

S H U X U E J I A M M O A N L I



普通高等教育“十三五”规划教材

# 数学建模案例

(第2版)

韩明 张积林 李林 编著  
林杰 林江宏

 同济大学出版社  
TONGJI UNIVERSITY PRESS

## 内 容 提 要

本书精选反映当代科技进步和社会发展的 24 个问题作为案例,以“问题驱动”的形式,详细讲解建立数学模型的思路、方法和步骤,并给出问题的解决方案.在所选的案例中,有的是“中国大学生数学建模竞赛”“美国大学生数学建模竞赛”的赛题,也有的是根据竞赛题改编的,还有一些其他赛题,涉及的数学方法主要有微分、积分、代数、统计、概率、最优化、微分方程、分形几何、拟合、插值、灰色理论、图论及现代优化算法等.另外,还有一些物理方法.为便于读者学习和训练,本书针对不同案例数学建模所需的数学理论和方法,有侧重地分别介绍相关的数学知识.除个别计算比较简单的案例外,都在案例解答中给出了计算程序.

本书案例特色鲜明、涉及范围广,内容讲解紧凑、明了,对读者掌握分析实际问题建立数学模型大有帮助,可作为高等院校各专业本、专科“数学建模”课程的教材,也可以作为数学建模竞赛培训以及研究生“数学建模”课程的参考书,还可以供有关教师和科技人员参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

数学建模案例 / 韩明等编著. -- 2 版. -- 上海:  
同济大学出版社, 2020. 5  
ISBN 978-7-5608-9219-1

I. ①数… II. ①韩… III. ①数学模型—案例 IV.  
①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 053349 号

---

普通高等教育“十三五”规划教材

## 数学建模案例(第 2 版)

韩 明 张积林 李 林 林 杰 林江宏 编著

责任编辑 陈佳蔚 责任校对 徐逢乔 封面设计 潘向葵

---

出版发行 同济大学出版社 [www.tongjipress.com.cn](http://www.tongjipress.com.cn)  
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)  
经 销 全国各地新华书店  
印 刷 常熟市大宏印刷有限公司  
开 本 710 mm×960 mm 1/16  
印 张 19  
字 数 380 000  
印 数 1—2 100  
版 次 2020 年 5 月第 2 版 2020 年 5 月第 1 次印刷  
书 号 ISBN 978-7-5608-9219-1

---

定 价 49.00 元

---

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

# 前 言

本书的第1版(2012年6月)出版后,深受广大师生的关心和厚爱,在此作者表示衷心感谢.

1992年,美国工业与应用数学学会的一篇论文指出:“一切科学与工程技术人员的教育必须包括愈来愈多的数学和计算机科学的内容.数学建模和相关的计算正在成为工程设计中的关键工具.”美国科学、工程和公共事业政策委员会在一份报告中指出:“今天,在科学技术中最为有用的领域就是数值分析与数学建模.”

20世纪80年代初,数学建模开始进入我国大学课堂,成为一门新的数学课程.全国大学生数学建模竞赛创办于1992年,每年一届.近二三十年来数学建模教学和数学建模竞赛活动相互促进,健康发展.2019年,来自中国、美国和马来西亚的1490所院校/校区42992队(本科39293队、专科3699队)、近13万人报名参赛.

21世纪对各类专业技术人才的数学素质和能力的要求越来越高,我们培养的人才应具有对专业背景的实际问题建立数学模型的能力,这样才能在实际工作中发挥更大的创造性.著名数学家、中国科学院院士李大潜教授曾经说过:“数学教育本质上就是一种素质教育,数学建模的教学及竞赛是实施素质教育的有效途径.”因此,将数学建模活动和数学教学有机地结合起来,能够在教学实践中更好地体现和完成素质教育.

数学建模究竟是一门什么样的学问?它为什么在20世纪后半叶引起人们的普遍关注?数学建模教学和数学建模竞赛为什么能得到教育主管部门的高度重视,受到广大学生、教师的热烈欢迎?数学建模在人才培养和教育教学改革中起到哪些促进作用?姜启源、谢金星在《一项成功的高等教育改革实践——数学建模教学与竞赛活动的探索与实践》(《中国高教研究》,2011年第12期)中回答了这些问题.

国家教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会在《本科数学基础课程教学基本要求(2014年版)》中指出:“各高校应根据自身的实际情况,努力创造条件,开设与理论教学相配套的数学建模与数学实验课程,培养学生的数学建模能力,突出建模、实验方法的创新能力培养.”

本书的第1版出版后,我们经过了八年来的教学实践,又积累了一些经验,并收集了广大师生的意见和建议,本次修订就是在这些基础上进行的.本次修订计划由韩明提出,并经过作者们讨论后确定.在本次修订中,修改了第1版中的不妥和错误,并改写了少部分内容,增加了三个案例:探险家穿越荒漠(第6章,韩明提供),挑战者号

航天飞机 O 形环损坏问题(第 7 章,韩明提供),海豚集团捕食的运动规律问题(第 25 章,林杰提供).本次修订由韩明统稿、定稿.

考虑 MATLAB 在数学建模中应用的广泛性,本书中大部分案例的代码都是用 MATLAB 写的(只有少数几个案例中的代码是用 R 软件、LINGO 或 VC++写的),在本书附录中有“MATLAB 的基本操作”.

虽然我们努力将本书写成一本既有特色又便于教学(或自学)的教材或参考书,但由于作者水平所限,书中难免还有一些疏漏甚至错误,恳请专家和读者批评指正.

韩 明

2020 年 4 月

# 目 录

## 前 言

<b>1 绪论</b> .....	( 1 )
1.1 数学模型与数学建模 .....	( 2 )
1.2 数学建模的基本方法和步骤 .....	( 3 )
1.2.1 数学建模的基本方法 .....	( 3 )
1.2.2 数学建模的一般步骤 .....	( 4 )
1.3 数学建模竞赛 .....	( 5 )
1.3.1 中国大学生数学建模竞赛 .....	( 6 )
1.3.2 美国大学生数学建模竞赛 .....	( 8 )
1.4 关于本书的内容安排 .....	( 11 )
<b>2 航空公司的机票预订策略</b> .....	( 12 )
2.1 问题的提出 .....	( 12 )
2.2 问题的分析 .....	( 12 )
2.3 模型假设 .....	( 12 )
2.4 模型的建立 .....	( 13 )
2.5 模型求解 .....	( 13 )
2.6 结果分析 .....	( 18 )
<b>3 原子弹爆炸的能量估计</b> .....	( 19 )
3.1 问题的提出 .....	( 19 )
3.2 建立数学模型 .....	( 19 )
3.3 模型求解 .....	( 21 )
3.4 有关 MATLAB 程序 .....	( 23 )
<b>4 分形中的 Koch 雪花问题</b> .....	( 25 )
4.1 问题的提出 .....	( 25 )
4.2 问题的分析 .....	( 25 )
4.3 模型的建立 .....	( 26 )
4.4 模型求解 .....	( 27 )
4.5 有关 MATLAB 程序 .....	( 28 )
4.5.1 分形中的 Koch 曲线 .....	( 28 )

4.5.2	分形中的 Koch 雪花	( 29 )
<b>5</b>	<b>蠓虫分类</b>	( 30 )
5.1	问题的提出	( 30 )
5.2	问题的分析与模型的建立	( 30 )
5.3	模型求解	( 32 )
<b>6</b>	<b>探险家穿越荒漠</b>	( 35 )
6.1	问题的提出	( 35 )
6.2	模型假设	( 35 )
6.3	问题(1)分析与建模	( 35 )
6.4	问题(1)求解	( 36 )
6.5	问题(2)分析与建模	( 37 )
6.6	问题(2)求解	( 38 )
<b>7</b>	<b>挑战者号航天飞机 O 形环损坏问题</b>	( 40 )
7.1	问题的提出	( 40 )
7.2	Logistic 回归模型	( 40 )
7.2.1	建立 Logistic 回归模型	( 41 )
7.2.2	在温度为 31°F 和 53°F 时,预测 O 形环损坏的概率	( 42 )
7.2.3	要保证 O 形环损坏的概率小于 0.05,温度需要满足的条件	( 42 )
7.3	对数线性模型	( 42 )
7.3.1	建立对数线性模型	( 42 )
7.3.2	在温度为 31°F 和 53°F 时,预测 O 形环损坏的数量	( 43 )
7.3.3	要使 O 形环损坏的数量小于 1,温度需要满足的条件	( 43 )
7.4	延伸阅读	( 44 )
<b>8</b>	<b>街头骗局揭秘</b>	( 46 )
8.1	问题的提出	( 46 )
8.2	理论求解	( 46 )
8.3	蒙特卡洛方法求解	( 47 )
8.4	MATLAB 程序	( 47 )
<b>9</b>	<b>血管的三维重建</b>	( 51 )
9.1	问题的提出	( 51 )
9.2	问题的分析	( 52 )
9.3	模型求解	( 52 )
9.3.1	边界的三维重构	( 52 )
9.3.2	搜索最大内切圆优化算法	( 53 )

9.3.3	B样条曲线逼近	(56)
9.4	模型的评价	(56)
9.5	MATLAB程序	(57)
<b>10</b>	<b>公路客运货运量的预测</b>	<b>(59)</b>
10.1	问题的提出	(59)
10.2	BP神经网络概述	(60)
10.3	MATLAB神经网络工具箱函数	(62)
10.3.1	newff:BP神经网络参数设置函数	(62)
10.3.2	train:BP神经网络训练函数	(62)
10.3.3	sim:BP神经网络预测函数	(63)
10.4	求解思路	(63)
10.5	MATLAB程序	(64)
<b>11</b>	<b>旅行商问题</b>	<b>(67)</b>
11.1	问题的提出	(67)
11.2	混合粒子群算法概述	(68)
11.3	求解思路	(69)
11.3.1	个体编码	(69)
11.3.2	适应度值	(69)
11.3.3	交叉操作	(69)
11.3.4	变异操作	(70)
11.4	MATLAB程序	(70)
11.4.1	粒子初始化	(70)
11.4.2	计算个体适应度	(71)
11.4.3	寻找最优路径	(72)
11.4.4	结果分析	(75)
<b>12</b>	<b>汽车刹车距离</b>	<b>(78)</b>
12.1	问题的提出	(78)
12.2	问题的分析	(78)
12.3	模型的建立	(80)
12.4	模型检验	(81)
12.5	模型应用	(84)
<b>13</b>	<b>对长江水质污染的预测</b>	<b>(86)</b>
13.1	问题的提出	(86)
13.2	问题的分析	(86)
13.3	数学模型——GM(1,1)模型的建立和计算	(87)

13.3.1	作累加生成数列	(87)
13.3.2	对 $X^{(0)}$ 进行准光滑性检验	(88)
13.3.3	检验 $X^{(1)}$ 是否具有准指数规律	(88)
13.3.4	确定数据矩阵	(88)
13.3.5	参数的最小二乘估计	(88)
13.3.6	确定微分方程模型	(88)
13.3.7	求 $X^{(1)}$ 的模拟值并累减还原求出 $X^{(0)}$ 的模拟值	(89)
13.3.8	检验误差	(90)
13.4	模型的改进	(92)
13.4.1	模型的改进一——建立 GM(1, 1) 模型群	(92)
13.4.2	模型的改进二——等维灰数递补动态预测	(94)
13.5	本章小结	(95)
<b>14</b>	<b>北京地铁暗挖施工技术的评估分析</b>	(96)
14.1	问题的提出	(96)
14.2	灰色聚类评估法概述	(96)
14.3	数学模型的建立——灰色聚类评估	(97)
14.3.1	评价指标体系的建立	(97)
14.3.2	指标权重的确定	(97)
14.3.3	灰色评估	(98)
14.4	在建地铁工程某标段暗挖施工技术评估分析	(98)
14.4.1	指标体系的建立	(98)
14.4.2	指标权重的确定	(100)
14.4.3	灰色聚类评估分析	(101)
14.5	本章小结	(104)
<b>15</b>	<b>水塔流量估计</b>	(105)
15.1	问题的提出	(105)
15.2	问题的分析	(105)
15.3	模型假设	(106)
15.4	符号说明	(107)
15.5	模型建立和算法设计	(107)
15.6	模型求解	(108)
15.7	模型检验	(115)
<b>16</b>	<b>投资的收益和风险问题</b>	(117)
16.1	问题的提出	(117)
16.2	模型的建立	(118)

16.3	模型一的启发式解法	(119)
16.4	模型的求解	(122)
16.5	结果分析	(128)
<b>17</b>	<b>饮酒驾车</b>	(129)
17.1	问题的提出	(129)
17.2	问题的分析	(130)
17.3	符号说明	(131)
17.4	模型假设	(131)
17.5	问题 1 模型的建立与求解	(131)
17.5.1	数据拟合与拟合误差	(132)
17.5.2	模型的应用——问题 1 中(1)的应用	(134)
17.5.3	模型的应用——问题 1 中(2)的应用	(134)
17.6	问题 2 模型的建立与求解	(136)
17.6.1	酒是在短时间内喝的	(136)
17.6.2	酒是在较长一段时间(比如 2 h)内喝的	(137)
17.7	问题 3 模型的建立与求解	(139)
17.7.1	酒是在短时间内喝的	(139)
17.7.2	酒是在较长一段时间(比如 2 h)内喝的	(139)
17.8	问题 4 模型的建立与求解	(140)
17.9	模型的评价与推广	(142)
<b>18</b>	<b>飞机巡航问题</b>	(143)
18.1	问题的提出	(143)
18.2	问题的分析与建模	(144)
18.3	模型求解——模拟退火算法	(144)
18.3.1	模拟退火算法的描述	(144)
18.3.2	模拟退火算法的 MATLAB 程序及结论	(145)
18.4	模型求解——遗传算法	(148)
18.4.1	遗传算法概述	(148)
18.4.2	遗传算法的描述	(148)
18.4.3	遗传算法的 MATLAB 程序及结论	(150)
<b>19</b>	<b>我国各地区普通高等教育发展状况</b>	(153)
19.1	问题的提出	(153)
19.2	问题(1)的建模	(155)
19.2.1	R 型聚类分析的建模	(155)
19.2.2	Q 型聚类分析的建模	(156)

19.3	问题(1)的求解	(157)
19.3.1	R型聚类分析的求解	(157)
19.3.2	Q型聚类分析的求解	(159)
19.4	问题(1)的研究结果	(161)
19.4.1	分类的结果	(161)
19.4.2	各类地区普通高等教育发展状况的差异与特点	(161)
19.5	问题(2)的建模	(162)
19.5.1	计算特征值和特征向量	(162)
19.5.2	选择主成分与计算综合评价	(162)
19.6	问题(2)的求解	(163)
19.6.1	相关系数矩阵	(163)
19.6.2	前几个特征根及其贡献率	(163)
19.6.3	前四个特征根对应的特征向量	(164)
19.6.4	构建主成分综合评价模型	(164)
19.7	问题(2)的研究结果	(166)
<b>20</b>	<b>白血病临床治疗问题</b>	(167)
20.1	问题的提出	(167)
20.2	问题的分析	(167)
20.3	对完全数据拟合分布	(168)
20.4	拟合优度检验	(172)
20.5	数据有删失时拟合分布的方法	(173)
20.6	数据有删失时的极大似然估计	(175)
20.7	一种具有普遍性的参数假设检验方法	(175)
20.8	置信区间	(177)
20.9	结束语	(178)
<b>21</b>	<b>电力市场的输电阻塞管理</b>	(179)
21.1	问题的提出	(179)
21.2	模型假设	(184)
21.3	问题分析	(184)
21.4	符号说明	(184)
21.5	模型的建立与求解	(185)
21.5.1	问题(1)模型的建立与求解	(185)
21.5.2	问题(2)模型的建立与求解	(190)
21.5.3	问题(3)模型的建立与求解	(190)
21.5.4	问题(4)模型的建立与求解	(191)
21.5.5	问题(5)模型的建立与求解	(194)

21.6	模型的评价与推广	(195)
21.6.1	模型的评价	(195)
21.6.2	模型的推广	(195)
21.7	有关计算程序	(195)
<b>22</b>	<b>中国高等教育收费问题</b>	<b>(202)</b>
22.1	问题的提出	(202)
22.2	问题的分析	(202)
22.3	数据处理及分析	(203)
22.4	模型建立与求解	(204)
22.4.1	模型假设	(204)
22.4.2	模型的建立和筛选	(205)
22.5	构建评价学费合理性指标	(208)
22.6	模型的分析与检验	(209)
22.7	模型的评价与推广	(210)
22.7.1	模型优点	(210)
22.7.2	模型缺点	(211)
22.7.3	模型的推广	(211)
22.8	MATLAB 程序	(212)
<b>23</b>	<b>中国钢材消费总量预测问题</b>	<b>(214)</b>
23.1	问题的提出	(214)
23.2	模型假设及数据来源分析	(215)
23.2.1	模型假设	(215)
23.2.2	数据来源及处理	(216)
23.3	模型建立	(216)
23.3.1	钢材消费预测模型的建立	(216)
23.3.2	模型参数估计及其统计检验	(217)
23.3.3	模型验证	(218)
23.4	多因素钢材消费预测模型	(218)
23.4.1	以三次产业作为解释变量建立计量模型	(218)
23.4.2	基于支出法计算的 GDP 组成部分建立钢材消费预测模型	(220)
23.5	预测模型拟合效果比较	(221)
23.6	我国钢材消费量组合预测	(222)
23.7	MATLAB 程序	(222)
<b>24</b>	<b>交巡警服务平台的设置与调度</b>	<b>(227)</b>
24.1	问题的提出	(227)

24.2	模型假设	(228)
24.3	符号说明	(228)
24.4	问题(1)模型的建立与求解	(228)
24.4.1	问题(1)的第一问	(228)
24.4.2	问题(1)的第二问	(231)
24.4.3	问题(1)的第三问	(232)
24.5	问题(2)模型的建立与求解	(233)
24.5.1	问题(2)的第一问	(234)
24.5.2	问题(2)的第二问	(237)
24.6	模型评价	(240)
24.7	有关计算程序	(240)
<b>25</b>	<b>海豚集团捕食的运动规律问题</b>	<b>(247)</b>
25.1	问题的提出	(247)
25.2	问题的分析	(247)
25.3	模型假设	(248)
25.4	分析单只海豚的特征	(248)
25.5	模拟单只海豚捕食沙丁鱼运动规律	(249)
25.5.1	模型的建立	(249)
25.5.2	模型的求解	(251)
25.5.3	优点分析	(252)
25.6	模拟海豚集群在无沙丁鱼时的运动情况	(253)
25.6.1	模型的建立	(253)
25.6.2	模型的求解	(253)
25.6.3	模型的优点	(255)
25.7	模拟多只海豚合作捕食沙丁鱼群的运动规律	(255)
25.7.1	海豚集群捕食沙丁鱼模型的建立	(255)
25.7.2	模型的求解	(258)
25.8	模型的优缺点	(260)
25.8.1	模型的优点	(260)
25.8.2	模型的缺点	(260)
25.9	MATLAB 程序	(261)
	<b>附录</b>	<b>(269)</b>
	附录 A MATLAB 的基本操作	(269)
	附录 B 全国大学生数学建模竞赛章程(2019 年修订稿)	(281)
	附录 C 赛区评阅工作规范(2019 年修订稿)	(283)
	附录 D 全国大学生数学建模竞赛参赛规则(2019 年修订稿)	(287)
	<b>参考文献</b>	<b>(289)</b>

# 1 绪 论

数学的应用向所有的领域渗透,或者说各行各业日益依赖于数学,甚至可以说当今的社会正在日益数学化.随着科学技术的进步,新的分支(交叉)学科不断出现,特别是与数学相结合而产生的新学科,如数学化学、数学地质学、数学心理学、金融数学、数理语言学等.至于高科技与数学的关系就更加密切以至融为一体,一位有远见的科学家 David Jr 就曾深刻地指出:“太少的人认识到当今如此受到称颂的高科技,本质上是一种数学技术.”David Jr 还中肯地指出:“数学的重要性是不言自明的,何况许多对此看法游移不定的人并没有认真地思考过(数学的重要性问题).”他还告诫数学界要作出更多的主动努力使人们更加了解数学.我国著名的科学家钱学森教授也多次强调数学的重要性,并论述了他对“数学技术”的理解.

我们看到一种矛盾现象,一方面很容易“论证”数学的重要性,因为从小学一年级到大学一、二年级(甚至是高年级、研究生阶段),每学期都要学习数学而且都是必修课,而任何其他学科都没有持续这么长的学习时间,因而“数学最重要”不是很自然的吗?我们还可以举出很多例子(从日常生活到尖端技术)说明数学是必不可少的.但是另一方面,我们常常会发现有些人不会反对你讲的例子,他们中许多人还是认为数学没有多大用处甚至干脆说数学没有用.这不仅仅是由于数学的语言比较抽象不容易掌握,还有数学教育中的问题以及其他原因等.我们应该对数学教育进行反思,特别是计算机普及的今天,大学数学教育应该如何进行改革呢?

1989年,著名的科学家钱学森教授在“中国数学会教育与科研座谈会”上提出:“电子计算机的出现对数学科学的发展产生了深刻的影响,大学理工科的数学课程是不是需要改革一番?”

1992年,美国工业与应用数学学会的一篇文章就指出:“一切科学与工程技术人员的教育必须包括愈来愈多的数学和计算机科学的内容.数学建模和相伴的计算正在成为工程设计中的关键工具.”美国科学、工程和公共事业政策委员会在一份报告中指出:“今天,在科学技术中最为有用的领域就是数值分析与数学建模.”

据《科学时报》2011年9月23日报道,全国大学生数学建模竞赛组委会主任、中国科学院院士、复旦大学教授李大潜在“2011高教社杯全国大学生数学建模竞赛”新闻发布会上说:“开设数学建模和数学实验课程,举办数学建模竞赛,为数学与外部世界的联系打开了一个通道,提高了学生学习数学的积极性和主动性,是对数学教学体系和内容改革的一个成功的尝试.”

20世纪80年代初,数学建模开始进入我国大学课堂,成为一门新的数学课程.1992年全国大学生数学建模竞赛开始举办,每年一届.二三十年来数学建模教学和数学建模竞赛活动相互促进,健康发展.2011年恰逢全国大学生数学建模竞赛举办20周年,参赛规模已达1251所院校的19490队.竞赛虽然发展得如此迅速,但是参加者毕竟还是很少一部分学生,要使数学建模具有强大的生命力,必须与日常的教学活动和教育改革相结合.20年来在竞赛的推动下,许多高校相继开设了数学建模课程,目前开设各种类型数学建模课程的学校已超过千所.在我国乃至世界范围内,尚没有哪一门数学课程、哪一项学科竞赛能取得如此迅猛的发展.中国高等教育学会会长周远清教授曾用“成功的高等教育教学改革实践”给予评价.

数学模型究竟是一门什么样的学问?它为什么在20世纪后半叶引起人们的普遍关注?数学建模教学和数学建模竞赛为什么能得到国家教育主管部门的高度重视,受到广大学生、教师的热烈欢迎?数学建模在人才培养和教育教学改革中起到哪些促进作用?姜启源,谢金星在《一项成功的高等教育改革实践——数学建模教学与竞赛活动的探索与实践》(《中国高教研究》,2011年第12期)中回答了这些问题.当然,这些问题也是我们所关心的.

## 1.1 数学模型与数学建模

随着科学技术的迅速发展,数学模型(Mathematical Model)、数学建模(Mathematical Modelling)这两个词出现的频率越来越高,它们正在成为人们日常生活和语言交流中常见的术语.那么什么是数学模型呢?什么又是数学建模呢?

叶其孝教授在《大学生数学建模竞赛辅导教材》中指出:要用数学去解决实际问题就一定要用数学的语言、方法去刻画该问题,而这种刻画的数学表述就是一个数学模型.他还指出:所谓数学建模,可以说它是一种数学思考方法,是“对现实的现象通过智力活动构造出能抓住其重要性且有用的特征的数学表示”.从科学技术、工程、经济、管理等角度看数学建模,就是用数学的语言和方法,通过抽象、简化建立能近似刻画并解决实际问题的一种有力的数学工具.

简单地说,数学模型就是对实际问题的一种数学表述.具体地说,数学模型是关于部分现实世界为某种目的的一个抽象的、简化的数学结构.更确切地说,数学模型就是对于一个特定的对象为了一个特定目标,根据特有的内在规律,作出一些必要的简化假设,运用适当的数学工具,得到的一个数学结构.数学结构可以是数学公式、算法、表格或图示等.数学建模就是建立数学模型,建立数学模型的过程就是数学建模的过程.

数学建模是沟通现实世界和数学科学之间的桥梁,是数学走向应用的必经之路.众所周知,具有悠久历史的数学是各门自然科学、工程技术乃至社会科学的基础,是科技进步、经济建设和社会发展的的重要工具.数学的应用十分广泛,数学的重要性得

到人们的广泛公认.但是,作为一门基础的自然科学和一种精确的科学语言,数学又是以极为抽象的形式出现的.如果人为地割断数学与现实世界的密切联系,这种抽象的形式就会掩盖数学的丰富内涵,并对数学的实际应用形成巨大障碍.数学建模可以说是解决这个问题的一把钥匙.

用数学方法解决一个实际问题,不论这个问题是来自工程建设、经济管理、生物、医学、地质、气象领域,还是社会、经济乃至人们的日常生活当中,都必须在实际问题与数学之间架设一座桥梁.首先把这个实际问题转化为一个相应的数学问题,然后对这个数学问题进行分析和计算,最后将所求得的答案回归实际,检验能否有效地回答原先的实际问题.如果最后得到的结果在定性或者定量方面与实际情况有很大的差距,那就要修正所建立的数学模型,直到取得比较满意的结果为止.这个全过程,特别是其中的第一步,就称为“数学建模”,即为所考察的实际问题建立数学模型.

谈到数学模型的建立或者数学建模,似乎是一个新东西、新名词,其实它与数学有同样悠久的历史.公元前3世纪,欧几里德在总结前人研究结果的基础上,建立的欧几里德几何,就是针对现实世界的空间形式提出的一个数学模型.开普勒根据大量的天文观测数据总结出的行星运动的三大定律,后经牛顿利用万有引力定律从力学原理出发给出了严格的证明,更是一个数学建模取得光辉成就的例子.近代,出现在流体力学、电动力学、量子力学中的一些方程,也都是抓住了该学科本质的数学建模的成功范例,它们已经成为相关学科的核心内容和基本框架.

## 1.2 数学建模的基本方法和步骤

数学建模面临的问题多种多样,建模的目的不同、分析的方法不同、采用的数学工具不同,所得到的模型的类型也不同.下面所谓的基本方法不是针对具体问题而是从方法论意义上讲的.

### 1.2.1 数学建模的基本方法

数学建模的基本方法可以分为两大类:一是机理分析法;二是测试分析法.机理分析是根据客观事物的特性,找出反映内部机理的数量关系,建立的模型常有明确的物理意义.测试分析是将研究对象看作一个“黑箱”系统(意思是它的内部机理看不清楚),通过对系统输入、输出数据的测量和统计分析,按照一定的准则找出与数据拟合得最好的模型.

面对一个实际问题用哪一种建模方法,主要取决于人们对研究对象的了解程度和建模目的.如果掌握了一些内部机理的知识,模型也要求具有反映内在特征的物理意义,建模就应以机理分析法为主.而如果对象的内部规律基本上不清楚,模型也不需要反映内部特性(例如仅用于对输出作出预报),那么就可以用测试分析法.

对于许多实际问题还经常将这两种方法结合起来使用,即用机理分析法建立模型的结构,用测试分析法确定模型的参数.

### 1.2.2 数学建模的一般步骤

数学建模要经过哪些步骤并没有一定的模式,通常与问题的性质、建模目的等有关[姜启源,谢金星,叶俊(2018)].以下介绍三种具有代表性的数学建模步骤.

#### 1. 第一种数学建模步骤

(1) 模型准备. 要了解问题的实际背景,明确建模目的,搜集必要的各种信息,如现象、数据等. 尽量弄清楚研究对象的主要特征,做好建模的准备.

(2) 模型假设. 根据对象的特征和建模目的,抓住问题的本质,忽略次要因素,作出必要的、合理的简化假设. 假设做得不合理或太简单,会导致错误的或无用的模型;假设做得过分详细,试图把复杂对象的众多因素都考虑进去,会使你很难或无法继续下一步的工作. 常需要在合理与简化之间作出恰当的折衷. 通常,做假设的依据,一是出于对问题内在规律的认识,二是来自对对象、数据的分析以及二者的综合. 想象力、洞察力、判断力以及经验,在模型假设中起着重要作用.

(3) 模型构成. 根据所作的假设分析对象的因果关系,利用对象的内在规律和适当的数学工具,构造各个量(常量和变量)之间的等式(不等式)关系或其他数学结构. 这里除了需要一些相关学科的专门知识外,还常常需要较为丰富的应用数学方面的知识. 要善于发挥想象力,注意使用类比法,分析对象与熟悉的其他对象的共性,借用已有模型. 建模时还应该遵循的一个原则:尽量采用简单的数学工具,因为你的模型总是希望更多的人了解和使用,而不是只供少数专家欣赏.

(4) 模型求解. 可以采用解方程、画图形、优化方法、数值计算、统计分析等各种数学方法,特别是数学软件和计算机技术.

(5) 模型分析. 对求解结果进行数学上的分析,如结果的误差分析、统计分析、模型对数据的灵敏性(sensitivity)分析、对假设的强健性(robust)分析等.

(6) 模型检验. 把求解和分析结果翻译回到实际问题,与实际的现象、数据比较,检验模型的合理性和适用性. 如果结果与实际不符,问题常常出现在模型假设上,应该修改、补充假设,重建模型. 这一步对于模型是否真的有用非常关键,要以严肃认真的态度对待. 有些模型要经过几次反复修改,不断完善,直到检验结果获得某种程度上的满意.

(7) 模型应用. 应用的方式一般取决于实际问题的性质和建模的目的.

#### 2. 第二种数学建模步骤

Meerschaert(1999)把数学建模的过程归结为五个步骤,称为“五步方法”,并且贯穿全书各类问题的分析和讨论. 它们是:

- (1) 提出问题;
- (2) 选择建模方法;

- (3) 推导模型的数学表达式；
- (4) 求解模型；
- (5) 回答问题.

以上五个步骤的具体内容, 详见 Meerschaert(1999)的书.

### 3. 第三种数学建模步骤

Giordano 等人(2003)把数学建模的过程归结为六个步骤, 它们是:

- (1) 识别问题；
- (2) 做出假设；
- (3) 求解或解释模型；
- (4) 验证模型；
- (5) 实施模型；
- (6) 维修模型.

以上六个步骤的具体内容, 详见 Giordano 等人(2003)的书.<sup>①</sup>

从以上介绍的三种不同的数学建模步骤看, 并不是所有问题的建模都要经过以上这些步骤, 有时各步骤之间的界限也不那么分明, 建模时不要拘泥于形式上的按部就班. 本书在后面的数学建模案例中就采用了灵活的表述形式.

## 1.3 数学建模竞赛

20 世纪 80 年代初, 为适应科技发展及高等教育教学改革的需要, 数学建模开始进入我国部分大学的课堂教学. 1990 年, 上海市率先举办了大学生数学建模竞赛, 揭开了全国数学建模竞赛的序幕. 在教育部和各级行政部门的支持下, 众多高校踊跃参与. 参赛院校数和组队参赛数每年分别以 16% 和 24% 的速度增长. 目前, 全国大学生数学建模竞赛已成为我国高校规模最大的基础性学科竞赛. 数学建模引入大学课堂是在先进的教育理念指导下的我国高等教育教学改革的一次成功的实践, 它为高等学校培养什么人、怎样培养人, 做出了重要的探索; 为全面提高大学生的综合素质搭建了平台; 创新了理论知识学习与实践相结合的人才培养新模式, 为高等教育教学改革提供了一个成功的范例. 中国高等教育学会会长周远清教授曾用“成功的高等教育教学改革实践”给予高度评价.

在数学建模进入我国大学课堂 30 年、中国大学生数学建模竞赛成功举办 20 届之际, 《中国高教研究》杂志在 2011 年第 12 期特开辟专栏, 回顾、总结数学建模竞赛的成功经验, 探索高等教育教学改革、提升高等教育质量的有效途径. 其中, 姜启源,

---

<sup>①</sup> Frank R. Giordano 教授曾任美国西点军校数学系主任, 多年来一直担任美国大学生数学建模竞赛的组织者, 他是美国大学生数学建模竞赛组委会主任. 在他们的书 [Giordano 等(2003)] 中, 还介绍了数学建模以及美国大学生数学建模竞赛的相关内容等, 可作为参加美国大学生数学建模竞赛的参考书.