期排列的,而在与这个准周期平面垂直的方向上原子是周期分布的。二维准晶的点群共有 57 个,其中 31 个是晶体所允许的点群,非晶体学点群有 26 个^[15]。

最常见的二维准晶有二维五次准晶、二维六方准晶、二维八次准晶、二维十次准晶、二维十二次准晶和二维十八次准晶。三维准晶是指三维空间上原子都是准周期分布的,它总共有 60 个点群,其中 32 个点群是晶体学所允许的点群,28 个是非晶体学点群^[16]。最早实验上发现的二十面体和立方准晶都属于三维准晶。

虽然准晶从发现到现在才短短 30 多年时间,但是由于独特的原子结构,使它具有高强度、高硬度、耐磨、耐腐蚀、轻质等许多独特的性能,尤其适合在中温工作^[17]。迄今为止,大批性能稳定的单晶准晶材料已不断研发出来,成为一种新型的功能材料和结构材料,在航空航天、新能源、光学、声学、金属成型等众多科学技术领域有广泛的应用前景^[18-23]。此外,在人工微结构材料(如光子晶体、声子晶体、等离激元晶体、半导体超晶格等)的研究中也已经引入了准晶的准周期结构,并发现了准晶的许多新的物理效应和有用功能^[24]。因此开展对准晶的研究,既有理论价值,又有实践上的重要意义。目前,准晶理论和应用方面的研究已成为一门博大而精深的热门学科。



1.3 准晶弹性理论

在高维空间中借助于周期函数把密度波进行展开的方法, Levine^[25], Bak^[26~27]和 Socolar^[28]等首先研究了准晶的线弹性理论。根据 Landau 的元激发唯像理论^[29], 得到了准晶材料同时存在着声子和相位子两类低频元激发。利用高温无序各向同性液晶相的研究方法, 用波矢 k 作为标记密度波 $\rho(r)$ 的参变量, 因为旋转对称性, 弹性能不依赖于方向而仅仅依赖于它的振幅。基于此, 以 $\rho(r)$ 为参数, Bak 构造了三维二十面体准晶的弹性密度能展开式。Levine 利用高维空间中准晶的密度波 $\rho(r)$ 可以表示为 Fourier 级数

$$\rho(r) = \sum_{G \in L_R} \rho G e^{iG \cdot r} = \sum_{G \in L_R} |\rho G| e^{i\Phi_G + iG \cdot r}. \quad (1.1)$$

得到了一种新的准晶弹性能密度构造方法, 这里 $|\rho G|$ 和 Φ_G 分别表示与倒格子 L_R 相关的质量密度波的振幅和相位。 $G \in L_R$ 可以表示为 $\sum m_n G_n$, m_n 是整数, $\{G_n\}$ 表示 N 个基矢量, $N=kd$, k 表示 d 维空间中准晶无公度矢量组的秩, 一般取 $k=2$ 。准晶的弹性行为可以用质量密度波的 R 个相位表示。

在物理空间中, 位移场用来描述原子偏离平衡位置的小振动而激发的晶格波, 这种晶格波的量子称为声子。从而, 声子场相当于普通晶体的弹性位移场, 它的低能长波元激发属于传播型的。然而, 准晶的准周期性导致了它的平移序是无公度的, 这就表明准晶还具有一个普通晶体没有的附加空间相, 称之为相位子场, 它位于与声子场垂直的空间或称为声子场的补空间。如果反抗无公度密度波是有摩擦的, 则相位子场对应的元激发是扩散型的; 当摩擦很小或无摩擦时, 相位子场的模式可以看成是波传播^[30]。

高维空间中准晶呈现的是周期结构, 可以看成是高维空间中的晶体沿某一个子空间所做的切割面或投影面^[31~32]。准晶的每个自由度都是来自声子场和相位子场的双重贡献, 对应就会产生声子场和相位子场两种不同形式的应变场, 它们可以看成是声子的传播和单胞的重排。弹性自由能中的相位子项是反映准晶

准周期性的一个重要参数,它也是区别经典弹性理论中弹性密度能的重要特征之一。声子场和相位子场结合的二次项就构成了准晶弹性自由能中的低阶项。准晶弹性自由能的密度由三部分组成,即

$$F = F^u + F^w + F^{uw}, \quad (1.2)$$

其中, F^u 是由声子场激发的密度, F^w 是由相位子场激发的密度, F^{uw} 是由声子场-相位子场耦合激发的密度。

在准晶的弹性理论中,取得的另一个重大进展就是丁棣华^[33],杨文革^[34]等发展的准晶广义弹性理论。通过引入一个位于垂直空间的应力张量,与经典弹性理论类似,在准晶弹性理论中也同样可以建立准晶的变形几何方程

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad w_{ij} = \partial_j w_i. \quad (1.3)$$

不计体力时的平衡方程

$$\partial_i \rho_{ij} = 0, \quad \partial_i H_{ij} = 0. \quad (1.4)$$

广义胡克定律(应力-应变关系或本构关系)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + R_{ijkl} w_{kl}, \quad H_{ij} = R_{ijkl} \varepsilon_{kl} + K_{ijkl} w_{kl}, \quad (1.5)$$

其中, $i, j=1,2,3$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$; ε_{kl} , w_{kl} 分别为声子场和相位子场应变分量; u_i , w_i 分别为声子场和相位子场位移分量; σ_{ij} , H_{ij} 分别为声子场和相位子场应力分量; C_{ijkl} , K_{ijkl} , R_{ijkl} 分别为声子场、相位子场和声子场-相位子场耦合弹性常数。在这些方程中,一组是关于平行空间的,另一组是关于垂直空间的。两个空间中物理量的联系是由声子场-相位子场耦合系数确定。

由于相位子场的引入,使得准晶弹性理论中基本控制微分方程比经典弹性理论中的相应方程要多一倍以上,从而求解这些控制微分方程的边值问题比经典弹性理论中相应方程的边值问题要困难得多。因而,准晶数学弹性力学还有很多问题需要解决。接触问题是弹性力学的一个重要分支,由于接触问题的复杂性,大多数弹性材料的接触问题都难以完美解决。当然,与比经典弹性理论求解更加困难的准晶弹性理论相比,接触问题在准晶中的研究将面临更大的困难。本书主要研究一维、二维、三维准晶的接触问题及带裂纹准晶的接触问题。

第二章 一维准晶周期平面弹性接触问题

一维准晶是指在一个方向上原子排列为准周期的(该方向既存在声子场,同时存在相位子场),在与之相垂直的平面上原子排列为周期的(该平面仅存在声子场)。这表明即使是一维准晶,其结构也是三维的,它生成在一个三维物体中。严格意义上讲,一维准晶可以看作为四维空间中的一个超立方周期点阵向三维物理空间投影而生成的。

一维准晶由于其结构相对简单,是广大物理和应用数学工作者研究的热点材料之一。在已发现的一维准晶六个晶系中,一维六方准晶的研究最为常见,取得的研究成果也最丰硕^[35-37]。与一维六方准晶相比,一维正方准晶结构较复杂,弹性常数较多,研究起来更复杂一些^[38]。一维正方准晶弹性问题的研究目前主要集中在关于缺陷和缺陷的相互作用问题^[39-41]。本章主要研究一维正方准晶周期平面的接触问题。

2.1 一维正方准晶弹性理论

取一维正方准晶的准周期方向为坐标轴,垂直于准周期方向的平面为坐标平面,建立直角坐标系。此时, ox_1x_2 面为一维正方准晶的周期平面, ox_2x_3 面为非周期平面。由文献[42]知,一维正方准晶弹性问题的广义胡克定律可表示为

$$\begin{cases}
\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} + R_1 w_{33}, \\
\sigma_{22} = C_{12}\varepsilon_{11} + C_{11}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} + R_1 w_{33}, \\
\sigma_{33} = C_{13}\varepsilon_{11} + C_{13}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} + R_2 w_{33}, \\
\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2C_{66}\varepsilon_{12}, \\
\sigma_{13} = \sigma_{31} = 2C_{44}\varepsilon_{31} + R_3 w_{31}, \\
\sigma_{23} = \sigma_{32} = 2C_{44}\varepsilon_{32} + R_3 w_{32}, \\
H_{31} = 2R_3\varepsilon_{31} + K_2 w_{31}, \\
H_{32} = 2R_3\varepsilon_{32} + K_2 w_{32}, \\
H_{33} = R_1(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + R_2\varepsilon_{33} + K_1 w_{33}.
\end{cases} \quad (2.1)$$

几何方程为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), w_{ij} = \partial_j w_i. \quad (2.2)$$

不计体力时的平衡方程为

$$\partial_i \sigma_{ij} = 0, \partial_i H_{ij} = 0. \quad (2.3)$$

其中, $i, j=1, 2, 3$; σ_{ij} , H_{ij} 分别为声子场和相位子场应力分量; ε_{ij} , w_{ij} 分别为声子场和相位子场应变分量; u_3 , w_3 分别为声子场和相位子场位移分量; C_{11} , C_{12} , C_{13} , C_{33} , C_{44} , C_{66} 为 6 个声子场弹性常数; K_1 , K_2 为 2 个相位子场弹性常数; R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , R_5 为声子场-相位子场耦合常数。

当一维正方准晶的缺陷沿准周期方向轴穿透时, 材料的几何性质不随准周期方向改变, 即

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = 0. \quad (2.4)$$

此时, 一维正方准晶的弹性问题可分解为一个平面问题和一个反平面问题的叠加, 这里我们只讨论平面问题, 其基本方程如下^[42]

$$\begin{cases}
\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22}, \\
\sigma_{22} = C_{12}\varepsilon_{11} + C_{11}\varepsilon_{22}, \\
\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2C_{66}\varepsilon_{12}, \\
\sigma_{13} = \sigma_{31} = 2C_{44}\varepsilon_{31} + R_3 w_{31}, \\
\sigma_{23} = \sigma_{32} = 2C_{44}\varepsilon_{32} + R_3 w_{32}, \\
H_{33} = R_1\varepsilon_{11} + R_2\varepsilon_{22}.
\end{cases} \quad (2.5)$$



$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), i, j = 1, 2. \quad (2.6)$$

$$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_1 \sigma_{12} = 0, \quad \partial_1 \sigma_{21} + \partial_1 \sigma_{22} = 0. \quad (2.7)$$

把式(2.7)代入式(2.6),得到

$$\begin{cases} (C_{11}\partial_1^2 + C_{66}\partial_2^2)u_1 + (C_{12} + C_{66})\partial_1\partial_2 u_2 = 0, \\ (C_{11} + C_{66})\partial_1\partial_2 u_1 + (C_{66}\partial_1^2 + C_{22}\partial_2^2)u_2 = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

引入位移势函数^[42]

$$u_1 = (C_{12} + C_{66})\partial_1\partial_2 F, \quad u_2 = -(C_{66}\partial_1^2 + C_{22}\partial_2^2)F.$$

显然,式(2.6)已自动满足。把式(2.8)代入式(2.7),可得

$$(c_1\partial_1^4 + c_2\partial_1^2\partial_2^2 + c_3\partial_2^4)F = 0, \quad (2.9)$$

其中

$$c_1 = -C_{11}C_{66}, \quad c_2 = C_{12}^2 + 2C_{12}C_{66} - C_{11}C_{22}, \quad c_3 = -C_{22}C_{66}.$$

式(2.9)称为一维正方准晶平面弹性问题的最终控制方程,它是一个四阶偏微分方程。由文献[43]知,它的解可以用两个广义解析函数 $F_i(z_i)$ ($i=1,2$)表示为

$$F(x_1, x_2) = 2\operatorname{Re} \sum_{i=1}^2 F_i(z_i), \quad z_i = x_1 + \mu_i x_2, \quad (2.10)$$

这里, Re 表示复数的实部。 $\mu_i = \alpha_i + i\beta_i$ ($i=1,2$)是两个不同的复参数, $i=\sqrt{-1}$, α_i, β_i 是仅依赖于准晶弹性常数的实常数。 μ_i 由特征方程

$$c_3\mu^4 + c_2\mu^2 + c_1 = 0 \quad (2.11)$$

确定。如果特征根出现重根,上述结果可进一步简化。

把式(2.10)代入式(2.5)及(2.9),可得到应力和位移的表达式

$$\begin{cases} \sigma_{12} = \sigma_{21} = q_1 f_1'(z_1) + \overline{q_1 f_1'(z_1)} + q_2 f_2'(z_2) + \overline{q_2 f_2'(z_2)}, \\ \sigma_{22} = r_1 f_1'(z_1) + \overline{r_1 f_1'(z_1)} + r_2 f_2'(z_2) + \overline{r_2 f_2'(z_2)}, \\ u_1 = o_1 f_1(z_1) + \overline{o_1 f_1(z_1)} + o_2 f_2(z_2) + \overline{o_2 f_2(z_2)}, \\ u_2 = p_1 f_1(z_1) + \overline{p_1 f_1(z_1)} + p_2 f_2(z_2) + \overline{p_2 f_2(z_2)}, \end{cases} \quad (2.12)$$

其中

$$\begin{aligned}
q_i &= (-C_{11}C_{66} + C_{12}C_{66}\mu_i^2), \\
r_i &= (C_{12}^2 + C_{12}C_{66} - C_{11}C_{22}\mu_i) - C_{22}C_{66}\mu_i^3, \\
o_i &= \mu_i(C_{11} + C_{66}), \\
p_i &= (-C_{11}C_{66} + C_{12}C_{66}\mu_i^2), \\
f_i(z_i) &= \partial_{z_i}^2 F_i(z_i) = F_i''(z_i) (i=1,2).
\end{aligned}$$

称广义解析函数 $f_i(z_i)$ 及其导数 $f_i'(z_i)$ ($i=1,2$) 为应力函数。

2.2 一维正方准晶周期平面弹性无摩擦接触问题

如图 2.1 所示, 考虑一个宽度为 $2a$ 的刚性压头完全无摩擦接触于一维正方准晶材料非周期平面 (ox_1x_3 面) 上半平面上, 受压区间记为 γ , P_0 为作用在压头上垂直方向的作用力。此时, 一维正方准晶周期平面弹性无摩擦接触问题的边界条件可表示为

$$\begin{cases} |x_1| < a, x_2 = 0: u_2'(x_1, 0^+) = f'(x_1), \sigma_{12}(x_1, 0^+) = 0, \\ |x_1| > a, x_2 = 0: \sigma_{12}(x_1, 0^+) = \sigma_{22}(x_1, 0^+) = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

其中, $(x_1, 0^+)$ 表示从 z 自下而上趋于 x_1 轴。

由于 ox_1x_3 面为准周期平面, x_2 方向为周期方向, 所以在准晶材料表面只能产生声子场应力和位移。

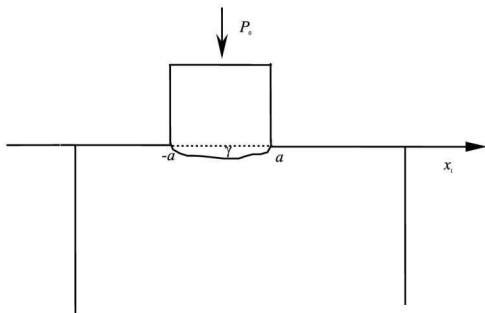


图 2.1 刚性压头与一维正方准晶非周期平面接触



在接触面上,切应力边界条件可表示为:

$$q_1 f_1'^+(x_1) + \bar{q}_1 \bar{f}_1'^-(x_1) + q_2 f_2'^+(x_1) + \bar{q}_2 \bar{f}_2'^-(x_1) = f'(x_1), \quad |x_1| < a. \quad (2.14)$$

以上方程的左端项在上半平面解析,并在无穷远处趋于0;而其右端项在下半平面解析,并在无穷远处趋于0,从而成立

$$\begin{cases} f_2'^+(x_1) = -\frac{q_1}{q_2} f_1'^+(x_1), \\ f_1'^-(x_1) = -\frac{\bar{q}_2}{\bar{q}_1} \bar{f}_2'^-(x_1), \end{cases} \quad |x_1| < a. \quad (2.15)$$

在接触面上,声子场法向位移条件可用应力函数表示为

$$p_1 f_1'^+(x_1) + \bar{p}_1 \bar{f}_1'^-(x_1) + p_2 f_2'^+(x_1) + \bar{p}_2 \bar{f}_2'^-(x_1) = f'(x_1), \quad |x_1| < a. \quad (2.16)$$

把关系式(2.15)代入式(2.16),消去 $\bar{f}_1'^-(x_1)$ 和 $f_2'^+(x_1)$,得到

$$f_1'^+(x_1) + \frac{q_2(\bar{p}_2 \bar{q}_1 - \bar{p}_1 \bar{q}_2)}{\bar{q}_1(p_1 q_2 - p_2 q_1)} \bar{f}_2'^-(x_1) = \frac{q_2}{p_1 q_2 - p_2 q_1} f'(x_1), \quad |x_1| < a. \quad (2.17)$$

在接触面外,声子场正应力可表示为

$$r_1 f_1'^+(x_1) + \bar{r}_1 \bar{f}_1'^-(x_1) + r_2 f_2'^+(x_1) + \bar{r}_2 \bar{f}_2'^-(x_1) = 0, \quad |x_1| > a. \quad (2.18)$$

把式(2.15)代入式(2.18),消去 $\bar{f}_1'^-(x_1)$ 和 $f_2'^+(x_1)$,有

$$f_1'^+(x_1) - \eta_1 \bar{f}_2'^-(x_1) = 0, \quad |x_1| > a, \quad (2.19)$$

其中

$$\eta_1 = \frac{q_2(\bar{r}_2 \bar{q}_1 - \bar{r}_1 \bar{q}_2)}{\bar{q}_1(p_2 q_1 - r_1 q_2)}.$$

引入函数 $\Omega_1(z)$

$$\Omega_1(z) = \begin{cases} f_1'(z), & z = z_1, \text{Im}(z_1) > 0. \\ \eta_1 \bar{f}_2'(z), & z = z_2, \text{Im}(z_2) < 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

则 $\Omega_1(z)$ 在 x_1 轴上满足条件

$$\begin{cases} \Omega_1^+(x_1) + \gamma_1 \Omega_1^-(x_1) = \delta_1 f'(x_1), & |x_1| < a, \\ \Omega_1^+(x_1) - \Omega_1^-(x_1) = 0, & |x_1| > a, \end{cases} \quad (2.21)$$

其中

$$\gamma_1 = \frac{(\bar{p}_2 q_1 - \bar{p}_1 \bar{q}_2)(p_2 q_1 - r_1 q_2)}{(p_1 q_2 - p_2 q_1)(\bar{r}_2 \bar{q}_1 - \bar{p}_1 \bar{q}_2)}, \quad \delta_1 = \frac{q_2}{p_1 q_2 - p_2 q_1}.$$

显而易见,式(2.21)为 Riemann-Hilbert 边值问题,其解为^[44]

$$\Omega_1(z) = \frac{\delta_1 X_1(z)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(t)dt}{X_1^+(t)(t-z)} + C_1 X_1(z), \quad (2.22)$$

其中

$$X_1(z) = (z+a)^{-\frac{1}{2}}(z-a)^{-\frac{1}{2}},$$

$$C_1 = \frac{P_0}{2\pi M i}, \quad M = \frac{\bar{q}_2 \bar{\eta}_1}{\bar{q}_2 \eta_1 (r_1 \bar{q}_1 - \bar{\mu}_1 q_2) - \bar{q}_1 (r_2 q_1 \eta_1 - \bar{r}_2 \bar{q}_2)}.$$

以上求得的 $\Omega_1(z)$ 的表达式已满足压头下方力的平衡条件

$$\int_{\gamma} \sigma_{22}(x_1, 0^+) dx_1 = P_0.$$

特别地,当压头为平底压头时,有 $f'(x_1) = 0$,从而可得

$$\Omega_1(z) = \frac{P_0}{2\pi M i} X_1(z). \quad (2.23)$$

结合式(2.20)得到

$$\begin{cases} f_1^{'+}(x_1) = \frac{P_0}{2\pi M i} (x_1 + a)^{-\frac{1}{2}} (x_1 - a)^{-\frac{1}{2}}, \\ \bar{f}_2^{'+}(x_1) = \frac{P_0}{2\pi M \eta_1 i} (x_1 + a)^{-\frac{1}{2}} (x_1 - a)^{-\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad |x_1| < a. \quad (2.24)$$

把上式代入式(2.15),便可确定 $\bar{f}_1^{'+}(x_1), f_2^{'+}(x_1)$ 在接触面上的显式表达式。

结合式(2.12),即得压头下方接触应力和接触位移分别为

$$\sigma_{22}(x_1, 0^+) = -\frac{P_0}{2\pi} (a^2 - x_1^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad |x_1| < a. \quad (2.25)$$

$$u_2(x_1, 0^+) = \frac{P_0}{4\pi} \operatorname{Im}\left(\frac{p_1 \eta_1 + \bar{p}_2}{M \eta_1}\right), \quad |x_1| < a. \quad (2.26)$$

由式(2.25)可以看出,接触应力在压头边缘具有 $-\frac{1}{2}$ 阶的奇异性,且接触应



力与弹性常数无关,这与经典弹性理论中已有结论一致^[44]。式(2.26)表明接触位移与声子场作用力成比例关系。

2.3 一维正方准晶周期平面弹性有限摩擦接触问题

考虑一个宽度为 $2a$ 的刚性压头具有有限摩擦的与一维正方准晶材料非周期平面(ox_1x_3 面)接触(图 2.1)。此时,一维正方准晶周期平面弹性有限摩擦接触问题的边界条件可表示为

$$\begin{cases} |x_1| < a, x_2 = 0: u'_2(x_1, 0^+) = f'(x_1), \sigma_{12}(x_1, 0^+) = \rho \sigma_{22}(x_1, 0^+), \\ |x_1| > a, x_2 = 0: \sigma_{12}(x_1, 0^+) = \sigma_{22}(x_1, 0^+) = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

其中, $\rho > 0$ 是摩擦系数。

在接触面上,声子场切应力和正应力之间的比例关系可由应力函数 $f_1'(z_1)$, $f_2'(z_2)$ 表示为

$$(q_1 - \rho r_1) f_1'^+(x_1) + (q_2 - \rho r_2) f_2'^+(x_1) = -(\bar{q}_1 - \rho \bar{r}_1) \bar{f}_1'^-(x_1) - (\bar{q}_2 - \rho \bar{r}_2) \bar{f}_2'^-(x_1), \quad |x_1| < a. \quad (2.28)$$

以上方程的左端项在上半平面解析,并在无穷远处趋于 0;其右端项在下半平面解析,同样也在无穷远处趋于 0,从而成立

$$\begin{cases} f_2'^+(x_1) = -\frac{q_1 - \rho \mu_1}{q_2 - \rho \mu_2} f_1'^+(x_1), \\ f_1'^-(x_1) = -\frac{\bar{q}_2 - \rho \bar{\mu}_2}{\bar{q}_1 - \rho \bar{\mu}_1} \bar{f}_2'^-(x_1), \end{cases} \quad |x_1| < a. \quad (2.29)$$

在接触面上,声子场法向位移条件可表示为

$$p_1 f_1'^+(x_1) + \bar{p}_1 \bar{f}_1'^-(x_1) + p_2 f_2'^+(x_1) + \bar{p}_2 \bar{f}_2'^-(x_1) = f'(x_1), \quad |x_1| < a. \quad (2.30)$$

把式(2.29)代入式(2.30),消去 $\bar{f}_1'^-(x_1)$ 和 $\bar{f}_2'^-(x_1)$,得到

$$f_1'^+(x_1) + \gamma_2 \bar{f}_2'^-(x_1) = \delta_2 f'(x_1), \quad |x_1| < a. \quad (2.31)$$

其中