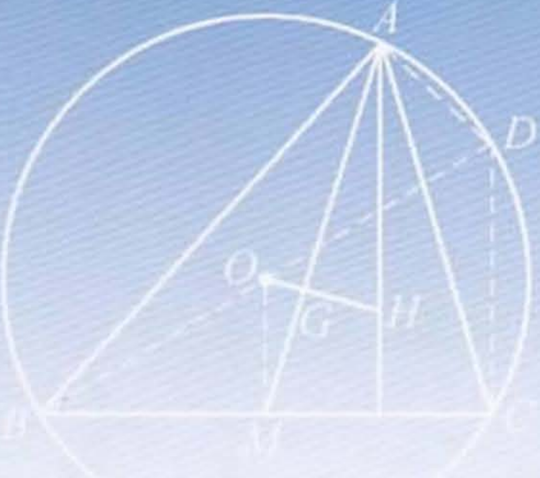
SHUXUE

高中自主招生与初高中衔接学习

主编 王 华 胡 军

数学



GAOZHONG
ZIZHU ZHAOSHENG
YU CHUGAOZHONG
XIANJIE XUEXI
SHUXUE

上海科学技术出版社

高中自主招生与初高中衔接学习

数学

主编

王华　　胡军

上海科学技术出版社

内容提要

本书主要为学生准备参加高中自主招生复习所用，也为初中毕业生进一步学习高中数学知识所用. 本书根据数与代数、图形与几何、统计与概率和综合与实践等安排了十八讲内容，而每一讲按照不同的知识点进行分类，每个知识点下均安排【知识概述】【本质提炼】【基本模型】【变式练习】四个栏目，其中【基本模型】【变式练习】中的例题、习题都具有一定的代表性，能帮助学生了解自主招生考试的重点和难点. 每讲末尾还安排了自我检测题，便于学生检测自我水平，为学生参加自主招生考试和进入高中学习打下基础.

图书在版编目（CIP）数据

高中自主招生与初高中衔接学习. 数学 / 王华，胡军主编. -- 上海 : 上海科学技术出版社，2020.8
ISBN 978-7-5478-4726-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… ②胡… Ⅲ. ①中学数学课－初中－升学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第288430号

责任编辑　周乐　王韩欢

高中自主招生与初高中衔接学习　数学
主编　王华　胡军

上海世纪出版(集团)有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社　出版、发行
(上海钦州南路71号　邮政编码200235　www.sstp.cn)
苏州工业园区美柯乐制版印务有限责任公司印刷
开本787×1092　1/16　印张19.25
字数374千字
2020年8月第1版　2020年8月第1次印刷
ISBN 978-7-5478-4726-8/G·940
定价：49.00元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题，请向工厂联系调换

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前言

随着时代的不断发展，人们越来越能感受理性、能力、思维在解决问题与处理事务中的重要作用，高端人才的培养也更加需要理性思维、科学精神. 我国初中教育属于九年义务教育，致力于实现义务教育阶段的培养目标，要面向全体学生. 但对一部分希望进入较好的高中的初中学生来说，现有知识的学习是不够的，还需要进一步学习.

本书正是为了顺应这样的需求，对目前初中与高中数学学习进行一定的衔接，为初中部分学生提供更具针对性的学习内容. 本书编写的原则为：每一讲内容都能在初中数学学习的内容中找到“根”，在高中数学学习的内容中可找到发展与运用的“连接点”，以此凸显初高中数学学习的衔接. 因此，本书设计了数的运算、因式分解、分式与根式、方程与不等式、函数、概率与统计、三角形、四边形、圆、平面向量、综合问题等十八讲内容. 每一讲设置了以下几个栏目：知识概述、本质提炼、基本模型（含例题讲解）、变式练习、自我检测. “知识概述”侧重“根”与“连接点”间的内容衔接，注重知识呈现过程中的方法，注重知识的归纳与总结；“本质提炼”主要介绍概念的内涵，讲解其核心内容；“基本模型”和“变式练习”中的题目能体现高中自主招生考试的命题方向，这些题目以近几年上海各实验性、示范性高中自主招生试题为主，并结合了部分数学竞赛里的基础性问题，从例题讲解到变式练习，再到自我检测，逐步递进.

本书编写的人员有：王华、胡军、师前、李莹、陆斌、黄喆、尹充、余勇波，其中王华、胡军、师前三位老师都是数学特级教师、正高级教师。编写团队中的老师大多从事中学一线数学教学，并对初高中数学教学衔接与自主招生有一定的研究.

为师生提供适用而又有指导意义的辅导书，是我们一贯的心愿，也是当前教学的需要. 对于我们所做的努力和尝试，诚挚地期待广大读者给予批评和指正.

编者

2019 年 6 月

目录

第一讲 正整数的性质

在整个数学领域,数论有着很重要的地位,初中数学课本中所学习的关于数的规律,特别是正整数的性质,正是数论的一些基础知识.正整数的性质中的主要内容是整数的整除理论.通过对正整数的学习,能培养学生良好的思维品质,形成较严密的数学逻辑,在实践中学会思考,为初、高中学习打下良好的基础.

一、 素数、合数、分解素因数

【知识概述】

根据一个正整数因数的个数,可将正整数分为“素数”“合数”和“1”,其中“1”只有一个因数,因数只有 1 和本身两个因数的正整数称为素数,除 1 和本身外还有其他因数的正整数称为合数.

【本质提炼】

“算术基本定理”:任何一个大于 1 的整数都可以唯一分解成有限个素数的乘积.由此可见,人们常把对自然数的研究转化为对素数的研究.

【基本模型】

(1)计算一个正整数的因数的个数

求一个正整数的因数的个数,首先要将这个数分解素因数,再利用“算术基本定理”进行计算.

例1 求 360 的因数的个数.

分析 根据算术基本定理:任意一个大于 1 的整数都可以唯一分解成有限个素数的乘积,即 $P=P_1^{a_1}P_2^{a_2}\cdots P_k^{a_k}$,$P_i$ 为素数,a_i 为正整数,$i=1, 2, 3, \cdots, k$,该正整数的因

数的个数为 $(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\cdots\cdot(1+a_k)$(其证明略). 先将 360 分解素因数,然后代入公式即可.

解　将 360 分解素因数:$360=2^3\times3^2\times5$.

$(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=24$.

所以 360 的因数有 24 个.

例2　$\odot A$ 的半径为 72,$\odot B$ 的半径为 r(其中 $r<72$,且 r 是一个整数). $\odot B$ 保持内切于$\odot A$ 且沿着$\odot A$ 的圆周滚动一周,记$\odot B$ 开始滚动时的切点为 M,此时$\odot B$ 上与这点重合的点标记为 N. 若滚动结束时,点 M, N 仍重合,则 r 共有________个可能的值.

分析　因为$\odot B$ 滚动结束时点 M, N 仍重合,所以$\odot B$ 沿着$\odot A$ 的圆周滚动的圈数是整数.

解　转的圈数 $m=\dfrac{C}{c}=\dfrac{2\pi\cdot(72-r)}{2\pi\cdot r}=\dfrac{72-r}{r}=\dfrac{72}{r}-1\geqslant1$, 且 m 为整数.

则需求出 72 的正因数,根据求正因数的方法,72 的正因数共有 12 个. 但由于 $r=72$ 时, $\dfrac{72}{r}-1=0$ 不符合题意,则排除“72”.

所以 r 共有 11 个可能的值.

说明　在应用问题中,要学会将实际问题用数学的语言表述.

(2) 素数性质的应用

① 素数有无穷多个,最小的素数是 2, 2 也是唯一一个是偶数的素数;

② a, b 为整数,p 为素数,若 $p|ab$,则必有 $p|a$ 或 $p|b$.

例3　已知两素数 p, q 之和为 2 019,且 $p>q$,求 $(p-1)^{q-1}$ 的值.

分析　因为两正整数和是奇数,则必为一个奇数、一个偶数,而素数中是偶数的只有 2,且 $p>q$,因此易知 p, q 的值.

解　由分析知, $p=2\,017$, $q=2$, 所以 $(p-1)^{q-1}=2\,016$.

说明　奇偶分析是处理整数问题的重要策略之一,关于奇数与偶数之间的性质有:(1) 一个整数在与偶数进行加减运算时,该数奇偶性不变;一个整数在与奇数进行加减运算时,该数改变奇偶性;多个整数相加时,和的奇偶性由加数中奇数的个数决定,奇数的个数为奇数时,则和为奇数;奇数的个数为偶数时,则和为偶数;(2) 任何一个整数乘以偶数,积为偶数;奇数乘以奇数,积为奇数;多个整数相乘时,其中只要有一个是偶数,积为偶数.

例4　若三个素数的乘积恰好等于它们的和的 23 倍,则这三个素数为____________.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

分析　首先将文字语言转化为数学语言,假设三个素数为 P, Q, R,则 $P\times Q\times R=23(P+Q+R)$,由于 P, Q, R 和 23 都是素数,所以 $23|P$ 或 $23|Q$ 或 $23|R$,即 P, Q, R 中必有一个数为 23. 不妨设 $P=23$,则 $Q\times R=23+Q+R$. 由于 $Q\times R-Q-R+1=(Q-1)(R-1)=24$,进一步运用算术基本定理,将整数 24 分为有限对不同整数的乘积,从而得到关于整数 Q, R 的所有可能取值.

解　设三个素数为 P, Q, R. 由分析知,P, Q, R 中必有一个数为 23.

不妨设 $P=23$. 所以 $Q\times R=23+Q+R$,则 $Q\times R-Q-(R-1)=24$.

而 $(Q-1)(R-1)=24=1\times 24=2\times 12=3\times 8=4\times 6$.

因为 Q, R 为素数,则 $(Q-1)(R-1)=2\times 12=4\times 6$ 满足题意.

所以这三个素数为 23, 13, 3 或 23, 7, 5.

说明　本题的另一种解法是:在不妨设 $P=23$ 后,用含"R"的代数式表示"Q",得:$Q=1+\dfrac{24}{R-1}$. 由 R, Q 为整数可知"$R-1$"是 24 的因数,即 $R-1=1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$,再根据条件"$Q$, R 为素数"对 R 的取值进行筛选,从而得出最终答案.

【变式练习一】

1. 若 p 为素数,p^3+5 仍为素数,则 p^5+7 为(　　).

A. 素数　　B. 素数或合数

C. 合数　　D. 既不是素数,也不是合数

2. 求这样的三个不同的正整数,使它们两两互素,且任意两数之和能被第三个数整除.

二、整数与整除性

【知识概述】

设 a, b 是整数,且 $b\neq 0$,如果存在一个整数 q 使得等式 $a=bq$ 成立,那么称 a 能被 b

整除,或称 b 整除 a, 记作 $b \mid a$, 又称 b 为 a 的因数,而 a 称为 b 的倍数.

【本质提炼】

数的整除是初等数论的核心与基础,并且整除中有一系列性质,我们常需要运用整除的性质对数进行拆分与构造.

【基本模型】

(1) 整除性的常见特征

① 若整数 a 的个位数是偶数,则 $2|a$;

② 若整数 a 的个位数是 0 或 5,则 $5|a$;

③ 若整数 a 的各个位上的数字之和是 3(或 9)的倍数,则 $3|a$(或 $9|a$);

④ 若整数 a 的末两位数是 4(或 25)的倍数,则 $4|a$(或 $25|a$);

⑤ 若整数 a 的末三位数是 8(或 125)的倍数,则 $8|a$(或 $125|a$);

⑥ 若整数 a 的奇数位上的数字和与偶数位上的数字和的差是 11 的倍数,则 $11|a$.

例5　设 $72|\overline{a679b}$,试求 a, b 的值.

分析　由于 72 是 8 和 9 的倍数,所以可以分别从能被 8 整除的整数和能被 9 整除的整数特征入手分析.

解　由题意,得 $1 \leqslant a \leqslant 9$, $0 \leqslant b \leqslant 9$, 且 a, b 为整数.

因为 $72 = 8 \times 9$, 且 8, 9 互素,所以 $8|\overline{a679b}$ 且 $9|\overline{a679b}$.

因为 $8|\overline{a679b}$,所以 $8|\overline{79b}$,由除法可得 $b = 2$.

又因为 $9|\overline{a679b}$,所以 $9 \mid (a + 6 + 7 + 9 + 2)$, 得 $a = 3$.

综上可得, $a = 3$, $b = 2$.

(2) 整除的基本性质

设 a, b, c 都是整数, a, b 的最大公因数记作 (a, b), a, b 的最小公倍数记作 $[a, b]$. 则有以下性质:

① 若 $a \mid b$, 则 $a \leqslant b$;

② 若 $a \mid b$, $b \mid c$, 则 $a \mid c$;

③ 若 $c \mid a$, $c \mid b$, 则 $c \mid (a \pm b)$;

④ 若 $b \mid a$, $c \mid a$, 则 $[b, c] \mid a$;

⑤ 若 $b \mid a$，$c \mid a$，且 b 与 c 互素，则 $bc \mid a$；

⑥ 若 $a \mid bc$，且 a 与 c 互素，则 $a \mid b$.

例6　证明：整数 a 若不能被 2 和 3 整除，则 a^2+23 能被 24 整除.

分析　“a^2+23”与 24 看似没有关系，然而如果将 a^2+23 拆分为“$(a^2-1)+24$”则由于 24 能被 24 整除，继而只需证明 (a^2-1) 能被 24 整除即可. 其中由于 $24=3\times 8$，且 3，8 互素，从而转化为证明 (a^2-1) 分别能被 3，8 整除即可.

证明　因为 2 不能整除 a，所以 a 为奇数.

设 $a=2k+1$（k 为整数），则 $a^2-1=(2k+1)^2-1=4k^2+4k=4k(k+1)$.

因为 k，$k+1$ 为两个连续的整数，所以 $k(k+1)$ 必能被 2 整除.

所以 $8 \mid 4k(k+1)$，即 $8 \mid (a^2-1)$.

又因为 $(a-1)$，a，$(a+1)$ 为三个连续的整数，所以其积必被 3 整除，即 $3 \mid a(a-1)(a+1)=a(a^2-1)$.

因为 a 不能被 3 整除，所以 $3 \mid (a^2-1)$.

因为 3 与 8 互素，所以 $24 \mid (a^2-1)$.

又因为 $a^2+23=(a^2-1)+24$，所以 a^2+23 能被 24 整除.

说明　n 个连续自然数的乘积能被 $n!$ 整除（读者自行证明）. 注：$n!$ 是指自然数 n 的阶乘，即 $n!=1\times 2\times 3\times \cdots \times (n-2)\times (n-1)\times n$.

例7　一个老人有 n 匹马，他把马全部分给两个儿子，大儿子得 x 匹，小儿子得 y 匹 $(x>y\geqslant 1)$，并且 x 是 $n+1$ 的因数，y 也是 $n+1$ 的因数，则正整数 n 共有________种可能的取值.

分析　由题意，得 $\begin{cases} x+y=n, \\ x>y\geqslant 1, \\ x \mid n+1, \\ y \mid n+1. \end{cases}$ 则 $x \mid (x+y+1)$. 又因为 $x \mid x$，所以 $x \mid (y+1)$. 再根据整除的性质，得 $x\leqslant y+1$. 而 $x\geqslant y+1$，所以得 $x=y+1$.

解　因为 $\begin{cases} x+y=n, \\ x>y\geqslant 1, \\ x \mid n+1, \\ y \mid n+1, \end{cases}$ 所以 $x \mid (x+y+1)$. 又因为 $x \mid x$，所以 $x \mid (y+1)$.

同理 $y \mid (x+1)$.

因为 $x>y$，所以 $x\geqslant y+1$.

又因为 $x \mid (y+1)$，所以 $x\leqslant y+1$. 因此 $x=y+1$.

所以 $y \mid (y+1+1)$.

所以 $y \mid 2$. 因此 $y=1$ 或 $y=2$.

当 $y=1$ 时, $x=2$, $n=3$;

当 $y=2$ 时, $x=3$, $n=5$.

所以正整数 n 有 2 种可能的取值.

【变式练习二】

1. 若 n^3+100 能被 $n+10$ 整除,求正整数 n 的最大值.

2. (1)证明:对任何整数 n, $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$ 的结果均为整数;

(2)证明:对任何整数 n, $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$ 被 3 除时,余数为 2.

三、 完全平方数

【知识概述】

若一个数能表示成某个整数的平方的形式,则称这个数为完全平方数,也叫做平方数. 完全平方数有以下性质:

① 完全平方数的个位数字只能是 0，1，4，5，6，9；

② 偶数的平方是 4 的倍数,奇数的平方被 8 除余数为 1,任何完全平方数被 4 除余数是 0 或 1；

③ 完全平方数的因数的个数为奇数；

④ 任何四个连续的整数的乘积加 1,必定是一个完全平方数；

⑤ 若 n 是整数,则在 n^2 与 $(n+1)^2$ 之间没有其他完全平方数；

⑥ 若 p 为素数，x 为完全平方数,且 $p \mid x$，则 $p^2 \mid x$.

【本质提炼】

对于完全平方数,可以直接运用其形式,用待定系数法将某完全平方数设为 k^2(k 为正整数)进行推理、计算.

【基本模型】

完全平方数性质的应用

例8　求出所有有序整数对 (m, n)，其中 $1 \leqslant m \leqslant 99$，$1 \leqslant n \leqslant 99$，使得 $(m+n)^2+3m+n$ 是完全平方数.

分析　因为 a^2 与 $(a+2)^2$(a 为整数)之间只有一个完全平方数：$(a+1)^2$. 对于本例,显然 $(m+n)^2<(m+n)^2+3m+n$，那不等式 $(m+n)^2+3m+n<(m+n+2)^2$ 是否成立？如果成立,则可判断 $(m+n)^2+3m+n=(m+n+1)^2$.

解　由 $1 \leqslant m \leqslant 99$，$1 \leqslant n \leqslant 99$，

可得 $(m+n)^2+3m+n<(m+n)^2+4(m+n)+4=(m+n+2)^2$.

所以 $(m+n)^2<(m+n)^2+3m+n<(m+n+2)^2$.

若 $(m+n)^2+3m+n$ 是完全平方数,则必有 $(m+n)^2+3m+n=(m+n+1)^2$，即 $m=n+1$.

所以所求整数对 (m, n) 有 98 对,分别为 $(2, 1)$,$(3, 2)$，$(4, 3)$，…，$(99, 98)$.

说明　若 n，k 是整数,则在 n^2 与 $(n+k)^2$ 之间有 $|k|-1$ 个完全平方数.

例9　一个自然数减去 45 或加上 44 结果都是完全平方数,求这个自然数.

分析　因为一个自然数减去 45 或加上 44 结果都是完全平方数,可用待定系数法将这两个完全平方数分别设为 m^2，n^2,并列出方程进行推理、运算.

解　设此自然数为 x. 依题意,得 $\begin{cases} x-45=m^2 ①, \\ x+44=n^2 ②, \end{cases}$ 其中 m, n 为自然数.

②－①得, $n^2-m^2=89$, 则 $(n-m)(n+m)=89$, 且 $n>m$.

由于 89 为素数,其正因数只能是 1 和 89,则 $\begin{cases} n-m=1, \\ n+m=89. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} n=45, \\ m=44. \end{cases}$ 代入①,得 $x=1\,981$.

故所求的自然数是 1 981.

说明　根据完全平方数的概念设参数,可以把完全平方数的问题转化为求不定方程整数解的问题.

【变式练习三】

1. 若 m, n 都是整数,试判断关于 x 的一元二次方程 $x^2+10mx-5n+3=0$ 有没有整数解.

自我检测（一）

1. 如果三个不同的素数 a，b，c 满足 $ab^bc+a=2\,000$，那么 $a+b+c=$________.

2. 在 1，2，3，…，2 000 这 2 000 个自然数中，有________个自然数能同时被 2 和 3 整除，但不能被 5 整除.

3. 盒中原有 7 个小球，一位魔术师从中任取几个小球，把每一个小球都变成了 7 个小球，将其放回盒中，他又从盒中任取一些小球，把每一个小球又都变成了 7 个小球后放回盒中，如此进行，到某一时刻魔术师停止取球变魔术时，盒中球的总数可能是(　　).

A. 1 990 个　　B. 1 991 个　　C. 1 992 个　　D. 1 993 个

4. 若 1 059，1 417，2 312 分别被自然数 x 除时，所得的余数都是 y，则 $x-y$ 的值等于(　　).

A. 15　　B. 1　　C. 164　　D. 174

5. 已知七位数 $\overline{62xy427}$ 是 99 的倍数，求代数式 $950x+24y+1$ 的值.

6. 现有 A，B，C，D，E 五盏灯，开始时，五盏灯都是开的，一个人顺次按动这五盏灯的开关，即先从 A 到 E 按动开关，再从 E 到 A 按动开关，按此方式进行，那么他按动 2 003 次后还有________灯是开的(填灯的序号).

7. 三个连续的奇数的乘积是一个六位数，这个积的首位数字是 7，而个位数字不是 5，那么这三个连续的奇数之和为________.

8. 求证：四个连续的正整数之积与 1 的和必为完全平方数.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com