



---

# 数学解题思维与 能力培养研究

---

徐泽贵 著

吉林人民出版社

## 前 言

数学是一种工具，推动着人类文明的发展；数学是一门基础学科，是除语言学外学好其他学科的基础；数学又是一种思想方法，训练人们的思维能力。可见，数学的学习对促进社会和个人发展都有着积极的作用。解题在数学学习中至关重要，无论是对定理概念的理解、思想方法的掌握，还是学生思维能力的提高，都需要通过解题来实现。掌握好一定的解题思维策略，可以使学习达到事半功倍的效果。

进入高中阶段，数学知识逐渐抽象化、形式化。从平面几何到空间几何，从简单的一次、二次函数到复杂的指数、对数函数，以及出现了集合语言、逻辑语言等抽象的数学语言。因此，高中数学的解题对学生的思维能力和逻辑推理能力的要求更高。不同于初中解题，大部分题目都可以按照一般的步骤加以模仿，掌握好这些常规的步骤，并加上一定的训练就能取得高分。高中数学问题的解决则需要学生了解思维过程，掌握基本的思想方法，才能应对变换多样的题型，因此要求学生具备较强的自主思维能力，学生的思维能力将影响到高中数学的学习效果。

本书以“数学解题思维与能力培养研究”为选题，阐释了高中数学教学过程中如何培养学生的数学解题思维能力，针对高中数学教师授课提出了融入数学思维的建议。具体内容包括：数学思维方法研究的意义、数学的思维策略、数学解题策略、基于学生数学学科核心能力的教学改进研究、基于核心素养培养的数学教学等。

本书具有以下两个特点：

第一，针对性强。本书主要针对学生数学解题思维与能力的培养，从理论的阐释到例题的选择，充分考虑高中学生的学习目的与目标，结合教育、教学实际，突出解题思维的针对性。

第二，实践性强。在数学解题策略和数学解题思路的指导下，形成一个融知识和训练于一体的数学体系。为突出实践性，在理论的阐述中倾向于简明扼要，以求能更好地指导各类数学问题的实例训练。

笔者在撰写本书的过程中，得到许多专家学者的帮助，在此表示衷心的感谢！并衷心期待这本书在读者的学习生活以及工作实践中结出丰硕的果实。探索知识的道路是永无止境的，本书也一定还存在着一些不足之处，恳请前辈、同行以及广大读者斧正，以便改进和提高。

作者

2019年5月

# contents

## 目 录

<b>第一章 数学思维方法研究的意义</b> .....	1
第一节 思维的起源与发展 .....	1
第二节 数学思维的概述 .....	5
第三节 数学学习与思维发展 .....	9
<b>第二章 数学的思维策略</b> .....	16
第一节 数学逻辑思维策略 .....	16
第二节 数学归纳推理思维策略 .....	23
第三节 数学类比思维策略 .....	29
第四节 数学形象思维策略 .....	38
<b>第三章 数学解题策略</b> .....	51
第一节 数学解题策略应遵循的原则 .....	51
第二节 数学解题策略选择、制定中的关注要点和技术 .....	56
第三节 数学解题策略系统 .....	61
<b>第四章 基于学生数学学科能力的教学改进研究</b> .....	84
第一节 基于学生数学学科核心能力的教学改进研究 .....	84
第二节 基于学生概括理解能力的教学改进研究 .....	92
第三节 基于学生运算能力的教学改进研究 .....	100
第四节 基于学生猜想探究能力的教学改进研究 .....	110
第五节 集智备课在现代教育中的研究应用 .....	121



第五章 基于核心素养培养的数学教学 .....	128
第一节 基于数学核心素养的情境教学 .....	128
第二节 基于数学核心素养的测评 .....	135
第三节 提升数学核心素养的途径 .....	136
第六章 高中数学分层教学实施策略研究 .....	138
第一节 新课改背景下高中数学分层教学 .....	138
第二节 石阡第三高级中学学科分层教学应用实例 .....	143
参考文献 .....	149

## 第一章 数学思维方法研究的意义

思维科学是一门充满希望的科学，也是一门开拓未来的艺术。科学的思维方法是人们通向真理，取得正确认识的途径。本章主要就思维的起源与发展、数学思维、数学学习与思维发展进行论述。

### 第一节 思维的起源与发展

#### 一、思维的概念界定

思维是人脑对客观世界概括性和间接性的反映，是人脑对客观事物所具有的特点及事物间相互关系的反应过程。现代科学技术的发展，使人类对自身思维的研究有了坚实的科学基础。现代神经生理学对思维器官——大脑的生理结构、功能和机制做了深刻揭示。思维科学研究者认为：人的大脑接受外界信息后，通过各种复杂的神经回路对信息加工处理的过程就是思维。简言之，思维就是一种信息的处理过程。

实践活动是思维的基础，人类的思维有两个非常重要的特征：

第一，概括性。思维的概括性是指思维能揭示事物的本质和内在规律的联系。例如，通过感知建立事物的表现，然后通过抽象过程，在思维上区分事物的本质属性和非本质属性，从而舍去非本质属性，抽象出本质属性。通过概括过程，可以把区分出来的某种事物的一般的、共同的属性或特征结合起来，或把个别事物的本质属性或特征推广为同类事物的本质属性或特征。概括性是人们形成和掌握概念的前提。例如，对毛笔、铅笔、钢笔、粉笔这些物品而言，其本质特征都是写字的工具，因而形成笔的概念。概括性也是思维活动的速度、迁移的广度和深度等智力品质的基础。一切学习的迁移、知识的运用都离不开概括，概括性越高，知识系统性越强，迁移能力就越灵活。概括性还是一切科学研究的出发点，任何科学研究的目的在于把大量个别事实概括为一般的规律，从而发现新理论，获得新成果。因此，概括性在人类社会活动中有着重要作用。



第二，间接性。思维的间接性是指不直接依靠其他事物作媒介来反映客观事物，也就是思维凭借已有的知识经验，就能对客观事物进行间接反应。例如，人们夜晚睡觉时并未听见风声雨声，也未见到下雨，但早晨起来见到湿的地面、树木花草的水珠以及地上洒落的树叶花瓣，就知道昨夜风雨交加。这种产生“昨天晚上下雨了”的联想，就表明思维发生了，因为地面上有水，是对下雨的一种间接反映。<sup>①</sup>

思维形式是相对思维内容而言的，思维形式是表达思维内容的方法和工具。思维形式可分为思维的外部形式和内部形式。其中，语言、文字、各种表达符号都属于思维的外部形式，它们是人们进行思维活动的记号和相互交换信息的载体，是人们进行思维活动必不可少的条件。与思维内容、意义更为密切的是思维的内部形式。例如，概念、判断、推理以及思维内容的内部联系、思维活动借以进行和展开的逻辑原则等。本书主要研究思维的内部形式。

思维又可分为正常思维、反常思维和中态思维。能使反映结果与思维对象统一而又不矛盾的思维称为正常思维。人们的许多发明创造都是正常思维的结果。例如，古人长期反复观察日、月、星辰位置的变化，从而把握大地上四季寒暑的变化关系，这是正常思维的结果；人们按照事物间的逻辑关系进行推理，也是正常思维。那些根本不能反映结果与思维对象客观统一而相互矛盾的思维称为反常思维。不完全能反映结果与思维对象统一的思维称为中态思维。本书主要研究正常思维。正常思维又有逻辑思维、形象思维、灵感思维之分，不同类型的正常思维又有着不同的思维活动形式。逻辑思维是人类揭示客观世界本质和规律的极为重要的思维活动形式，几乎渗透到人类获取所有的新理论、新知识的每一个过程中，人们对它进行了长期的研究，人们对逻辑思维的基本形式、基本规律、基本方法都有较深刻的了解。逻辑思维的基本形式有概念、判断、推理、证明等；逻辑思维的基本方法有分析与综合、抽象与概括、比较与类比、归纳与演绎、证明与反驳等。

## 二、思维的起源与进化

对于人在与动物具有相同的进化背景下是如何脱颖而出的，从低等动物的刺激感应性到脊椎动物的感觉知觉，再到高级动物的意识，人类是如何在变化万千的世界中发展自己思维能力的。对于这一类问题，达尔文的生物进化观点给人们描绘了一幅生物世界发展变化的途径和图景。然而就思维的具体发展途径而言，还没有一个明确的或是令所有人信服的说法，这在很多人心中是一个非常想明确的问题。

目前，绝大多数人可以接受的说法是：人的思维是在动物知觉的基础上发展而

<sup>①</sup> 杨建楠. 理想数学课堂的基础、核心和目标 [J]. 教学与管理, 2017(31): 63—65.

来的，从最低等的动物的应激反应到脊椎动物的感觉知觉，再到高级动物的萌芽意识状态，这些都为人类思维的发生、发展提供了非常好的基础和前提条件。就目前了解的情况来看，动物的心理发展可分为以下三个阶段：

第一阶段为感觉阶段。它是最低阶段，表现出对信号刺激物的稳定反应。例如，蜘蛛能感觉蛛网与食物振动的联系；蜜蜂的反应能够表现事物的气味与颜色的联系等。

第二阶段为知觉阶段。动物演化到脊椎动物时，出现了知觉的反应形式。脊椎动物不仅能对信号的个别刺激物进行反应，而且还能够把标志着一个完整客体的各种属性作为一个整体进行反应。

第三阶段为具体思维阶段。哺乳动物的心理发展水平已经达到思维的萌芽阶段。

这三个阶段是目前为止人类所能了解的动物心理发展的阶段，虽然动物心理发展也已经达到思维的萌芽状态，但终究不是思维。动物的这种发展过程给人类思维的进化提供了非常好的基础和模板，也为人类思维的发展提供了大量的准备过程。

### 三、思维的发展历程

人类思维的发展经历了漫长的过程。物质的发展是基础，在客观物质世界的发展基础上人类产生了意识。在这个发展过程中有两个方面起着关键作用：第一，人的劳动促进了大脑的发展；第二，语言的产生为思维的发展提供了可能。

在高级动物思维的萌芽状态下，人类的劳动促进了人自身的器官特别是大脑的发展，在语言的产生下人类学会了交流，传达了各自的感受和对事物的不同见解，在这个基础上人类积累了直接和间接的经验，并把这些经验传到后代人身上，后代人又进行了创新和发展，从而提升、推进了人类的思维进程。

关于思维的科学，一方面，由于人们很早就有了探索自身思维的浓厚兴趣，因此它像人类的文化发展史一样古老；另一方面，由于它是现代科学之林中的一门新兴科学，又显得十分年轻。回顾人类文明发展的进程可以发现，思维方式的进步直接推动了科技的变革。

所谓的思维方式，其实就是一种被大脑处理过的社会实践活动，而最终形成的一种思维定式。当对一些客观事物进行评价后，人们就会自然地对其产生一定的理解。由此来看，这种思维方式与人们的社会实践分不开，同时也会随着人类社会的发展而不断地变化。

纵观整个人类发展的历程可以发现，随着人类社会的发展得越来越高级，人们必须不断探索和发现大自然当中的奥秘。但由于人类的科技水平有限，对于自然界当中的一些以现在的认知水平还无法理解的现象，往往就会对它进行猜想，这种行为



就是唯心主义思维方式。通过对自然界资料的搜集，再加以分类研究，这种思维方式出现在工业时代，在当今来看就是一种形而上学的思维方式。但随着人类社会发展的深入，对自然界的了解也越来越多，在研究自然的方式上也发生了改变，逐渐地演化成为一种独立地考察事物的机械式思维方式，并逐渐发展成为工业时代人们的思维规范，建立了著名的牛顿力学，最终成为评价和度量一切自然科学的准则。

牛顿力学中的时空观、万有引力定律、力学定律以及物质运动观的确立和证实，使人们在思考和探索诸如地质学、化学以及电磁学问题时有了新的借鉴标准，并将其归为机械运动的范畴。信息技术在社会发展中的地位越来越重要，最终成为推动社会发展的动力。

20世纪中期，信息技术突飞猛进，会思考的机器这一概念被第一次提了出来，这也就是现代计算机的最初理念，它用机器来模拟人脑的思考过程，并在短时间内处理、传递、存储大量的信息。<sup>①</sup>基于这样的思维变革，在之后的时代中，随着计算机的发明、互联网的出现，信息学正式建立，宣布人类正式进入了信息时代。信息化对人类的影响是深入、深远和广泛的，虽然计算机、互联网不完全等于信息化，但是信息化的过程就是以计算机、互联网为标志，智能化工具为代表的新生产力形成的过程。这样的过程在短短几十年间，已经对人类的生产、生活的各个方面产生了越来越多、越来越大的影响，极大地提高了社会劳动生产力，而且还可以改变人们的工作、学习、交往、生活等方式，特别是思维方式。由于每一个学科之间都有着紧密相连的关系，因此在研究事物的时候，应该做到统一地、整体地去看。这一点钱学森在马克思主义辩证唯物论当中就提到过，他提出的“综合集成”思维方式，在如今的社会中依然被广泛使用。

科学技术的发展必然伴随着人们思维方式的改变，但同时思维方式又会对人们的社会发展产生制约。通常情况下，人类的社会活动在短时期内会受到当时社会普遍思维方式的影响。在社会技术取得某些重大突破时，也往往伴随着人们思维方式的改变和突破。如今人们所说的四维空间，就是爱因斯坦改变了当时人们的思维方式，将时间与已知的三维空间结合起来而发现的。同时，他还首次提出了相对论这一伟大的概念，使人们发现了质量和能量之间的关系，这不仅大大地改变了人们对自然界的认知，同时也对人类科学技术的发展起到了极大的推动作用。

---

<sup>①</sup> 周学严. 学好高中数学的思考[J]. 数学学习与研究, 2019(05): 140—141.

## 第二节 数学思维的概述

### 一、数学思维的概念界定

数学思维是在思维能力的基础上逐步形成的，它在形成的过程中，伴随着很多干扰性的因素。因此，为了帮助学生形成数学思维，老师最重要的职责是提高他们的思维能力，并为他们清除干扰性因素或者降低这些因素对他们的影响。由于数学思维需要思维能力作为基础，因此透过数学思维可以发现思维能力的踪迹，二者虽然有关联，但数学思维仍然保持着较高的独立性，体现着数学知识的特点，思维能力对它的影响有限。

### 二、数学思维的三种基本成分

数学思维包括三种基本成分：一是形象思维；二是抽象逻辑思维；三是直觉思维。<sup>①</sup>下面具体分析这三种成分。

数学形象思维把客观形象当作研究的对象，借助人的联想能力，最终实现建立“物化形象”的目的。形象思维具有三个属性：一是形象性；二是概括性；三是想象性。形象思维形成的应用过程指的是以数学知识为基础，运用一定的数学逻辑以及思维能力，重新分析数学表象，从而产生新的“意象”，为解决数学问题提供新的方法。它的主要功能体现在以下四个方面：一是生动具体地展现数学问题的全貌；二是为学生带来一定的启发性；三是有效填补了抽象思维的空白；四是为数学创造力提供了源动力。

数学抽象逻辑思维是在对客观事物分析的基础上，以逻辑法则为工具，通过推理，形成新概念，进而产生定理或者原理，它在数学领域具有重要的作用，为深入理解数学概念、验证数学结论、搭建数学理论体系提供有力工具，同时也能够为其他领域的理论体系的建立提供有力支撑。逻辑思维具体又可分为两种：一是形象逻辑思维，二是辩证逻辑思维。抽象思维具体是指以形式逻辑为基础，反映数学对象及其之间的关系为手段，实现认识数学对象本质及规律的目的。抽象思维的高级阶段就是辩证逻辑思维，它通过对概念发展规律的认识，深层次地探究概念的本质。

<sup>①</sup> 张俊珍. 学习理论视域下学生数学思维的发展研究 [J]. 教育理论与实践, 2017 (19): 59—62.



数学直觉思维指的是当人们靠数学形象以及结构时，大脑对其进行快速识别，对其表面特征进行理解，从而产生综合的判断。这种思维方式具有其独特的属性，它的产生是不定期的，具有一定的突发性，由于直觉的作用，使其具有一定的跳跃性，对数学问题的整体识别，决定了这种思维方式具有一定的整体性。直觉思维展现方式具体包括判断、想象以及启发。

在应用数学思维发现问题和解决问题的过程中，上述三种思维相互交替、互相转化，从而衍生出了更多的思维模式。比如，归纳、联想等。

### 三、数学思维的结构研究

对数学思维结构的深入研究，有助于将其理论应用于数学教学实践，对于教师而言，可以改进他们的授课方法；对于学生而言，有利于提升他们的思维能力。从心理学领域对数学思维结构进行分析，可以将其分为以下几种形式：一是数学思维内容；二是数学思维的基本形式；三是数学思维的方法；四是数学思维的品质。

从数学学习的领域来看，数学思维结构是人们在数学思维活动过程中反映出来的总体特征。具体是指人们在进行数学学习时，将数学本身的结构作为基础，再根据自己对数学对象的理解，在头脑中形成新的思维结构。数学结构思维在客观和主观方面的表现具有一定的差异。客观而言，数学思维结构包括思维对象、物质技术手段、物质工具三个方面的内容，在这三者之中，思维对象起着举足轻重的作用，它是指客观世界中事物之间的数量关系以及空间形式，在数学领域表现为由一系列数学概念、问题以及方法等建立的知识结构。从主观的角度而言，数学思维结构是指思维主体的认知能力，包括思维主体的语言、情感以及思维传统等。此外，数学思维结构还包括相应的方法、形式以及思维程序等。

#### (一) 数学思维的分类

为了方便数学思维的研究，根据不同的属性特征，将数学思维划分为不同的类别。尽管如此，不同类别之间也是相互联系的，并不会彼此独立。接下来介绍几种常见的分类方式。

(1) 根据思维指向的不同，可将数学思维分为两类：一是发散思维，二是收敛思维。发散思维的指向是多方向发散的，因此它也被称为求异思维，它以某个事实为出发点，通过多角度的思考，形成不同的答案。收敛思维则正好与之相反，思考方向最终汇聚到一点，因此它也被称为集中思维，它通过将诸多事实汇聚起来，沿着相同的方向思考，找到问题的答案。任何数学答案的探究，都离不开这两种思维，在解决数学问题时，需要将二者有机结合，才能探求更好的解决办法。因此，在数

学学习的过程中，应注重二者的共同发展。

(2) 根据数学思维方向的不同，数学思维又可以被划分为两种：正向思维和逆向思维。正向思维指的是，在解决数学问题的过程中，朝着通常思维方向努力，逆向思维则正好朝着相反的方向研究。在学习的过程中，两种思维模式的重要性相同，但对于大多数人而言，人们习惯用正向思维思考问题，常常忽略了逆向思维，因此需要特别注重逆向思维的培养。

(3) 在分析、解决数学问题的过程中，根据每一个步骤都以充分的理论或数据作为支撑，数学思维细分为两类：一是直觉思维；二是逻辑思维。在直觉思维中，想象力占据主导地位，将直觉判断作为思维基础，推理过程只要合情合理即可。而逻辑思维以理解力为引领，将概念视作判断的基础，推理过程中采用严格的逻辑推理。直觉思维以及逻辑思维之间是相互联系的，前者为后者指明方向，后者为前者做出检验。同时，从思维的发展运动规律来看，二者相互补充，同时通过中介思维，二者可以相互转化，彼此深化。

(4) 从纵向推理的领域来看，数学思维包括两类：一是归纳思维；二是演绎思维。前者指的是通过对个别事物的观察总结形成一般原理的过程，它一般包括收集事物的相关资料、观察比较这些资料、总结其中的规律，最后将诸多琐碎的细节整合成能够体现一定规律的整体。演绎思维则与之相反，指的是通过一般原理推断出个别结论的过程。简而言之，归纳思维是从特殊到一般的过程，演绎思维指的是从一般到特殊的过程，二者是推理的两个方向，只有将二者结合，才能充分发挥作用。

(5) 从横向扩展的方式来看，数学思维包括联想思维以及类比思维。前者指的是根据某种概念而想到其他与之相关的概念，具体又可分为三种：一是接近性联想；二是相似性联想；三是对比性联想。类比思维则指的是通过两个事物的相似特征，推断其他特征相似的过程。

(6) 根据结构是否具有创新性，数学思维被划分为两类：一是再现性思维；二是创造性思维。前者利用现有知识经验，遵循既定的程序解决问题的思维过程。后者指的是根据现有知识或者经验，对问题进行探索，挖掘新答案、找出新关系或者缔造新方法的思维过程。创造性思维与其他多种思维方式紧密相关，比如发散思维以及直觉思维等。同时，它也能与逻辑思维结合。

上述六种分类方式，是数学思维中常见的分类方式。这些相对独立又彼此联系的思维方式，是数学科学的重要组成部分，共同推动了数学科学的发展，实现了数学的崇高价值。<sup>①</sup>

---

<sup>①</sup> 孙延洲. 基于创新思维培养的中学数学教育研究 [D]. 武汉: 华中师范大学, 2012: 32—39.



## (二) 数学思维的不同方法

首先是所有思维活动都会用到的基本方法:

(1) 分析与综合。分析指的是将未知转变为已知,即通过看到的事物或过程,探究其产生的原因;综合指的是把已知的知识或经验应用到未知的领域,即通过事物产生的原因,推断、论证事物发展的结果。二者相互作用,交替运动,共同促进数学思维的发展。

(2) 抽象与概括。前者是指在复杂的事物中,提取某种属性进行深入分析的方法;后者指的是把个别特征、规律推广到一般事物的方法。数学领域的相关理论、方法、公式等,都是以经验概括为开端,以理论概括为终点,概括是抽象的最终目的,抽象是概括的基础。

其次,作为理论科学的方法:

(1) 演绎证明。具体又分为两种:一是演绎推理,二是数学证明。演绎推理是指从一般规律推及至特殊规律的过程;数学证明可以看成是前者的定向运动,能够确定猜想的正确与否。在数学思维中,演绎发挥着主导作用,决定着数学思维是否严谨,是否具有逻辑性。

(2) 系统化。系统化指的是重新组合研究材料,然后依据某种次序将其放入某种体系中。在数学理论领域,这种系统化指的是公理化方法,通过从具体到抽象再到具体的一系列过程,使思维得到发展。

除此之外,还有作为经验科学的思维方法:

(1) 观察和实验。该方法主要用于提供相关的证明材料。

(2) 归纳。由特殊推断出一般的方法,通过整理观察相关材料,提出并论证猜想的过程,在概括事物本质方面具有重要作用。

(3) 类比。这种方法普遍运用在发现问题、提出假设以及构建模拟,关键在于找到合适的模型。

(4) 联想与猜想。

## 四、数学思维的基本规律

在数学思维领域,同一律是它的基本规律,也是其必须要遵循的一般规律。同一律指的是思维的认识结果必须要同客观事物同一,也就是人们的理性分析结果要与客观世界同一,即反映的是主体与客体的同一关系,也就是在差异的基础上,保持同一。因此,从这个角度讲,运用数学思维得出的结论,应该能够反映客观世界中的数量规律,这一点也能从已有的数学结论中体现出来,比如划归思想、三角恒

等变换、数形中的等价变换等，这些都能够体现数学思维对同一规律的遵循。在培养和拓展数学思维的过程中，不仅要真实地反映客观世界中的事物关系，而且能够禁得起实践的推敲。此外，对于同一种事物的认识也应该保持同一性。在解决数学问题的过程中，也体现着同一性的规律。解决问题的思维过程，本质上是不断变换问题的过程，将问题逐渐转变成需要的形式，以便通过现有的知识就能够解决该问题。其实，整个变换的过程，就是数学思维同一性的展现。

在变换数学问题的过程中，如果存在差异，此时数学思维就应该按照思维的相似律解决问题。希尔伯特曾经对数学科学进行了阐述。他认为，数学科学是一个整体，各部分之间存在着紧密的联系，虽然数学知识种类繁多，内容千差万别，但使用的逻辑工具是一样的，概念、理论以及方法等存在着一定的亲缘关系，不同组成部分之间也存在相似之处。因此，数学思维中求同存异是普遍现象，异中求同以及同中辨异也成为解决数学问题中的常用过程。例如，解题过程中的一题多变，或是一题多解，以及题型归类等，都遵循了相似规律。这种规律具体体现在联想、类比以及化归等方法上。在教学的过程中，教师应该不断引导学生对相似因素的认识，加深对相似关系的理解，以使他们深层次地掌握数学科学的内部规律，进而增强思维的灵活性和创造性。

现代自然科学把经验的主体延伸至个人，即个体的经验可以通过祖先的经验而直接获得。比如，现在的学生能够直接应用数学公理解决数学问题，不需要证明，这是积累遗传规律的直接体现，这种规律也有效推动了数学思维的发展。

### 第三节 数学学习与思维发展

目前，高中数学教学中关于发展学生思维的研究主要集中在数学思维发展与数学教学的关系上，具体体现在高中生数学思维的发展以及数学教学过程对数学思维的影响。

#### 一、高中生数学思维的发展

学生思维的养成取决于先天的遗传及生理成熟，思维发展源自实践活动，而且决定思维发生发展的因素是教育及环境的后天影响。推动数学思维发展的外部因素是通过数学教学指导高中生思维发展，基本表现在教学过程中，以引导学生掌握并领会知识，从而实现数学思维在数学教学中的目的。



### (一) 高中生数学思维发展的动力

开展数学活动时,存在关于数学思维发展的基本矛盾,即旧有的数学水平与学生新的需求之间的矛盾,这种矛盾推动了数学思维的发展,尤其在数学问题方面体现得较为明显。主观存在及客观需要是解题者与问题系统的综合体,也就是数学活动与解题者的心理发展水平间的矛盾,并通过这个矛盾,推动数学思维活动的发展。

以上问题系统基本上由教师或高中生从自身出发提供问题情境。首先,学生从自身出发创设问题情境,从而得到及时认知,最终引起教师对兴趣的探究并加以解决;其次,教师从学生既有的主观状态出发,根据数学思维发展的相关动机系统,比如欲望、目的及兴趣等因素,提供给学生适合其发展的问题情境,最终开启学生的数学思维能力。因此,在课堂教学中,数学教师务必主动推动学生动机系统的发展,且要创建一种适合学生思维发展的问题情境,其中最为典型且有效的动机因素是兴趣,通过这一动因将更好地推进数学思维的发展。

研究表明,在学习中能够激发儿童及青少年努力学习的基本动因是兴趣,有了兴趣学生才能更好地接受知识,教师的教学成果也能得到更好地展现,而对教师教学效果进行评价的基本标准便是学生对数学的热爱程度。因此,在平时的课堂教学中,教师应当多引入数学史、趣味数学等趣味性内容。培养学生在数学方面的审美能力,不仅可以提高学生的学习兴趣,还能有效提高学生的数学思维能力。提高学生的数学思维,其客观因素体现在创设问题情境,而数学情境为学生开展数学思维活动提供了可能。为提升原有学生的心理水平及数学思维,可通过创设更优秀的情境来提高学生的数学思维能力,充分发挥教师在课堂上的主动性。

教师为使学生在教学过程中全面理解教学内容,自身的数学思维得到一定程度的提升,可在生活、生产或数学故事中创设疑点,并针对矛盾提出解决方案,也可以借助数学发展过程中遇到的矛盾冲突,帮助学生更好地学习。

然而,值得注意的是,创设问题情境需贯穿数学思维的全过程,让学生能够在多样化的问题情境中养成全面的数学思维。

### (二) 高中生数学思维发展的结构序列与年龄特征

高中生在课堂学习中的数学思维活动可按抽象概括水平由低到高分成三个层次:直观行动思维、具体形象思维和抽象逻辑思维。

(1) 直观行动思维。这种思维存在于学生的操作及感知过程中,直接关乎物质活动,在数学思维中抽象概括水平最低,这是最初的个体发展数学思维,会逐渐减少抽象思维,而倾向于具体形象的思维;其次,朝着更高水平操作的思维发展,其

中涵盖了抽象逻辑成分及形象思维。

(2) 具体形象思维。这种思维模式常见于头脑中存留的事物形象,可以不借助时下的动作和直接刺激物,思考过程中可借助抽象的事物进行发挥。基本表现为如下两点:①随着个体语言及抽象逻辑成分的渗透,使得具体的形象思维发展成为形象逻辑思维。②借助言语作用及表象概括,使得具体形象思维发展为抽象逻辑思维。

(3) 抽象逻辑思维。这种思维模式基于感性认识上的基础材料,不再受限于具体形象,而是通过推理、判断及概念等各种认识形式,从而实现对客观概括的、间接的反映。该思维对各种事实材料进行综合分析,并以理论为指导,推出理论型抽象逻辑思维。同时对推理、判断及概念的灵活性加以反映,从而得出具有一定的矛盾可变性及灵活性的辩证思维。

对高中生的思维进行研究可知,理论型抽象思维是该阶段学生的特性,而且思维机构也会倾向于辩证思维。不过,对高中生在年龄增长方面出现的思维特点,可从如下几个方面进行探讨:①思维发展的稳定性。社会条件的变化,较难影响学生在不同年龄段系统而又顺序性的思维特征。②思维发展的可变性。从某种意义上讲,思维发展的进程得益于教育及环境,其中加速思维的发展,不过也是循序渐进的,而非超越思维发展中的一些阶段。③思维发展的层次性。高一级的思维形态的出现,标志着在原有的思维结构中出现了新的思维,以促进低层次的思维形态不断向高水平发展,即各种不同层次的思维共存。从而使得低层次的思维朝着高水平迈进。④思维发展的突变性。思维发展的突变性基本上遵循从量变到质变的过程,最终形成关键的思维年龄。通常情况下,学生的数学思维随着年级的增加呈现出较低的可塑性,高三年龄差异化在可塑性方面逐渐减少,从而引起更大的个性显著性。

在组织数学教学中,教师需基于高中生的思维发展的年龄特征开展相关工作。基于高中生具体的数学学科特性及不同年龄段的思维发展,对学生的思维能力进行分层次、有计划的开拓,从而使得经验型抽象思维朝着理论型抽象思维的方向发展。这就对教师提出了一定的要求。在编写教材时,需对学生思维发展所处的阶段性特点加以考量,且在规划教材的知识结构时,应当将学生的心理水平作为参考,从而使得思维的发展更具层次性。基于学生不同的年龄特征推动学生的思维能力建设,以此适应思维发展及思维训练。教师可基于学生的“最近发展区”来设计教学程序,使得教学具有一定的强度,从而提升学生的思维结构水平。此外,较为重要的是思维发展的关键时期是高一下学期,这一学期的思维发展直接影响往后思维的优化提升。



### (三) 高中生数学思维发展的特点

学生的抽象逻辑思维位于整个高中阶段的主要位置,在这一阶段呈现的抽象逻辑思维具有一定的反省性和假设性。具体表现如下:

(1) 通过假设进行思维。这种思维方式基本遵循,首先提出问题,其次对问题加以明确,然后提出假设,最后依据假设进行检验的步骤。

(2) 思维的预见性。思维的预见性得益于思维的假设性,通常思维主体从事复杂的活动时,会考虑计算、计划、方案及策略等可预见的因素。

(3) 思维的形式化。这种思维成分主要的变化是由原来的具体运算思维,发展过渡至形式运算占上风。

(4) 自我意识和监控能力在思维活动中表现得较为明显。在数学思维中,高中生的监控能力及自我意识随着预见性思维的出现,呈现出一定程度的发展。以此使得高中生更好控制智力活动,从而发展直觉思维能力。而高中生较为显著的思维特征是抽象逻辑思维具有的反省、形式及假设等特点,推动创造性思维或思维独创性的发展。高中生的思维发展到新的阶段较为明显的特征是高中生对结构性、系统性及个人色彩的追求,教师应当将拓展创造性思维作为数学教学的一项重要工作,采用灵活且开放的教学方法,激发学生主动提出问题并找到新解法、新观点。熟练掌握事物的发展规律,探究重要的科学理论,推动理论型抽象思维的发展。这一过程涵盖从一般到特殊的归纳总结,还涉及从一般到特殊的演绎,也就是做到了抽象与具体的完整统一,为辩证逻辑思维的出现提供了有利条件。在数学教学中,为发展并促进学生的理论思维,通常要做的是结合学生的观察、运算、实验及解题等实践活动,以及发现活动、应用及理论学习,从而便于教师更好地开展数学教学。

## 二、数学教学过程与数学思维发展

基于对高中生数学思维的发展研究,很有必要审视数学思维与数学课堂教学过程之间存在的关系,这些操作可以决定教师发展数学思维的最终成效及具体操作。

### (一) 高中数学教学过程的实质

通过数学思维活动开展数学教学,且在这种数学思维过程中,既采用有序的编码系统对数学知识结构进行梳理,又通过数学知识推动数学思维的发展。因此,方法论及知识两种因素构成了数学思维过程。换句话说,所谓的数学思维过程是教师在教学中发挥一定的指导作用,而学生可在老师的指导下借助数学思维活动,对数学家的思维活动成果展开学习,从而发展成数学思维能力的过程。在数学教学过程

中,教师担任参与者与组织者的角色,并在调控教学过程中发挥着主导作用。其中,教师在课堂上同样担负起如下一些重要任务:①将数学知识结构作为依据,在数学家展开思维活动的过程中,重视高中生的思维水准,以此制定学生的学习序列。②对学生的思维活动加以指导并调控,保持学生的思维活动与成功的数学思维活动处于同一个频率下,从而促使学生的思维结构更加倾向于数学家的思维结构,以此得到一定的思维成果。③针对不同思维活动的分析,并从中帮助学生找出思维中存在的漏洞,从而得出思维的方法、技巧及规律。总而言之,在数学教学中,教师采用创造性的思维活动,旨在对数学家的思维进行重现,以此转变教师的主导性为学生的主体性,从而创造出以学生为主体的数学思维。而数学思维的对象为数学知识,将各种思维形式应用于不同的环节。因此,教师在教学过程中应将数学思维应用于不同的层次及环节,从而使得数学思维中的基本单元和基本方法得以凸显,同时保持学生的思维在聚合及发散的冲突中创建理想的思维结构。高中数学思维模式分为以下四种:

(1) 数学思维的操作模式。这种模式直接应用公式、法则及方法,是常见的数学思维的操作模式,如消元法、待定系数法及换元法等。该方法可帮助学生熟悉数学知识,有助于习得学习技能,从而掌握基本的教学方法。数学方法是指方法、法则和公式等的直接应用,比如换元法、待定系数法、消元法等都是常见的数学思维的操作模式,它有利于熟悉数学知识,形成数学技能,掌握基本的数学方法。

(2) 数学思维的机理模式。这种模式具有一定的逻辑性、理性,常见形式为数学原理,比如分类原理、加法原理、乘法原理、反证原理、构造原理、数学归纳原理、对称原理等,从而使得学习者可以对方法及法则的机理展开学习,避免出现机械式的学习。

(3) 数学思维的动态模式。该模式立足于普遍联系的哲学规律,广泛应用数学知识,像极限思想、优化思想、数形结合思想、普遍性与特殊化思想等各种动态模式,它将实践和数学知识之间进行关联,从而达到对知识的深刻认知。

(4) 数学思维的工具模式。针对出现的问题,采用数学思维对其进行处理,比如模型化意识、抽象化意识、量化意识、符号化意识等,这些工具模式兼具数学创造及再生的品质,可以帮助学习者解决挑战性问题。

总之,积累那些基础的思维材料,可采用数学思维模式进行操作,而对其进行消化及系统化,通常采用原理模式,对其掌握的话可采用的是动态模式,实现可运用操作可借助工具模式。

以上四种思维模式,将随着数学知识的不断深入发展,学生的思维也将相应地得到提高,哪怕学生有一天忘了概念公式,通过这四种思维模式同样可对问题进行