

# 数学教学与思维创新的融合应用

唐小纯 著

吉林人民出版社

# 前 言

教学中的教，一是把知识或技能传给学生，教会学生用思维进行学习；二是教导和教育学生获得正确的品质。学，主要指学习或模仿。教学总是与学生、课程联系在一起，指学生在有教师的指导下学习课程知识的活动。根据教学的育人意义，教学总要在一定的活动中进行，因此教学是一种认识活动，是教师教学生获得知识和形成能力的活动，据此，人们通常把教学看成教学认识活动。

对教学数学、掌握数学知识的动力、工具和武器。在数学教学活动中，教师要把传授知识与数学思维能力的培养融合应用起来，既要重视知识的思维过程，又要重视学生的思维发展，使客观知识的思维与主观认识的思维达到同步和协调。为此，要改变重知识的结果，轻形成知识的思维过程，重知识的掌握，轻获得知识的认识方法的传统习惯做法。在学生合理掌握知识的前提下，获得相应需要的数学思维能力。在数学教学活动中，数学知识与数学思维是紧密联系而不可分离的。掌握一定的知识，就会获得相应的思维方法并形成相适应的思维能力；具备一定的思维能力，表明已获得了相应的思维方法，就会促进新学习的认识效果并积累更加丰富的知识，进而形成更加广泛的数学思维能力。

如何发展学生的思维，培养学生的思维能力？根据认识活动的表现，人类任何认识活动都不可能离开具体的对象。在认识活动中，主体的表现总是积极的、主动的，因此会不遗余力地借助于思维的力量，寻找和唤醒原有认识图式中的知识和经验同化于客观事件的问题信息，以完成认识活动的任务。

本书的完成得到了笔者一些同事的帮助，在此表示由衷的感谢。在本书撰写过程中参阅了大量的文献，谨向这些文献的作者表示衷心的感谢。由于时间仓促，笔者水平有限，书中可能有所疏漏，也在此表示诚挚的歉意。

# 目 录

<b>第一章 数学教学概述</b> .....	<b>1</b>
第一节 数学教学过程及原则 .....	1
第二节 数学教学方法与数学教学模式 .....	4
<b>第二章 数学思维能力在数学教学中的培养</b> .....	<b>10</b>
第一节 教学思维与教学思想方法 .....	10
第二节 数学能力的培养与发展 .....	15
<b>第三章 在数学教学创新思维中创造性能力的提升</b> .....	<b>23</b>
第一节 创造性思维的形式 .....	23
第二节 创造性思维品质与创造性人才的自我设计 .....	27
第三节 创造性思维能力的培养 .....	30
第四节 解决数学问题与培养创造能力 .....	39
<b>第四章 思维创新在数学学习中的融合应用</b> .....	<b>45</b>
第一节 理性思维在数学学习中的应用 .....	45
第二节 操作思维在数学学习中的应用 .....	79
第三节 形象思维在数学学习中的应用 .....	86

<b>第五章 数学教学与创造性思维的融合应用 .....</b>	<b>94</b>
第一节 知识经济需要创新性人才 .....	94
第二节 数学创造性思维的含义及特征 .....	95
第三节 数学创造性思维的结构和产生的条件 .....	98
第四节 数学创造性思维的培养途径 .....	100
第五节 数学猜想能力的培养问题 .....	104
<b>第六章 数学教学与思维创新的融合效果评价 .....</b>	<b>107</b>
第一节 总结性评价的运用 .....	107
第二节 形成性评价的运用 .....	110
第三节 诊断性评价的运用 .....	114
第四节 多元性评价的运用 .....	116
<b>参考文献 .....</b>	<b>118</b>

# 第一章 数学教学概述

## 第一节 数学教学过程及原则

### 一、数学教学及其过程

数学教学理论是人们对数学教学现象及其规律的一种系统化的理性认识，是数学教学的感性经验上升为理性认识后的一种表现形态。要科学理解数学教学理论并合理运用，就需要认识什么是数学教学，并由此而认识什么是数学教学的过程。

#### （一）数学教学的内涵

数学教学是数学活动的教学。现代数学哲学研究认为，数学不仅是一门知识，更是人类实践活动创造的产物，是一个由问题、方法、语言、命题及理论等多种元素组成的复合体。认识数学的本质特征，不仅要从静态的知识表征来看，还要从动态的数学活动过程来看。结果是一种组织得很好的形式状态，而组成教学整体的另一个非常重要的方面是数学活动的过程。从总体上来说，数学是思维的活动过程，是数学真理的抽象概括过程。

#### （二）数学教学的基本特点

一般教学都具备教育性、师生互动性、双边性等特点。由以上对数学教学的分析表明，数学教学除了具有一般教学的特点之外，还具有不同于其他学科教学的一些基本特点。

### 1. 数学语言的教学

数学语言是数学的一个本质特征。语言活动是一项重要的数学活动。无论是数学活动的出发点，还是数学活动的最终结果，都必须借助数学语言才能得到准确的表述。数学教学中，学生除了要有领会一般的自然语言的能力外，还需要逐步了解和掌握数学中独有的语言特点。

现今基础教育中数学内容都突出了数学的语言成分，“用数学语言进行交流和良好的符号意识”是学生重要的数学资质。我国在义务教育新课标中指出：数学为其他科学提供了语言、思想和方法，是一切重大技术发展的基础；数学语言是人类文化的重要组成部分等。提出了用数学语言交流、讨论、表达、阅读等目标要求。

### 2. 数学思维的教学

数学被誉为思维的体操，数学教学的重点是发展学生的数学思维。然而，锻炼思维并非是数学学习的必然结果。由于数学活动大多情况下是抽象的形式化的思维活动，数学教学中就存在着既要在学生已有的思维水平上进行学习，又要结合学习不断发展学生的思维。若数学活动仅限于数学知识的记忆和方法的模仿，则既不利于数学知识的掌握，也不利于学生思维水平的提高。数学思维包括思维的内容，思维的方式和思维品质三个方面，教学中必须将这三个方面协调发展，形成用数学思考的意识。

### 3. 解题的教学

数学教学的重要环节是解题训练。每节数学课都离不开数学题，例题示范，学生口头演算、书面练习、动手实验等。选择好例子，精心选题和编题，是教师教学的重要工作。数学解题教学一方面帮助学生理解概念、巩固法则，应用数学知识。另一方面，学生在解题活动过程中，通过观察、分析、比较、联想、顿悟、尝试错误等思维活动，不断提高数学思维能力。

### 4. 数学探究的教学

学生要创造性地学习数学。数学活动不同于实验学科，偏重于动手操作，也不同于科学研究偏重于调查取证，而是一种以独立思考、深入钻研数学问题为主的思维探究活动。从数学知识的形成来看，它是数学家经过观察、实验、分析、比较、类比、归纳、联想等探索活动后，对丰富生动的数学对象的内容经过抽象概括后才形成了演绎的理论体系。因此，作为特殊认识活动的数学学习不仅要重视概念、法则、定理和方法等结果性知识的获得，更应重视获得知识的探究过程。学生要在教师的引导下，像数学家从事数学研究一样，去质疑、发现、归纳、判断，经历再创造的过程，获得一种基于体验的过程。

### （三）数学教学过程及其要素

数学教学实践中一系列问题如何解决和解决得好不好，都取决于对教学过程及其构成要素的认识和理解。

#### 1. 数学教学过程的内涵

数学教学过程就是指数学教师组织和引导学生，系统地学习和掌握数学知识，进行积极的思维活动，形成良好的认识与发展相统一的育人过程。从结构上看，它是一个由教师、学生、教学目的、教学内容、教学方法、教学环境、教学评价等要素构成的多维结构；从性质上讲，它是一个由师生共同参与、共同发展，有目的、有计划地认识和交往实践的数学活动过程；从功能上看，它是一个具有数学知识传递、数学技能形成、数学能力培养、个性发展等功能的育人过程。

#### 2. 数学教学过程的要素分析

数学教学过程是由多种因素构成的一个复杂系统。主要因素是：教师、学生、教学目的、教学内容、教学方法、教学环境、教学评价。这七个要素制约着数学教学过程能否顺利开展，影响着数学教学的进程。

首先，教学为谁而组织的？是学生。其次，依据什么进行教学？是数学教学目标。第三，凭什么去完成？是数学教学内容。第四，怎样去进行教学？是数学教学方法。第五，在什么条件下开展？是教学环境。第六，开展得如何？是通过数学教学评价。第七，由谁在组织？是教师。

数学教学过程的各个要素是相互依存、相互作用、相互制约，形成一条完整的教学链。数学教学过程的效率不仅取决于单个构成要素的水平，而且取决于各要素之间动态组合形成的“合力”水平。在实际的数学教学活动中，数学教师必须善于全面地把握诸要素，处理好各要素之间的关系。

## 二、数学教学原则

数学教学原则是指导数学教学的一般性原理，是进行数学教学活动应遵循的基本要求，认识和把握数学教学原则能有效地开展数学教学。

### （一）数学教学原则的含义

教学原则是人们根据对教学规律的认识而制定的，来自教学实践，又指导教学实践。教学规律就是教学内部所包含的矛盾关系。数学教学原则就是依据数学教育目的、数学教学目标，反映数学教学规律，综合数学教学实践，为解决数学教学的基本矛盾而制定的指导数学教学的基本要求。数学教学原则的本质特征就是转化贯穿于整个数学教学过程的基本矛盾关系，是具体的可操作性的策略性知识，是促进数学学习和教学活动有效开展的条件，数学教学既要遵循一般教学原

则,又要遵循区别于其他学科的特殊教学原则。因此,本节在讨论一般教学原则对数学教学指导的同时,着重讨论基础教育阶段处理数学教学过程中基本矛盾的原则。

### (二) 数学教学的具体原则

在国内外教育学和数学教育学方面的著作中有关教学原则的论述,是因各自时代不同,研究的角度和理论基础不同,教学原则的表述、条目等各不相同及自身的价值和学生的发展需要决定的。

此原则的贯彻要求教学中以形成化知识体系的学习为载体,从数学思维的内容和思维方式等方面全方位地训练和培养学生的思维能力,从而使学生会用数学去思考和解决问题。

### (三) 独立钻研与合作探讨相结合的原则

这一原则既反映了数学活动的特点,又反映了学生主体的地位和作用。在教学过程中,学生“应干什么”,并不表示学生“能干什么”和“在干什么”。这是为解决数学教师教的主动性与学生学的适应性之间的矛盾关系而提出的基本要求。这是由数学活动的特点和学生主体的地位和作用决定的。此原则的贯彻应突出学生主体独立性的培养、活动能力的培养、多种活动机会的创设。

## 第二节 数学教学方法与数学教学模式

### 一、数学教学方法

任何教学活动的开展,数学教师都要使用一定的教学方法。当教学内容和其他条件确定后,教学方法将是取得预期数学效果的决定因素。如果教师对教学方法的相关理论有较明确的认识,并能合理地选择,将会直接影响数学课堂的教学质量。

#### (一) 数学教学方法的内涵

对数学教学方法的本质理解,关键取决于对数学教学过程中师生地位、作用的认识理解,在近代和现代教育史上争论激烈的两派就是“教师中心论”和“学生中心论”。这两派是在师生双方地位和作用上的两种极端观点,将教与学的关系看成一种直接的、简单的教育者与受教育者的关系。辩证唯物主义观点指出“内因是变化的根据,外因是变化的条件”。在教学活动中,教师是教育者,在教学中

起主导作用；学生是教学的对象，是学习的主体，教和学两者是相互依存、相互作用的关系。

由上分析，数学教学方法是在数学教学过程中，教师和学生为达到数学教学目标，完成数学教学任务而采取的教与学相互作用的活动方式的总称。它包括教师的工作方式、学生的学习活动方式及其相互作用而形成的统一体。

## （二）数学教学方法的形成与发展

任何教学方法都是由教师、学生、知识及知识的载体这四个基本要素所组成。由于这四个基本要素的发展变化，必然形成千差万别的不同教学方法。了解当前我国数学教学方法的形成与发展过程，有助于更好地认识数学教学的改革与发展。

### 1. 数学教学方法形成途径

当前，我国数学教育界形成数学教学方法的途径主要有两个：

（1）改进传统的数学教学方法。通过反思传统的数学教学方法的优点与不足，经过实验改进形成新的方法，并对课堂中所占的时间位置进行优化组合。

（2）依据国外较有影响的的教学理论指导，结合国内的数学课堂教学实际，进行实验、改进而形成。

### 2. 数学教学方法的发展特点

数学教学方法的发展，受许多因素的影响。在一定社会发展条件下，数学教学方法除了继承以前的教学实践中行之有效的方法之外，还反映了当时的时代特征和倾向，并且向着有利于促进学生发展的方向不断改进。

（1）追求目标的综合性。

（2）追求情感的交互性。

（3）追求方法的综合性。

## （三）数学教学常用的教学方法及其基本要素

理解和掌握数学教学中常用的教学方法的特点，有助于正确的选择和运用。由于数学教学是数学活动的教学，本书按照数学活动的外部形态及这种形态下学生认识活动的特点，将数学教学方法分成三类，即以教师呈现为主、以师生互动为主、以学生活动为主的三类方法。

### 1. 以教师呈现为主的方法

#### （1）以教师呈现为主的方法概述

以教师呈现为主的教学方法是指通过教师向学生单向性传递信息的教学方法，学生是一种接受性学习。教师在课堂中呈现的方法主要有语言、文字、声像、实物等四类呈现行为。其中，语言呈现是指口头语言行为；文字呈现是指通过板

书、数学教材等书面文字向学生传递知识的行为；声像呈现是指通过计算机、录像等媒体向学生传递多种视听信息的行为；实物呈现是通过具体实物模型、教具向学生提供形象材料的行为。

### （2）讲授法

讲授法是教学史上最主要、最常用的教学方法，是教师对教材内容进行系统分析后，通过简明、生动的语言向学生传授知识，学生主要以观察、思考、聆听、记笔记等手段进行学习的方法。从教的方面看，它是一种传授的方法，从学的方面看，它是一种接受性的学习方法，它不要求学生有对应的互动行为。对一名教师来说，掌握讲授法至关重要。实际教学中，讲授法可以表现为讲述、讲解、讲读和讲演等不同的形式。教师呈现为主的方法应用要求以教师呈现为主表明教师就是主要的信息源，应用时一般要求：

首先，科学地组织数学内容。教师要力求知识信息系统、准确，做到将知识与思想方法、智力与非智力因素相融合，要将教材静态的学术知识加工组织成既有逻辑意义又符合学生身心发展需要的教育知识。其次，充分发挥数学教学语言的艺术魅力。以教师呈现为主，表明学生处在被动支配地位，因此，要求教师必须语言简明扼要，针对性强、生动形象，富于启发和感染力。

### 2. 以师生互动为主的方法

#### （1）问答法

问答法是数学教学中最常用、最主要的互动交流方法。在启发式教学原则中，我们所介绍的苏格拉底的“产婆术”就是采用问答法进行的。它是教师不直接讲解教材，而是通过教师提出问题，引导学生积极思维，学生回答教师的问题的教学方法。

#### （2）讨论法

讨论法是师生之间的又一种互动方式。它是在教师组织引导下，学生以全班或小组为单位，围绕中心问题，通过讨论或辩论活动，进一步完善和深化对问题的理解、评价或判断的教学方法。

### 3. 以学生活动为主的方法

以学生活动为主的教学方法，是指教师组织和引导学生通过独立的演习和探究活动获得知识和解决问题的方法。此方法中，教师实现任务的方式既不像呈现行为时具有绝对的自主性，也不像师生互动时具有交往性，它是以组织和指导的方式辅助学生进行自主学习的数学方法。

#### （1）练习法

练习法是在教师辅助下，学生通过独立练习成功完成课堂练习的教学方法，也就是一种训练性学习的方法。练习的类型一般有：口头练习，内容涉及数学概

念、原理、方法等简要问题，特别是易混易错之处；书面练习，这是针对教材重点、难点、关键点等有计划进行的练习。

## （2）发现法

美国心理学家布鲁纳在20世纪70年代初写的《教育过程再探》一书中，对“怎样教法”问题的回答中，提出发现学习。它是教师从青少年好奇、好问、好动的心理特点出发，提出课题并提供一定的材料，引导学生运用分析、综合、抽象、概括等，获得概念和原理的教学方法。布鲁纳认为，学生要像一名数学家那样思考“数学”，像一名史学家那样思考“史学”，他认为教一门课程，不但要在学生大脑中建立一个小型图书馆，而且应该使他们成为知识的发现者，而不只是消极的接受者。关于此方法的优点，布鲁纳提出四点：第一，提高智慧潜力；第二，使外来动机向内在动机转移；第三，学会发现的探究方法；第四，发现中获得的知识有助于记忆。

## 二、数学教学模式

由于数学教学过程是一个认识和交往实践两个方面相统一的活动过程，数学课堂中追求教学方法的有效整合成为数学的必需。“最优化方法体系不是所有可能的教学法建议的随意堆砌。”如果不能对各种教学方法进行合理组合，就会显得教学方法杂乱无序。基于此，有必要对数学课堂教学的模式进行研究。

### （一）数学教学模式构成的基本要素

数学教学模式的结构是指发生在数学教学过程中构成教学的诸要素以及这些要素间的相互关系。这些要素在构成数学教学模式中具有不可或缺、不可替代的性质。一个成熟的教学模式应至少包括以下五个基本要素：

#### 1. 理论基础

理论基础是构成教学模式诸要素的核心和灵魂。影响和制约数学教学模式的理论基础主要是哲学观和数学观、数学学习理论和教学理论。它们决定着教学模式的方向和独特性，并渗透在教学模式中的其他各因素中，制约着它们之间的关系。基于理论不同，所形成的教学模式也不同。

#### 2. 教学目标

每一种教学模式都是针对某种特定的教学任务而设计、创立的。由于数学课堂教学目标是进行数学课堂教学活动的出发点和归宿，是构成教学模式的核心因素。因此，明确的教学目标可以克服教学活动中的盲目性和随意性。它制约了教学程序、实施条件等因素，也是评价教学模式是否科学合理的标准。

### 3. 操作程序

成熟的教学模式都有一套相对稳定的操作程序，这是形成教学模式的本质特征之一。教学模式是一种具有明确操作程序的多环节有机结构，是将各环节的教学方法有机衔接起来的教学方法结构体系，每个环节都有相应的任务和目标。教学方法不是数学模式的子概念，只是教学模式结构中的一个基本元素。

### 4. 实施条件

任何一种教学模式都不是万能的，有的只能适合于某一类课型，有的适用于几种不同的课型。数学概念课、命题课、练习课、复习课等不同的课型所适用的教学模式是不尽相同的。即使是同一种教学模式，在具体实施过程中，在教学策略上也存在较大的差别。

### 5. 教学评价

教学评价作为建构教学模式的要素，关键是要看评价的目的。数学教学的目标不是以单一的学业成绩来评判，而是从知识与技能、过程与方法、情感态度等多维视角来全面评价学生的发展。评价目标决定了数学教学活动的有效特征，也决定了教学模式的合理性。

## （二）数学教学模式的基本类型

### 1. “讲解—传授”

“讲解—传授”模式是源于苏联凯洛夫的《教育学》，经我国的实践改变，成为我国课堂教学常见的“五环节教学模式”，即：复习—导入—讲解—巩固—小结。它首先是让学生复习旧课的内容；接着教师设计适当的引言或例子把学生的积极性调动起来；进入新课讲授环节，传授知识；然后是练习巩固，使学生掌握知识与技能；最后是小结和布置课后作业。

### 2. “引导—发现”教学模式

“引导—发现”教学模式，也称发现模式。此模式就是以启发教学原则为指导。基于布鲁纳的“发现”观点建构而成的。第斯多惠也曾指出“一个坏的教师奉送真理，一个好的教师则教人发现真理”。“引导—发现”教学模式是指在教师的引导下，学生经历观察、探索、推理、验证等实践活动，通过独立思考、讨论、合作等方式，发现问题、获取新知识的过程。

### 3. “自学—辅导”教学模式

为了应对经济全球化的激烈竞争和挑战，未来社会成员的自学能力成为社会的焦点。“自学—辅导”教学模式是在教师的辅导下，学生自学、自练、自检获得知识、发展能力的一种教学模式，简称“学导式”教学模式，顺应了时代发展的需求。

心理学研究表明，自学能力在创造性心理因素中的作用居于突出地位。“自

学—辅导”教学模式中,突出学生自主性、自觉性、独立性的培养,教师通过给出自学提纲,提供一定的阅读材料和思考问题的线索,起着辅助、启发、点拨的作用。

#### (2) “自学—辅导”教学模式应用的基本要求

“自学—辅导”教学在培养学生掌握自学方法,提高学习成绩及能力迁移等诸多方面具有强大的生命力。自学并不是放任自流,应用时一般要注意如下几个方面:注重处理教材、活化教材,提供良好的自学条件;实行有针对性的、切合实际的个别辅导;讲评应该要做到内容精讲,评价形式多样。

#### 4. “问题解决”教学模式

“问题解决”教学模式是指在教师的引导下,学生综合地、创造性地运用各种数学知识和方法去解决问题的教学模式。此处的“问题”是指非常规性问题(或称非单纯练习题式问题)。由于非常规性问题常常是错综复杂,解决的手段和方法也多种多样,不可能寻找一种固定不变的解决模式,但是总结出问题解决的一般课堂结构,有助于教师更好地运用问题解决教学策略。

## 第二章 数学思维能力在数学教学中的培养

### 第一节 教学思维与教学思想方法

学习数学，不仅要掌握数学的基本概念、基本知识和重要理论，而且要注重培养数学思想，增强数学素质，提高数学能力。数学教学的效果和质量，不仅仅表现为学生深刻而熟练地掌握系统的数学学科的基础知识和形成一定的基本技能，而且表现为通过教学发展学生的数学思维和提高能力。

数学的教学过程中，经常采用的思维过程有：分析——综合过程，归纳——逻辑过程，特殊——概括过程，具体——抽象过程，猜测——搜索过程，并且还会充分运用概念、判断、推理等的思维形式，从思维的内容来看数学思维有三种基本类型：一是确定型思维，二是随机型思维，三是模糊型思维。所谓确定型思维，就是反映事物变化服从确定的因果联系的一种思维方式，这种思维的特点是事物变化的运动状态必然是前面运动变化状态的逻辑结果。所谓随机型思维，就是反映随机现象统计规律的一种思维方式。具体一点来说，就是事物的发展变化往往有几种不同的可能性，究竟出现哪一种结果完全是偶然的、随机的，但是某一种指定结果出现的可能性则是服从一定规律的。就是说，当随机现象由大量成员组成，或者成员虽然不多，但出现次数很多的时候就可以显示某种统计平均规律。这种统计规律在人们头脑中的反映就是随机型思维。确定型思维和随机型思维，虽然有着不同的特点，但它们都是以普通集合论为其理论基础的，都可以分明地精确地进行刻画，但是在客观现实中还有一类现象，其内涵、外延往往是不明确

的常常呈现“亦此亦彼”性。为了描述此类现象，人们只好使用模糊集论的数学语言去描述，用模糊数学概念去刻画。从而创造了对复杂模糊系统进行定量描述和处理的数学方法。这种从定量角度去反映模糊系统规律的思维方式就是模糊型数学思维。上述三种思维类型是人们对必然现象、偶然现象和模糊现象进行逻辑描述或统计描述或模糊评判的不可缺少的思维方法。

数学思维的方式，可以按不同的标准进行分类。按思维的指向是沿着单一方向还是多方向进行，可以划分为集中思维（又叫收敛思维）与发散思维；根据思维是否以每前进一步都有充足理由为其保证而进行，可以划分为逻辑思维与直觉思维；根据思维是依靠对象的表征形象或是抽取同类事物的共同本质特性而进行，可以划分为形象思维与抽象思维。现在有人又根据思维的结果有无创新，将其划分为创造性思维与再现性思维。

### 一、集中思维和发散思维

集中思维是指从同一来源材料探求一个正确答案的思维过程，思维方向集中于同一方向。在数学学习中，集中思维表现为严格按照定义、公式、法则等。使思维朝着一个方向聚敛前进，使思维规范化。

发散思维是指从同一来源材料探求不同答案的思维过程，思维方向发散于不同的方面。在数学学习中，发散思维表现为依据定义、公式和已知条件，思维朝着各种可能的方向扩散前进，不局限于既定的模式，从不同的角度寻找解决问题的各种可能的途径。

集中思维与发散思维既有区别，又是紧密相连不可分割的。例如，在解决数学问题过程中，解答者希望迅速确定解题方案，找出最佳答案，一般表现为集中思维：他首先要弄清题目的条件和结论，而在这个过程中就会有大量的联想产生出来，这表现为发散思维：接下来他若想到有几种可能的解决问题的途径，这仍表现为发散思维；然后他对一个或几个可能的途径加以检验，直到找出正确答案为止，这又表现为集中思维。由此可见，在解决问题过程中，集中思维与发散思维往往是交替出现的。当然，根据问题的性质和难易程度，有时集中思维占主导地位，有时发散思维占主导地位。通常，在探求解题方案时，发散思维相互突出，而在解题方案确定以后，在具体实施解题方案时，集中思维相对突出。

### 二、逻辑思维与直觉思维

逻辑思维是指按照逻辑的规律、方法和形式，有步骤、有根据地从已知的知识和条件推导出新结论的思维形式。在数学学习中，这是经常运用的，所以学习数学十分有利于发展学生的逻辑思维能力。直觉思维是未经过一步步分析推证，

没有清晰的思考步骤，而对问题突然间的领悟、理解得出答案的思维形式。通常把预感、猜想、假设、灵感等都看作直觉思维。亚里士多德曾说过：“灵感就是在微不足道的时间里通过猜测而抓住事物本质的联系。”布鲁纳说：“在数学中直觉概念是从两种不同的意义上来使用的：一方面，说某人是直觉的思维者，意即他花了许多时间做一道题目，突然间做出来了，但是还须为答案提供形式证明。另一方面，说某人是具有良好直觉能力的数学家，意即当别人向他提问时，他能够迅速做出很好的猜想，判定某事物是不是这样，或说出在几种解题方法中哪一种有效。”直觉思维往往表现在长久沉思后的“顿悟”它具有下意识性和偶然性：没有明显的根据与思索的步骤，而是直接把握事物的整体，洞察问题的实质，跳跃式地突如其来地迅速指出结论，而很难陈述思维的出现过程。

布鲁纳在分析直觉思维不同于分析思维（即逻辑思维）的特点时，指出：“分析思维的特点是其每个具体步骤均表达得很清晰，思考者可以把这些步骤向他人叙述。进行这种思维时思考者往往相对地完全意识到其思维的内容和思维的过程。……与分析思维相反，直觉思维的特点却是缺少清晰的确定步骤。它倾向于首先就一下予以对整个问题的理解为基础进行思维，人们获得答案（这个答案可能对或错）而意识不到他赖以求得答案的过程（假如一般来讲这个过程存在的话）……通常，直觉思维基于对该领域的基础知识及其结构的了解，正是这一点才使得一个人能以飞跃、迅速越级和放过个别细节的方式进行直觉思维：这些特点需要用分析的手段——归纳和演绎——对所得的结论加以检验。”直觉思维在解决问题中有重要的作用，许多数学问题，都是先从数与形的直觉感知中得到某种猜想，然后再进行逻辑证明的。因此，培养学生的直觉思维与逻辑思维不能偏废，应该很好结合起来。

### 三、抽象思维与形象思维

形象思维是指通过客体的直观形象反映数学对象“纯粹的量”的本质和规律性的关系的思维。形象思维是与客体的直观形象密切联系和相互作用的一种思维方式。

数学形象性材料，具有直观性、形象概括性、可变换性和形象独创性（主要表现为几何直觉）。而与数学抽象性材料（如概念、理论）不同。所以抽象思维所提供的是关于数学的概念和判断，而形象思维所提供的却是各种数学想象、联想与观念形象。

在数学教育中，一直是抽象逻辑思维占统治地位，难道形象思维在教学中就不能为自己争得一席之地吗？其实不然。那么，形象思维的科学价值和教育意义又何在呢？

第一，图形语言和几何直观为发展数学科学提供了丰富的源泉。数学科学发展的历史告诉人们，许多数学科学概念脱离不开图形语言（其中尤其是几何图形语言）。许多数学科学观念的形成也都是由于借助图形形象而触发人的直觉才促成的。如证明拉格朗日微分中值时所构造的辅助函数，无疑受几何图形的启示。

在现代数学中经常出现几何图形语言的原因，不仅仅是由于有众多的数学分支是以几何形象为模型抽象出来的，而且由于图像语言是与概念的形成紧密相连的。代数和分析数学中经常出现几何图形语言，显示了在某种意义上几何形象的直觉渗透到一切数学中。为什么像希尔伯特空间的内积和测度论的测度，这样一些十分抽象的概念，在它们的形成和对它们的理解过程中，图形形象仍然保持其应有的活力呢？显然，这是因为图形语言所能启示的东西是很重要的、直观的和形象有趣的。

第二，图形是数学和其他自然科学的一种特殊的语言，它弥补了口述、文字、式子语言的不足，能处理一些其他语言形式无法表达的现象和思维过程。正像符号语言由于文字符号参加运算使数学思维过程变得简单一样，数学图形语言具有直观、形象，易于触发几何直觉等特点和优点。如计算积分时，先画出积分区域，对选择积分顺序是十分有益的。学生学会用图形语言来进行思考，同会用符号语言来进行思考一样，对人类的发展进步都是极为重要的。

第三，如果说符号语言具有抽象的特点，那么数学中的图形语言则具有直观形象的特点，发展这两种语言都是重要的。发展符号语言有利于抽象思维的发展，发展图形语言却有利于形象思维的发展。

第四，正如前述，人们在思考问题过程中，视觉形象、经验形象和观念形象是经常起作用的。例如，学生在学习数学过程中，尤其在解题时这种形象往往浮现在眼前，活跃在脑海中，用以搜寻有用的信息，激活解题思路。对于典型解法、解题经验等形象有时虽然时隔已久，但在用得着时，这种形象便会复活起来，跃然纸上。不仅如此，学生学习数学时，还常常表现出一种趋向：对抽象的数学概念总喜欢从几何上给出形象说明，即几何意义，有时即便是纯代数问题，也会唤起他们的几何形象。

综上所述，形象思维不仅对数学科学有很高的科学价值，而且对培养教育人才具有十分重要的意义。

数学思想是指对数学活动的基本观点，泛指某些具有重大意义、内容比较丰富、思想比较深刻的数学成果，或者是指数学科学及其认识过程中处理数学问题时的基本观念、观点、意识与指向。数学方法是在数学思想指导下，为数学活动提供思路和手段及具体操作原则的方法。二者具有相对性，即许多数学思想同时也是数学方法。虽然有些数学方法不能称为数学思想，但大范围内的数学方法也