考研数学分析

赵书改　赵建堂　张为元　编著

陕西新华出版传媒集团
陕西科学技术出版社
Shaanxi Science And Technology Press
西　安

图书在版编目(CIP)数据

考研数学分析/赵书改,赵建堂,张为元编著.
—西安:陕西科学技术出版社,2020.10
ISBN 978-7-5369-7906-2

Ⅰ.①考… Ⅱ.①赵…②赵…③张… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 188580 号

考研数学分析
赵书改 赵建堂 张为元 编著

责任编辑 焦 洁
封面设计 卫晨亮

出版者 陕西新华出版传媒集团 陕西科学技术出版社
西安市曲江新区登高路 1388 号陕西新华出版传媒产业大厦 B 座
电话(029)87205187 传真(029)81205155 邮编 710061
http://www.snstp.com
发行者 陕西新华出版传媒集团 陕西科学技术出版社
电话(029)81205180 81206809
印刷者 北京虎彩文化传播有限公司
规 格 787mm×1092mm 16 开本
印 张 26
字 数 450 千
版 次 2020 年 10 月第 1 版
2021 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5369-7906-2
定 价 59.80 元

前言

数学分析是高等院校数学专业最重要的基础课,也是数学各个专业硕士研究生入学考试的必考课程。在硕士研究生入学考试中,数学分析与高等代数分值各占150分,所以数学分析考试的成败直接关系到整个考试的成败。

《考研数学分析》内容丰富,知识面广,综合性强,理论体系严谨,解题方法灵活多变。初学者很难达到融会贯通,独立解题的目标。为使学生能系统地理解和熟练掌握数学分析的基本理论、解题技巧和应用方法,使学生进一步巩固知识,加强训练,开阔思路。开设数学分析选讲课程是非常有必要的。

本书共分为二十章,每章均有基础知识、题型与例题,部分章节还含有常用公式与常用图形等。基础知识部分主要是对本章的基本概念、基本原理进行总结。题型部分主要是对本章所涉及的题型进行归纳,并给出相应的解决方案。例题部分主要是就相应题型举出典型例题,并进行详细解析。

在学习的道路上没有捷径,一份辛劳一份收获,但得当的学习方法可以达到事半功倍的效果。同学们在复习的过程中,每

做完一道题，都应进行一下回顾、体会、反思、总结和积累，回顾相关的知识，体会编者的思路，反思自己的不足，总结解题技巧，积累做题经验，最终达到融会贯通，独立解题，完善解答。

本书第一章至第五章由咸阳师范学院数学与信息科学学院张为元老师编写，第六章至第八章、第十八章至第二十章由咸阳师范学院数学与信息科学学院赵建堂老师编写，第九章至第十七章由咸阳师范学院数学与信息科学学院赵书改老师编写，全书由赵书改老师统一整理。

由于编者的知识水平和能力有限，本书中存在错误和疏漏的地方，欢迎读者和同行们提出宝贵的意见和建议，在此表示衷心的感谢。

赵书改

2020 年 7 月

目录

第一章　数列的极限

一、基础知识

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的定义

（1）通俗定义

设$\{a_n\}$为数列，a 为定数. 若当 n 无限增大时，a_n 无限地接近于 a，则称数列$\{a_n\}$收敛于 a，定数 a 称为数列$\{a_n\}$的极限.

（2）$\varepsilon - N$ 定义

设$\{a_n\}$为数列，a 为定数. 若对任给的正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列$\{a_n\}$收敛于 a，定数 a 称为数列$\{a_n\}$的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \text{或 } a_n \to a\ (n\to\infty).$$

若数列$\{a_n\}$没有极限，则称$\{a_n\}$不收敛，或称$\{a_n\}$发散.

（3）邻域定义

设$\{a_n\}$为数列，a 为定数. 若对任给的 $\varepsilon > 0$，$U(a,\varepsilon)$之外至多含有数列$\{a_n\}$的有限项，则称$\{a_n\}$收敛于 a，a 称为$\{a_n\}$的极限.

2. 无穷小数列与无穷大数列

（1）无穷小数列的定义

设$\{a_n\}$为数列. 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则称数列$\{a_n\}$为无穷小数列.

（2）无穷大数列的定义

设$\{a_n\}$为数列. 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$，则称数列$\{a_n\}$为无穷大数列.

(3)无穷小数列与无穷大数列的关系

设$\{a_n\}$为数列，且$a_n \neq 0$，则数列$\{a_n\}$为无穷小数列的充要条件是$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$为无穷大数列.

3. 有界数列与无界数列

(1)有界数列的定义

设$\{a_n\}$为数列. 若存在$M>0$，使得对任意的n，都有$|a_n| \leqslant M$，则称$\{a_n\}$为有界数列.

(2)无界数列的定义

设$\{a_n\}$为数列. 若对任意的$M>0$，都存在正整数n，使得$|a_n|>M$，则称$\{a_n\}$为无界数列.

(3)无穷大数列与无界数列的关系

无穷大数列必为无界数列，但反之不真. 例如$a_n=\begin{cases}1, n=2k-1\\ n, n=2k\end{cases}(k=1,2,\cdots)$.

4. 数列与子列的关系

(1)数列$\{a_n\}$收敛当且仅当$\{a_n\}$的任意子列都收敛且极限相同；

(2)有收敛子列的单调数列必收敛；

(3)数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是$\{a_{2n-1}\}$与$\{a_{2n}\}$都收敛且极限相同.

5. 收敛数列的性质

(1)唯一性

若数列$\{a_n\}$收敛，则$\{a_n\}$的极限唯一.

(2)有界性

若数列$\{a_n\}$收敛，则$\{a_n\}$有界.

注1 此结论的逆命题不成立. 例如$a_n=(-1)^n$.

注2 此结论的逆否命题成立：若$\{a_n\}$无界，则$\{a_n\}$发散.

(3)保号性

若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a>r$，则存在正整数$N$，当$n>N$时，有$a_n>r$.

若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a<r$，则存在正整数$N$，当$n>N$时，有$a_n<r$.

(4)保不等式性

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,且存在正整数 N, 当 $n>N$ 时,有 $a_n\geqslant b_n$,则 $a\geqslant b$.

注 将条件中的 $a_n\geqslant b_n$ 换成 $a_n>b_n$,结论不变.

(5)迫敛性定理

若数列$\{a_n\},\{b_n\}$及$\{c_n\}$满足如下条件:

1)$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n,n=1,2,3\cdots$;

2)$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$,

则数列$\{c_n\}$收敛, 且$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

(6)四则运算法则

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,则

1)$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a\pm b$;

2)$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a\cdot b$;

3)当 $b\neq0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{a}{b}$.

(7)数列的敛散性与前有限项的无关性

增加、减少或改变数列的前有限项不改变数列的敛散性,在收敛的情况下不改变数列的极限.

6. 数列极限存在的条件

(1)单调有界定理

单调有界数列必有极限.

注 在应用中,常常分为“单调递增有上界的数列必有极限”与“单调递减有下界的数列必有极限”.

(2)柯西准则

数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是:对任给的正数 ε,总存在正整数 N,使得当 n, $m>N$时,有$|a_n-a_m|<\varepsilon$.

7. 重要极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$,可推广为$\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=e$.

二、常用的数列极限与结论

1. 常用的数列极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}=0(\alpha>0)$； $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$； $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n}}{n!}=0$；

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$； $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$； $\lim\limits_{n\to\infty}q^{n}=0(|q|<1)$；

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^{n}}=0$； $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$； $\{(-1)^{n}\}$发散；

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_m(n)}{Q_k(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_0}{b_kn^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}0, m<k\\ \dfrac{a_m}{b_k}, m=k.\\ \infty, m>k\end{cases}$$

2. 常用的数列结论

(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$；

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 但反之不真；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$ 当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-a|=0$；

(4) 设 $a_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l<1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；

(5) 有收敛子列的单调数列必定收敛；

(6) $\{a_n\}$收敛当且仅当$\{a_{2n}\}$与$\{a_{2n-1}\}$都收敛，且极限相同；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 当且仅当$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=a$；

(8) 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

又若 $a_n>0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}=a.$$

三、求和式极限的方法

(1)先求和,再求极限;

(2)迫敛性定理;

(3)定积分的定义:设f在闭区间$[0,1]$上连续,则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(4)施托斯(Stolz)定理:设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$满足

1)$\{y_n\}$严格递增;

2)$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$;

3)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l$,

则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=l$.

【例1】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^3}$.

解1 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^3}=0$.

解2 由施托斯定理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^3-(n-1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n^2-3n+1}=0.$$

【例2】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\times n}\right]$.

解 拆项相消得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1.$$

【例3】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$.

解 由于

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leqslant \frac{n}{n+\sqrt{1}},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{1}}=1,$$

故由迫敛性定理得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1$.

【例4】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$.

解 由于

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\frac{1}{n^2+n+n}+\frac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$$

$$\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$$

$$\leqslant\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+1}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2},$$

故由迫敛性定理得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$.

【例5】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$.

解 由定积分的定义得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{2}).$$

【例 6】　求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}\sin\frac{i}{n}}-1\right)$.

解　由等价代换与定积分的定义得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}\sin\frac{i}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{i}{n}=\int_0^1\sin x\mathrm{d}x=1-\cos 1.$$

【例 7】　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

解　首先，

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+1}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+1}\leqslant\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}$$

$$\leqslant\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n}.$$

其次,由定积分的定义得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+1}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

故由迫敛性定理得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

【例 8】　求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

解　由施托斯定理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{1}=1.$$

注 也可使用迫敛性,但需研究 $1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\cdots,\sqrt[n]{n}$ 中的最大项与最小项.

【例 9】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^1\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^n}$.

解 记 $u_n=\sqrt[n^2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^1\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^n}$,则

$$\begin{aligned}\ln u_n&=\frac{1}{n^2}\left[1\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+2\cdot\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+n\cdot\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{i}{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right),\end{aligned}$$

由定积分的定义得

$$\begin{aligned}\ln\lim_{n\to\infty}u_n&=\lim_{n\to\infty}\ln u_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{i}{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\ln(1+x)\,d\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}d\ln(1+x)=\frac{1}{4},\end{aligned}$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=e^{\frac{1}{4}}$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^1\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^n}=e^{\frac{1}{4}}$.

【例 10】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

解 记 $u_n=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$,则

$$\ln u_n=\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\frac{i}{n},$$

由定积分的定义得

$$\ln\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\ln u_n=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{d}x=-1,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=e^{-1}$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}$.

四、关于递推式数列的极限

对递推式数列一般用单调有界定理证明其收敛.在证明数列单调或有界的过程中可能会使用到数学归纳法.

【例 11】　设 $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$，$n=1,2,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解　首先，显然 $\{a_n\}$ 单调递增.

显然 $a_1<2$. 假设 $a_n<2$，则

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2,$$

因此 $a_n<2$，$n=1,2,\cdots$. 由单调有界定理知 $\{a_n\}$ 收敛.

其次，设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\sqrt{2}<a\leqslant 2$. 在 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ 的两边令 $n\to\infty$，则

$$a=\sqrt{2+a},$$

解得 $a=2$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

【例 12】　设 $x_1>a>0$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n^{\ 2}-2ax_n+2a^2}$，$n=1,2,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解　首先，由于

$$x_{n+1}=\sqrt{(x_n-a)^2+a^2},$$

所以 $x_n\geqslant a$，$n=1,2,\cdots$.

由于

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=\sqrt{x_n^{\ 2}-2ax_n+2a^2}-x_n=\frac{-2ax_n+2a^2}{\sqrt{x_n^{\ 2}-2ax_n+2a^2}+x_n}\\&=\frac{2a(a-x_n)}{\sqrt{x_n^{\ 2}-2ax_n+2a^2}+x_n}\leqslant 0,\end{aligned}$$

故 $x_{n+1}\leqslant x_n$，即 $\{x_n\}$ 单调递减. 由单调有界定理知 $\{x_n\}$ 收敛.

其次，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，则 $a\leqslant x<x_1$. 在 $x_{n+1}=\sqrt{x_n^{\ 2}-2ax_n+2a^2}$ 的两边令 $n\to\infty$，则

$$x=\sqrt{x^2-2ax+2a^2},$$

解得 $x=a$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

【例 13】　设 $0<a_1<1$，$a_{n+1}=a_n(2-a_n)$，考察数列 $\{a_n\}$ 是否收敛. 若收敛，求其极限.

解　首先，由于 $0<a_1<1$，故

$$a_2-a_1=a_1(1-a_1)>0,\ a_2=1-(1-a_1)^2<1,$$

所以 $0<a_n<a_{n+1}<1$.

假设 $0<a_{n-1}<a_n<1$，由于

$$a_{n+1}-a_n=a_n(1-a_n)>0, a_{n+1}=1-(1-a_n)^2<1,$$

所以 $0<a_n<a_{n+1}<1$，即$\{a_n\}$单调有界. 由单调有界定理知$\{a_n\}$收敛.

其次，记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $0<a\leqslant 1$. 在 $a_{n+1}=a_n(2-a_n)$ 的两边令 $n\to\infty$，则 $a=a(2-a)$，解得 $a=1, a=0$（舍去），即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

【例 14】 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $0<f'(x)\leqslant\dfrac{k}{1+x^2}$，其中 k 为正整数. 取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，令 $x_n=f(x_{n-1})$，证明$\{x_n\}$收敛.

解 首先，由拉格朗日定理知，存在 ξ_n 介于 x_{n-1} 与 x_n 之间，使得

$$x_{n+1}-x_n=f(x_n)-f(x_{n-1})=f'(\xi_n)(x_n-x_{n-1}),$$

由于 $f'(\xi_n)>0$，所以 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号，即$\{x_n\}$单调.

其次，由牛顿－莱布尼茨公式知

$$x_n=f(x_{n-1})=f(x_0)+\int_{x_0}^{x_{n-1}}f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$\begin{aligned}|x_n|&\leqslant|f(x_0)|+\left|\int_{x_0}^{x_{n-1}}f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant|f(x_0)|+\left|\int_{x_0}^{x_{n-1}}|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant|f(x_0)|+\left|\int_{x_0}^{x_{n-1}}\frac{k}{1+t^2}\mathrm{d}t\right|\leqslant|f(x_0)|+k\,|\arctan x_{n-1}-\arctan x_0|\\&\leqslant|f(x_0)|+k\pi,\end{aligned}$$

即$\{x_n\}$有界.

由单调有界定理知$\{x_n\}$收敛.

【例 15】 设 $a_1>b_1>0$，记

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}, n=2,3\cdots,$$

证明：数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的极限都存在且等于 $\sqrt{a_1b_1}$.

证明 显然 $a_n>0, b_n>0$. 当 $n\geqslant 2$ 时，由于：

$$a_n-b_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}-\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}=\frac{(a_{n-1}-b_{n-1})^2}{2(a_{n-1}+b_{n-1})}>0,$$

所以 $a_n-b_n>0$，即

$$a_n>b_n, n=2,3\cdots.$$

由于

$$a_{n+1}-a_n=\frac{b_n-a_n}{2}<0,$$

所以$\{a_n\}$单调递减,又$\{a_n\}$有下界0,由单调有界定理知$\{a_n\}$的极限存在.

由于

$$b_{n+1}-b_n=\frac{b_n(a_n-b_n)}{a_n+b_n}>0,$$

所以$\{b_n\}$单调递增. 又$b_n<a_n<a_1$,故$\{b_n\}$有上界a_1,由单调有界定理知$\{b_n\}$的极限存在.

记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,则$a\geqslant0$,$b\geqslant0$. 在$a_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$的两边令$n\to\infty$得

$$a=\frac{a+b}{2},$$

又

$$a_nb_n=a_{n-1}b_{n-1}=a_{n-2}b_{n-2}=\cdots=a_1b_1,$$

令$n\to\infty$,则

$$ab=a_1b_1,$$

联立$\begin{cases}a=\dfrac{a+b}{2}\\ ab=a_1b_1\end{cases}$,解得$a=b=\sqrt{a_1b_1}$,即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\sqrt{a_1b_1}$.

五、求数列极限的方法

求解数列的极限,主要使用求函数极限的方法和归结原则,这些方法在函数极限计算中会做详细的讲解. 但由于数列的特殊性,它还存在一些特殊的求解方法.

1. 级数收敛的必要条件

若级数$\sum u_n$收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

【例16】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{2^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1,$$