21世纪高等职业教育信息化数字规划教材

(第二版)

高等数学

(下册)

主　编　沈玲玲　叶鸣飞　王　华
副主编　谢素鑫　李　晶　王斯栓　涂旭东

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是根据高职学生的学习特点与认知水平编写的，全书通俗易懂、可读性强，书中通过建立各种计算模型的方式，直观地给出了高等数学的各种计算方法，以弥补高职学生数学基础、计算能力、逻辑思维能力的不足，注重培养高职学生掌握微积分的各种数学计算技能与应用能力，为学好后续的专业课程奠定基础.

全书分上、下两册。主要内容有函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间坐标与多元微积分、无穷级数、常微分方程及线性代数初步等，各章内容均配有微课视频及复习题与学习指导，同时配有习题答案二维码，部分内容可根据专业特点选修.

本书可作为高职高专工科类各专业通用教材，也可作为职业大学、成人大学和自学考试的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下/沈玲玲，叶鸣飞，王华主编. --2版. --上海：同济大学出版社，2020. 9

ISBN 978-7-5608-9466-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①沈… ②叶… ③王… Ⅲ. ①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 165696 号

高等数学(下册) (第二版)

主　编　沈玲玲　叶鸣飞　王　华

副主编　谢素鑫　李　晶　王斯栓　涂旭东

责任编辑　姚烨铭　　责任校对　徐逢乔　　封面设计　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　　www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号　邮编：200092　电话：021-65985622)

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　常熟市华顺印刷有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16

印　　张　10

字　　数　250 000

版　　次　2020 年 9 月第 2 版　　2020 年 9 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-9466-9

定　　价　43.00 元

前　言

随着高等职业教育改革的推进，对高等职业教育的教材建设也提出了新的要求.高职工科“高等数学”作为一门多学科共同使用的基础理论和工具课程，对学生后续专业课程的学习和思维能力的培养起着重要的作用.它的基础性决定了它在我国高等职业教育中的重要地位.

近几年来，由于我国高等职业教育的迅猛发展，对高职院校学生的基础要求也在不断变化，教育已经全面进入信息化时代，各高职院校在大力发展专业教育的同时，对基础教育本着“以应用为目的，以必需、够用为度”的教育原则，数学课的课时不断被压缩.因此在这样一种大背景下，信息化教学对高职数学教学具有革命性的影响，是信息技术与数学教学过程的全面深度融合，是教与学的双重变革，树立高等数学课程为专业服务的教育理念，构建满足专业教学需求的课程内容，建设符合高职学生学习特点与认知水平的教材，成为摆在我们面前的一大课题.为此，我们编写了本书.

本书是在江西省高校教学研究省级教改课题研究成果的基础上编写完成的，针对高职学生的学习特点与认知水平，我们对传统的高等数学的内容体系做了一些调整，以一元函数微积分学为主线，简化多元微积分学，突破课程体系的束缚，突出了高等数学作为一门“工具”课的特点，体现了其为专业服务的功能.为激发高职学生对高等数学课程的学习兴趣，本次再版我们增加了信息化教学手段，而且在开篇绪论中，以“闲话微积分”的方式，简介了微积分学的发展历程，并在每一章的教学内容中配有相应的微课教学视频，同时在学习指导后面添加了人文数学和数学史话等小栏目供学生自学，突出了数学教学中的信息化技术与人文性.

本书的编写原则是，不追求数学理论的完整性和系统性，只突出重要的结论、典型方法的应用，尽可能用通俗、直观的语言来描述抽象的数学概念，在传统教材原有的计算公式基础上，建立各种计算模型，直观给出各种计算方法，以适应高职学生数学基础、计算能力、逻辑思维能力诸方面不强的状况，提高了课程内容的可读性，强化了计算技能，降低了高职学生学习高等数学的难度，符合现代高等职业教育的需要.

参加本书编写的有江西工业职业技术学院的部分老师，全书由叶鸣飞统稿主审，下册由沈玲玲、叶鸣飞、王华担任主编，谢素鑫，李晶、王斯栓、涂旭东等老师担任副主编.由于成书时间仓促，编者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请有关专家、学者以及使用本书的广大师生批评指正，衷心欢迎读者将教材使用过程中碰到的问题和改进意见反馈给我们，以供日后修订时参考.

编　者

2020 年 6 月于南昌

目　录

第 6 章

空间坐标与多元微积分

章序 在前几章中，我们研究了含有一个自变量的函数（即一元函数），而在科学技术、工程应用等实际问题中还会遇到含有两个或两个以上自变量的函数，这就是多元函数的问题. 因此，我们还需要在一元函数的基础上，讨论多元函数微积分.

平面解析几何知识对一元函数微积分学的学习是不可缺少的，由此可知，空间解析几何知识对多元函数微积分的学习也是必不可少的，它是学习多元函数微积分的基础. 本章首先介绍空间直角坐标系，然后介绍二元函数的概念、二元函数的微分，最后介绍二重积分.

6.1　空间直角坐标系

6.1.1　空间直角坐标系的定义

用类似于建立平面直角坐标系的方法可以建立空间直角坐标系.

过空间一点 O，作三条具有相同单位长度、两两互相垂直的数轴 Ox，Oy，Oz，这样就构成了空间直角坐标系，记作 $O\text{-}xyz$.

点 O 称为坐标原点；轴 Ox，Oy，Oz 统称为坐标轴，分别叫做横轴、纵轴和竖轴（常分别称为 x 轴、y 轴、z 轴）.

视频 76

一般情况下，规定轴 Ox，Oy，Oz 的正方向遵循右手系法则，即以右手握住 Oz 轴，拇指指向其正方向，四个手指从 Ox 轴正方向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 Oy 轴正方向（图 6-1）.

建立了空间直角坐标系后，空间中的点就与由三个实数组成的有序数组之间有了一一对应的关系.

设 M 为空间中的任一点，过点 M 分别作垂直于三个坐标轴的三个平面，与 x 轴、y 轴和 z 轴依次交于 A，B，C 三点. 若这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x，y，z，则点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x,y,z)，如图 6-2 所示.

反之，若给定一个有序数组 (x,y,z)，总可在 x 轴、y 轴、z 轴上分别取坐标为 x、y、z 的三个点 A、B、C，过这三个点分别作垂直于三个坐标轴的平面，这三个平面必交于点 M，该点就是以有序数组 (x,y,z) 为坐标的点，因此，空间中的点 M 就与有序数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应的关系.

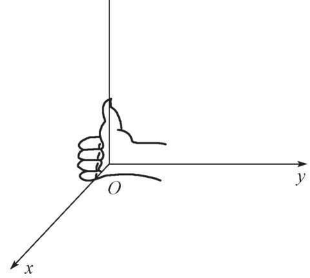

图 6-1

事实上:A,B,C 这三点是过 M 点作三个坐标轴的垂线的垂足.

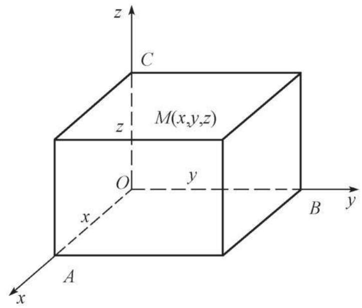

图 6-2

数组(x,y,z)称为点 M 在空间直角坐标系 O-xyz 中的坐标,x,y,z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.点 M 可记作 $M(x,y,z)$.

每两个坐标轴所决定的平面称为坐标平面,分别把它们叫做 xOy 平面、yOz 平面、zOx 平面;这三个平面将空间划分成八个部分,称为空间直角坐标系的八个卦限,分别称为第一卦限,第二卦限,……,第八卦限(图 6-3).

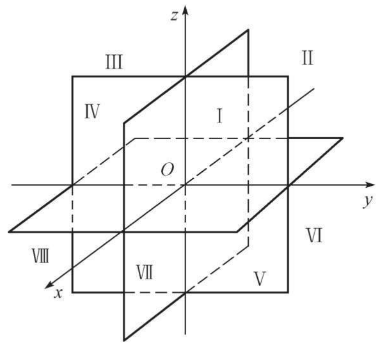

图 6-3

例 6.1 在空间直角坐标系 O-xyz 中,作出点 $P(2,4,2)$,并求出 P 关于 xOy 面的对称点 Q,P 关于 yOz 面的对称点 R,P 关于x 轴的对称点 S 的坐标.

解 先在 xOy 面上作出坐标为$(2,4,0)$的点 P',过 P'作 z 轴的平行线,在这平行线上沿 z 轴正向取点 P,使$|P'P|=2$,则作出$P(2,4,2)$点;在这平行线上沿 z 轴负向取点 Q,使$|P'Q|=2$,则 Q 点即为所求,其坐标为$Q(2,4,-2)$;过 P'在 xOy 面上作 $P'R'$平行于 x 轴,使 R'的坐标为$R'(-2,4,0)$,过 R'作z 轴的平行线,在这平行线上沿 z 轴正向取点 R,使$|R'R|=2$,则得到 R 点坐标为$R(-2,4,2)$;过 P'在 xOy 面上作 $P'S'$平行于 y 轴,使 S'的坐标为$S'(2,-4,0)$,又过 S'作 z 轴的平行线,在这平行线上沿 z 轴负向取点 S,使$|S'S|=2$,

则得到 S 点,其坐标为 $S(2,-4,-2)$(图 6-4).

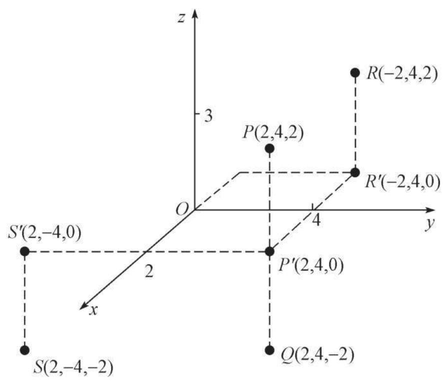

图 6-4

例 6.2 求点 $A(2,3,4)$到 xOy 平面及 x 轴的距离.

解 如图 6-5 所示,过点 A 作 $AP\perp xOy$ 平面,垂足为点 P,则点 A 到 xOy 平面的距离即为点 A 的竖坐标的绝对值,即点 A 到 xOy 平面的距离为$|AP|=4$.

过 P 作 $PB\perp x$ 轴,垂足为 B,由三垂线定理知 $AB\perp x$轴,即$|AB|$为点 A 到x 轴的距离.而在直角三角形 APB 中

$$|AB|=\sqrt{|AP|^2+|BP|^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

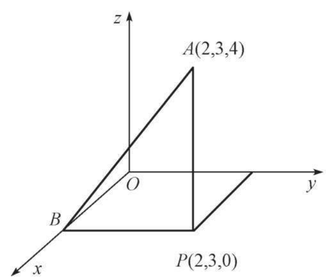

图 6-5

6.1.2　空间两点间的距离

建立了空间直角坐标系后，容易推导出空间两点间的距离公式.

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点，则 M_1 与 M_2 之间的距离为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{6-1}$$

事实上，过点 M_1 和 M_2 各作三个平面分别垂直于三条坐标轴，在 x 轴、y 轴、z 轴上的交点依次为 P_1,P_2,Q_1,Q_2,R_1,R_2，六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体，线段 M_1P,M_1Q,M_1R 是它的三条棱，如图 6-6 所示.

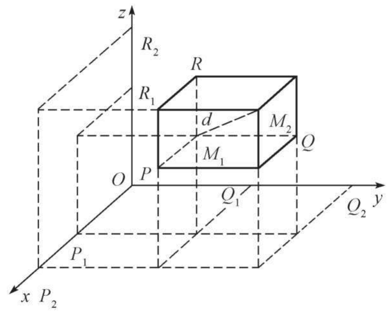

图 6-6

因为 $d^2=|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|M_1R|^2$
$=|P_1P_2|^2+|Q_1Q_2|^2+|R_1R_2|^2$.

而由图 6-6 可知，

$OP_1=x_1$，$OP_2=x_2$，$|P_1P_2|=|x_2-x_1|$.

同理　$OQ_1=y_1$，$OQ_2=y_2$，$|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|$，

$OR_1=z_1$，$OR_2=z_2$，$|R_1R_2|=|z_2-z_1|$，

所以
$$\begin{aligned}d^2&=|M_1M_2|^2=|P_1P_2|^2+|Q_1Q_2|^2+|R_1R_2|^2\\&=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2+|z_2-z_1|^2,\end{aligned}$$

即
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

式(6-1)称为空间两点间的距离公式.

特别地，空间任一点 $M(x,y,z)$与坐标原点 $O(0,0,0)$的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 6.3　设 $A(-1,2,0)$与 $B(-1,0,-2)$为空间两点，求 A 与 B 两点间的距离.

解　由公式(6-1)可得 A 与 B 两点间的距离为

$$d=\sqrt{[-1-(-1)]^2+(0-2)^2+(-2-0)^2}=2\sqrt{2}.$$

例 6.4　求证：以 $A(7,1,2)$,$B(4,3,1)$,$C(5,2,3)$为顶点的三角形是等腰三角形.

证明　由式(6-1)得

$$|AB|=\sqrt{(4-7)^2+(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{14}.$$

$$|BC|=\sqrt{(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{6}.$$

$$|AC|=\sqrt{(7-5)^2+(1-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{6}.$$

由于$|AC|=|BC|=\sqrt{6}$，所以，$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

例 6.5　在 y 轴上求与点 $A(1,-3,7)$和点 $B(5,7,-5)$等距的点 M.

解　由于所求的点 M 在 y 轴上，因而点 M 的坐标可设为$(0,y,0)$. 又由于

$$|MA|=|MB|,$$

由式(6-1)得

$$\sqrt{(0-1)^2+(y+3)^2+(0-7)^2}=\sqrt{(0-5)^2+(y-7)^2+(0+5)^2},$$

从而解得

$$y=2,$$

即所求的点为 $M(0,2,0)$.

习题 6-1 答案

习题 6-1

1. 指出下列各点在空间直角坐标系的哪个卦限中：

(1) $(-1,3,2)$；　　(2) $(3,3,2)$；

(3) $(-4,-3,-2)$；　　(4) $(-1,3,-1)$.

2. 当点 P 处在下列位置时，指出它的坐标具有的特点：

(1) 点 P 在 zOx 坐标平面上；　　(2) 点 P 在 x 轴上；

(3) 点 P 在与 yOz 坐标平面平行且两平面相距为 5 个单位的平面上.

3. 求点 $P(1,-2,-1)$关于下列对象对称点的坐标：

(1) 关于 xOy 坐标平面对称；(2) 关于 x 轴对称；(3) 关于坐标原点对称.

4. 求点$(4,-3,5)$与原点及各坐标轴、各坐标面间的距离.

5. 证明：以 $A(1,2,3)$、$B(2,3,1)$和 $C(3,1,2)$三点为顶点的三角形是等边三角形.

6. 在坐标平面 yOz 上求与三点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$和 $C(0,5,1)$等距的点.

6.2　二元函数及多元函数

6.2.1　二元函数的定义

在实际问题中所涉及的函数，并非都是一元函数，常常会遇到一个变量依赖于两个或更多个自变量的情形，如：

视频 77

例 6.6　矩形面积 S 与其长 x、宽 y 有下列依赖关系：

$$S=xy \quad (x>0,y>0),$$

其中，长 x 与宽 y 是独立取值的两个变量. 在它们的变化范围内，当 x、y 取定值后，矩形面积 S 有唯一确定的值与之对应.

例 6.7　物体的动能 E 与物体的质量 m 和运动速度 v 之间有如下关系：

$$E=\frac{1}{2}mv^2 \quad (m>0,v\geqslant 0).$$

上式中，对 m,v 的变化范围内的每一组值，变量 E 有唯一确定的值与之对应.

上述两例，去掉变量的具体意义，可得出共性，即：一个变量是由其他两个变量的变化来确定的函数，这样的函数就是二元函数.

定义 6.1　设 D 是 xOy 平面上的一个点集，x、y 是相互独立的两个变量，如果点$(x,y)\in D$，而第三个变量 z 按照某一对应关系 f 有唯一确定的数值与之对应，则称 z 为 x,y 在 D 上的二元函数，记作

$$z=f(x,y).$$

其中 x、y 称为自变量，z 称为因变量，点集 D 称为函数的定义域，数集

$$\{z \mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为函数的值域.

同一元函数一样，二元函数的定义域也是确定一个二元函数的要素之一. 我们知道，一元函数的定义域一般是一个区间或几个区间的并.

从二元函数的定义域概念可知，二元函数的定义域 D 通常是由平面 xOy 内一条或几条光滑曲线围成的部分平面，这样的部分平面称为区域. 围成区域的曲线称为区域的边界，边界上的点称为边界点. 包括边界的区域称为闭区域，不包括边界的区域的称为开区域.

分析函数变化离不开求函数的定义域. 如何求二元函数的定义域？先看下面的例题.

例 6.8　求函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域.

解　要使函数表达式有意义，必须有

$$x+y>0,$$

故函数的定义域是图 6-7 阴影部分所示的区域，即为 $D=\{(x,y)\mid x+y>0\}$.

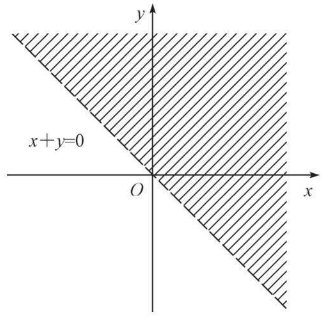

图 6-7

例 6.9　求函数 $z=f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的定义域，并计算 $f(0,2)$ 和 $f(1,-1)$.

解　要使函数表达式有意义，必须有

$$x^2+y^2\leqslant 4,$$

所以，函数的定义域是图 6-8 中阴影部分所示的区域，它是 xOy 平面上以原点为圆心，半径为 2 的圆内及其边界上点的全体，即为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\},$$

$$f(0,2)=\sqrt{4-0^2-2^2}=0,$$

$$f(1,-1)=\sqrt{4-1^2-(-1)^2}=\sqrt{2}.$$

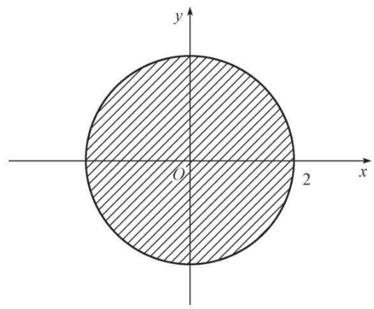

图 6-8

例 6.10　求函数 $z=\ln(x^2+y^2-1)+\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ 的定义域.

解　要使函数有意义，x、y 应满足不等式组

$$\begin{cases}x^2+y^2-1>0,\\ 4-x^2-y^2>0,\end{cases}$$

即

$$1<x^2+y^2<4.$$

因此，函数的定义域为图 6-9 中阴影部分所示的区域，它的图形是圆环，即为

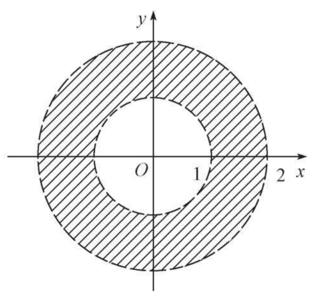

图 6-9

$$D=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}.$$

从以上例题可知，求函数解析式 $z=f(x,y)$ 的定义域，就是求其能使函数表达式有意义的点 (x,y) 的全体，一般可用不等式或不等式组表示. 而求对于从实际问题提出的函数的定义域

时，还要根据自变量所表示的实际意义来确定.

从上面的例子还可以看到二元函数的定义域可以用平面内各种形式的图形来描绘.

为便于问题的分析，我们把以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为圆心、以 $\delta>0$ 为半径的开区域即满足不等式 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 的点的全体称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$（图 6-10）. 若在 P_0 的 δ 邻域中去掉点 P_0，则称此区域为点 P_0 的去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，也记为 $\mathring{U}(P_0)$.

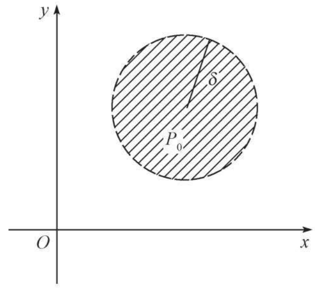

图 6-10

若区域 D 可以被包含在某个圆内，则称 D 是有界区域（图 6-8），否则称为无界区域（图 6-7）.

6.2.2 二元函数的几何意义

一般地，一元函数 $y=f(x)$ 的图形在 xOy 平面上表示一条曲线.

对于二元函数 $z=f(x,y)$，设其定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 为函数定义域中的一点，与点 P_0 对应的函数值记为 $z_0=f(x_0,y_0)$，于是可在空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中作出点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$. 当点 $P(x,y)$ 在定义域 D 内变动时，对应点 $M(x,y,z)$ 的轨迹就是函数 $z=f(x,y)$ 的几何图形.

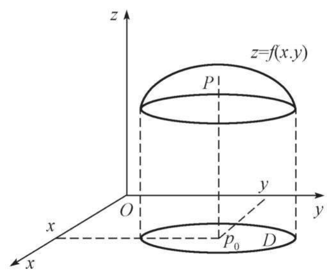

图 6-11

一般来说，它通常是一张曲面. 这就是二元函数的几何意义，而定义域 D 正是这曲面在 xOy 平面上的投影，如图 6-11 所示.

例如：二元函数 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 表示以点 $(0,0,0)$ 为球心、以 2 为半径的位于 xOy 平面上方的半球面（图 6-12）.

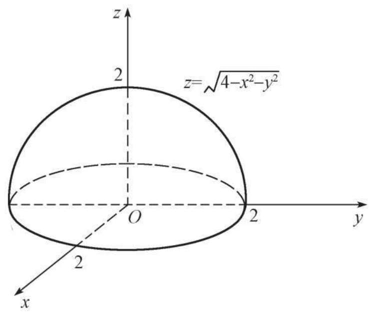

图 6-12

而函数 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的定义域为 $x^2+y^2\leqslant 2^2$，即为以坐标原点为圆心、以 2 为半径的圆的内部及其边界（图 6-8）.

6.2.3 多元函数的定义

类似二元函数定义，可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$ 以及三元以上的函数. 二元及二元以上的函数统称为多元函数.

习题 6-2

习题 6-2 答案

1. 填空题：

(1) 已知 $f(x,y)=x^2+y^2-\dfrac{x}{y}$，则 $f(2,1)=$______________，$f(x+y,1)=$______________.

(2) 已知 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ 则 $f(x,0)=$__________，$f(0,y)=$__________.

(3) 设 $f(xy,x-y)=x^2+y^2$,则 $f(x,y)=$__________.

(4) 设 $f(x,y)=x^2+y^2$,则 $f(\sqrt{xy},x+y)=$__________.

2. 用不等式表示下列各区域：

(1) 一个顶点在原点,边长为 2,一边在 x 轴的正方向上的等边三角形；

(2) 以 $O(0,0)$,$A(1,0)$,$B(1,2)$,$C(0,1)$为顶点的梯形区域.

3. 求下列函数的定义域,并画出定义域所表示的区域：

(1) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$；

(2) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；

(3) $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$；

(4) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}\quad(0<r<R)$.

6.3　偏导数

6.3.1　偏导数的概念

1. 偏导数的定义

视频 78

在研究一元函数时,我们已经知道导数就是函数的变化率,它反映了函数在某一点变化的快慢程度. 对于二元函数同样需要研究它的变化率,然而,由于自变量多了一个,因而,二元函数与自变量的关系要比一元函数复杂得多. 在 xOy 平面内,当点(x,y)沿不同的路径趋于点(x_0,y_0)时,函数 $f(x,y)$的变化快慢一般来说是不同的. 这就需要讨论函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处沿各个不同方向的变化率.

本书仅研究二元函数 $z=f(x,y)$当点(x,y)分别沿平行于 x 轴、y 轴趋于点(x_0,y_0)这两种特殊的变化形式,即:如果自变量 x 变化,则自变量 y 保持不变(可看作常量);而如果自变量 y 变化,则自变量 x 保持不变(可看作常量)下的变化率. 这不仅是由于在以上两种变化方式下讨论的时候比较简单,应用广泛,而且也是研究其他方向变化率的基础.

定义 6.2　设某二元函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某个邻域内有定义,当固定 $y=y_0$,而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时,相应的函数有增量(称为函数 z 对 x 的偏增量,记为 Δz_x)

$$\Delta z_x=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z_x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ f'_x(x_0,y_0)\text{或}\ z'_x(x_0,y_0),$$

即

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 轴的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z_y}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ f'_y(x_0,y_0)\text{或}\ z'_y(x_0,y_0).$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处都存在对 x 的偏导数，则这个偏导数仍是 x、y 的函数，称此函数为 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ f'_x(x,y)\text{或}\ z'_x.$$

类似地，可以定义函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导数，记为

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ f'_y(x,y)\text{或}\ z'_y,$$

且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

注意

(1) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$，就是偏导函数 $f'_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值，而 $f'_y(x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f'_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值. 在不至于混淆的情况下，常把偏导函数简称为偏导数.

(2) 偏导数的记号 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 是一个整体记号，不能理解为 ∂z 与 ∂x 之商，这一点与一元函数的导数记号 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 不同，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可以看成函数微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量微分 $\mathrm{d}x$ 之商.

二元以上的多元函数的偏导数可类似地定义.

2. **二元函数偏导数的几何意义**

由空间解析几何知识，我们知道曲面 $z=f(x,y)$ 被平面 $y=y_0$ 截得的空间曲线为

$$\begin{cases}z=f(x,y);\\y=y_0.\end{cases}$$

因此，二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$，就是一元函数 $z=f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数. 由一元函数导数的几何意义知，二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，就是平面 $y=y_0$ 上的一条曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=y_0 \end{cases}$ 在点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率.

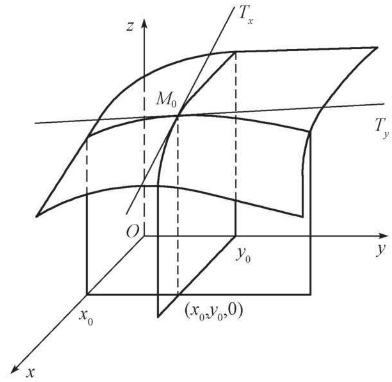

图 6-13

同样，$f'_y(x_0,y_0)$ 表示曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ x=x_0 \end{cases}$ 在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率(图 6-13).

3. **偏导数的求法**

由偏导数定义知，函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的偏导数就是把 y 看成常数，函数 $z=f(x,y)$ 视为以 x 为自变量的一元函数，对这个一元函数求关于 x 的导数. 同样，求 $z=f(x,y)$ 对 y 的偏导数时，就将 x 看成常数，对函数 $z=f(x,y)$ 关于 y 求导数即可.

由此可见，计算二元函数的偏导数就归结为计算一元函数的导数，因此，一元函数的求导公式、求导法则均可以在求偏导数过程中运用.

例 6.11　设 $z=2x^2y^5+y^2+2x$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}$ 及 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}$.

解　要求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，即把 y 看成常数，函数看成是以 x 为自变量的一元函数，然后对 x 求导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\cdot 2x\cdot y^5+2=4xy^5+2.$$

同理可得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2\cdot 5y^4+2y=10x^2y^4+2y.$$

所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=4\times 2\times 1^5+2=10,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=10\times 2^2\times 1^4+2\times 1=42.$$

例 6.12　求下列函数的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$：

(1) $z=\sqrt{x^2+y^2}$；　(2) $z=x^y$，$(x>0,x\neq 1)$；　(3) $z=\sin(x^2y)$.

解　(1) 利用一元复合函数的求导法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2)'_x=\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

由对称性可知

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(2) 把 y 看成常数,$z=x^y$ 为关于 x 的指数函数,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},$$

把 x 看成常数,$z=x^y$ 为关于 y 的指数函数,则

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x.$$

(3) 由一元复合函数的求导法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(x^2y)\cdot(x^2y)'_x=2xy\cos(x^2y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\cos(x^2y)\cdot(x^2y)'_y=x^2\cos(x^2y).$$

6.3.2 高阶偏导数

定义 6.3 设函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内的每一点(x,y)都有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y).$$

如果偏导函数 $f'_x(x,y)$,$f'_y(x,y)$分别对 x、y 的偏导数仍存在,则称这些偏导数是函数 $z=f(x,y)$的二阶偏导数.由求偏导数的顺序不同,二阶偏导数有下列四种类型:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)=z''_{xx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)=z''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)=z''_{yx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)=z''_{yy}.$$

上面第二、第三两个二阶偏导数称为函数 $z=f(x,y)$的二阶混合偏导数,它们分别都是对 x,y 各求一次导数,但不同的是求导的次序不一样.第二个二阶偏导数,即 $f''_{xy}(x,y)$,是先对 x、后对 y 求偏导数;而第三个二阶偏导数,即 $f''_{yx}(x,y)$,是先对 y、后对 x 求偏导数.

用同样的方法,可以得到三阶、四阶以至 n 阶偏导数(如果存在的话).二阶或二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

例 6.13 设 $z=x^2y+\sin(xy)$,求它的二阶偏导数.

解 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+y\cos(xy),\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^2+x\cos(xy),$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial[2xy+y\cos(xy)]}{\partial x}=2y-y^2\sin(xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial[2xy+y\cos(xy)]}{\partial y}=2x+\cos(xy)-xy\sin(xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[x^2+x\cos(xy)]=2x+\cos(xy)-xy\sin(xy),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}[x^2+x\cos(xy)]=-x^2\sin(xy).$$

注意：从上例可以看到$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$(即两个混合偏导数是相等的)，需要注意的是，这样的结论并不是在任何时候都成立．只有当两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在求导区域$D$内连续时，则在该区域内有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

也就是说，当两个二阶混合偏导数在求导区域内连续时，我们求二阶混合偏导数与求导的次序无关．这个结论也可以类推到更高阶的混合偏导数．

例 6.14　设 $f(x,y)=e^{xy}+\sin(x+y)$，求 $f''_{xx}\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，$f''_{xy}\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

解　因为

$$f'_x(x,y)=ye^{xy}+\cos(x+y),$$
$$f''_{xx}(x,y)=y^2e^{xy}-\sin(x+y),$$
$$f''_{xy}(x,y)=e^{xy}+xye^{xy}-\sin(x+y)=e^{xy}(1+xy)-\sin(x+y),$$

所以

$$f''_{xx}\left(\frac{\pi}{2},0\right)=-1,\quad f''_{xy}\left(\frac{\pi}{2},0\right)=0.$$

习题 6-3

习题 6-3 答案

1．填空题

(1) 设 $f'_x(x_0,y_0)=2$，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=$__________.

(2) 设 $z=\arcsin(xy)$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$__________，$\frac{\partial z}{\partial y}=$__________.

(3) 设 $f(x,y)=\ln\left(x+\frac{y}{2x}\right)$，则 $f'_y(1,0)=$__________.

(4) 若 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

(5) 若 $f(xy,x+y)=x^2+y^2$，则 $f'_x(x,y)=$________.

2. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^3+y^3$；　　(2) $z=\mathrm{e}^{-x}\sin y$；

(3) $z=(1+xy)^y$；　　(4) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$；

(5) $z=\tan(xy^2)$；　　(6) $z=xy+\dfrac{x}{y}$.

3. 求下列函数的二阶偏导数：

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$；　　(2) $z=\ln(x^2+y^2)$；

(3) $z=\sqrt{xy}$；　　(4) $z=\dfrac{x+y}{x-y}$.

4. 证明 $T(x,t)=\mathrm{e}^{-ab^2t}\sin bx$　$(a>0,a,b$ 是常数)满足热传导方程：

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

5. 已知理想气体的状态方程 $PV=RT$(R 是常数)，证明：$\dfrac{\partial P}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial P}=-1$.

6.4　多元复合函数与隐函数的微分法

6.4.1　复合函数的求导法则

在一元函数微分学中，复合函数求导法则是最重要的求导法则之一，它解决了很多复杂函数的求导问题. 在多元函数微分学中同样如此，下面介绍二元复合函数的求导法则.

视频 79

定理 6.1　设函数 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处偏导数存在，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处可微，则二元复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 处偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{6-2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{6-3}$$

对于二元复合函数的这个求偏导数的法则，我们可借助图 6-14来帮助理解，更好地掌握式(6-2)和式(6-3)的应用方法.

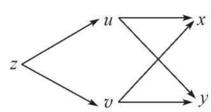

图 6-14

在求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 时，如将 y 看作常数，函数就可看作 x 的一元函数；由于当 x 改变时，既会引起 u 改变，同时也会引起 v 改变，从而引起 z 改变. 因此，由 x 引起的 z 的变化由两部分组成. 由变量关系图(图 6-14)看到从函数 z 到自变量 x 有两条路径：$z\to u\to x$ 及 $z\to v\to x$；沿 $z\to u\to x$ 路径，对应有 $\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}$，沿 $z\to v\to x$ 路径，对应有 $\dfrac{\partial z}{\partial v}$