

# 数学建模 与 高中数学教学

常发友◎著

吉林人民出版社

# 前 言

## PREFACE

《普通高中数学课程标准（2017版）》中提出了数学核心素养，数学建模作为六大核心素养的重要组成部分，受到国内外教育研究者的广泛关注。于是，在中学开展数学建模的研究教学中，普及数学建模方法，加强数学知识与实际生活问题的联系，培养学生建模的思维能力，提高中学学生整体的建模水平，成了当今数学教育研究者的重大课题。

立足课改发展趋势，笔者撰写了此书。本书主要对高中数学建模教学进行梳理，介绍了高中数学建模教学的背景和什么是高中数学建模教学，以理论为基础，详细说明了高中数学建模教学的构想，具体分析了整体构想和局部构想，指出了高中数学建模教学思路，然后立足教学实践，从教师引导和学生自学两方面入手，探寻了高中数学建模教学的实施策略，并借此弄清楚什么是高中数学建模教学，如何实施高中数学建模教学，有效落实课改要求，提升高中数学教学质量。

# 目 录

## CONTENTS

第一章 理清高中数学建模.....	( 001 )
第一节 数学建模的研究背景 .....	( 002 )
第二节 数学建模教学的界定 .....	( 009 )
第二章 高中数学建模教学构想.....	( 019 )
第一节 数学建模教学的整体构想 .....	( 020 )
第二节 数学建模教学的具体构想 .....	( 021 )
第三章 高中数学建模教学策略.....	( 041 )
第一节 高中数学建模教学原则 .....	( 042 )
第二节 高中数学建模教学设计 .....	( 059 )
第三节 高中数学建模教学策略 .....	( 095 )
总 结.....	( 132 )
参考文献.....	( 133 )

# 第一章

## CHAPTER 1

### 理清高中数学建模

数学建模是培养学生数学应用意识、创新精神和实践能力的有效途径。为了改善高中生数学应用意识薄弱的现状，满足社会对人的需要和课程改革的要求，《普通高中数学课程标准（2017版）》（以下简称《新课标》）提出了六大数学核心素养，分别为数学抽象、数学推理、数学建模、数学运算、直观想象和数据分析，其中数学建模是数学核心素养的一个主要构成要素，因此开展数学建模教学的研究具有重要意义。要想在高中数学教学中有效地引导学生建模，首先要理清楚数学建模的背景与内涵。

## 第一节 数学建模的研究背景

### 一、数学核心素养培养的要求

《新课标》明确提出数学核心素养，学科核心素养是育人价值的集中体现，学生通过核心价值观的学习逐步形成正确的价值观念，形成必备的品格和关键的能力。数学核心素养包含六个方面，即数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析，其中数学建模能力是数学核心素养的重要组成。数学建模能力是在现实问题中抽象出数学知识的能力，数学建模的过程包括：在实际情境中从数学的视角发现问题，提出问题，分析问题，建立模型，确认参数，计算求解，检验结果，改进模型，最终解决问题。

数学建模素养是教学中数学问题和现实问题联系的桥梁，通过数学建模的方法可以从现实问题中抽象出数学问题，实现现实问题和数学问题的转化，是推动数学发展的重要动力。

通过高中数学课程的学习，学生能有意识地用数学语言去解决实际问题，能学会用数学语言表达现实世界，感悟数学和现实之间的联系。数学建模能力的培养也能积累数学实践的经验，认识数学模型在社会、科学及工程领域所发挥的作用，有利于提升实践能力。

## 二、数学新高考的考查

在当今这个科技迅猛发展，大数据盛行的时代，人们对于数学知识的掌握必不可少，无论是在新兴科技产业，还是在社会大众的日常生活中，数学知识的重要作用都渗透其中，广大群众对于数学本身所附有的独特贡献价值逐渐予以认同。当然，数学的地位能够攀升得如此之高，必然也离不开许多具备优秀数学文化素养的学者以及研究人员对数学发展的贡献。而要想真正地构建一栋牢固的、坚不可摧的数学大厦，需要的是具有无私奉献、敢为人先的精神的高层次数学知识人才。当今随着诸多大学学府对学科专业化发展重视度的提高，教师究竟要如何教数学、学生究竟要如何学数学等诸多人们遇到的难题，也成为教育界领导者当下引导学术界积极探索的话题。在数学教育领域，诸多学者十分关注培育学生自身有关数学方面的应用意识和实践能力，但是体现数学应用最典型的课程就是数学建模。那么，究竟怎样培养拥有数学建模思想的高素质人才呢？就当前研究分析给出的结论指出，其关键在于改变中等数学教育以往的单纯考查学生做题能力的应试化模式，但是只仅仅针对高中教学模式进行改革，而不改变对教学方式起着主导作用的高考的试题题型，那可以说一切都是徒劳的。因此，抓住其主要矛盾改变高考是尤其重要的，只有高考试题重视考查中学生掌握数学建模思想的能力，才能引起教师在教学中重视教学生学会用建模思想解决难题，由此我们国家才能真正选拔出合适的、杰出的人才服务于社会，才能促使社会不断

地向前迈进。所以，对于当下抓紧对高考试题的研究，尤其是对建模思想试题的研究显得刻不容缓。而在数学高考题型中，最能体现数学建模的题型无非就是应用类试题，这类试题多数是以现实题材为背景编制的，这也是现阶段能较好检验出学习者数学建模能力高低的主要题型。依据新课标中的指导思想能够直接有效反映数学建模思想的应用题将成为高考考查的重点知识，这也不得不引起我们对它的重视。

《新课标》在对于高考的命题建议中指出，数学高考题应命制一定数量的与常识相符且贴切生活实际并能检验出学生在解决问题时将理论应用于实践的能力，突显举一反三的新颖思维的应用问题。在考题命制过程有关注意环节中，要求构造基于数学学科核心素养水平检验的评价体系，这个体系包含三个维度，其中第二个维度中就涵盖了数学建模活动与数学探究活动。而在编制高考试题时，也是基于这三个维度之上展开的，并且每道题目需给出重点考查方向。除了延续以往的评分模式之外，还需参考相关数学学科核心素养的水平划分依据给予评判。高考数学考试大纲（以2018年出版的为例）中针对所要考核内容，从知识、能力、个性品质等三个方面提出要求，其中在能力要求中指出应加强对学生应用意识方面的考查。而此处提出的应用意识则指的是在熟练掌握数学知识的基础上运用相关理论解决现实社会中有关生产、生活及其他方方面面所遇到的简单问题，并能针对问题相关背景，对信息材料加以归类、整合，使实际问题转化成用数学语言表述的问题，从而进行分析解决，最后运用数学思想方法进行检验。对

于应用的过程则是根据实际情境，抽取数量关系，建立数学相关模型加以解决。这也对应《新课标》中所提到的数学建模方面的要求。而对于考查学生数学建模思想的题型则主要通过结合应用类题型进行综合展现，因此现今是有必要系统地研究数学建模在高考数学中的应用分析。

### 三、课程标准的要求

在《新课标》第四章课程内容主题五中指出，数学建模活动是对现实问题进行数学抽象的一个过程，学生首先要学会用数学语言表达实际问题，再用数学方法构建模型解决问题。其中可以从以下方式入手：先联系生活实际，以数学的视角发现问题，提出问题，分析问题，形成模型，再通过数学的语言对模型进行参数确定，计算求解，最后对模型进行结果检验，改进模型，以求解决实际问题。

从新课标对数学建模的界定中可以看出，数学建模是一个过程性的活动，并不是通过短时间就能完成的。“四能”中特别强调发现问题，提出问题，这正是表明数学教育中四能发展，不再简单地由教材和教师给出问题让学生思考作答，而是让学生自己从生活、社会的方方面面去发现数学问题。比如，马路上的红绿灯怎样设置合理？不同地区的道路要多宽才合适？怎样测量灯塔的高度？以此，合理引导学生自发主动地用数学的眼光去观察生活。从数学教育心理学的角度，当学生意识到自己知识的盲区，才会更加主动积极地去想办法思考解决，从而在建模求解的同时，培养自己自主学习的习惯，锻炼

独立思考的能力，进而达到数学建模学习的目的。由此，对新课标建模板块的要求进一步分析及解读如下：

要求一：在数学建模教学中，教学应该以课题研究的形式展开，学生独立完成一个课题研究也在必修课程中明确指出。数学建模活动和数学探究活动建议课时：必修6课时，选修4课时。

解读：以课题研究的形式展开，一般的课题研究出现在高等教育中，而现在在高中课标中出现，说明高中数学教师需要引导高中学生了解、认识报告和论文的形式及框架，有目的地让学生知道自己在建模活动中应该从哪些方面入手。在必修课程中，要求学生在四个课时内独立完成一个课题的研究，要求学生在教师的引导下，完完整整地完成数学建模的一系列流程，感受数学建模中的生活与生活中的数学建模。

要求二：建模课题可以由教材或任课教师给定，但最好的是由教师和学生共同探索决定。选题、开题、做题、结题四个环节是建模的主要研究过程。在建模学习中，学生需要学会撰写开题报告，教师应加强学生间的交流探索。

解读：从课题的选定可以看出新课标对学生自主发现问题、提出问题的强调。培养良好的学习习惯对高中生而言，会让他们受益匪浅。在建模学习中，教师有效地组织交流活动，强调以学生为主体，鼓励学生学会表达、学会合作，这是和目前高中这种教师讲授、学生接受的教学模式相左的，教师需要特别注意。

要求三：学生采取独立完成或小组合作（2—3人为宜）

的方式，经历数学建模活动与数学探究活动的全过程，教师应组织评价小组，强调诚信在学术科研中的重要性。

解读：数学建模可以由个人独立完成，也可以以小组的形式分工协作，强调在建模过程中培养学生的合作交流和探讨学习。学生之间的交流往往更加直接，相互之间更能明白彼此的需求。在选题如此丰富、流程较为复杂的建模活动中，学生合作交流既能互相弥补，又能锦上添花，从而达到预期的教学效果。在建模教学的过程中，学生更应重视科研的原创性，从小培养学术规范，坚守诚信底线。

要求四：在建模教学的必修课程中，通过具体实例，建立一些基于数学表达的经济模型和社会模型，包括存款贷款模型、投入产出模型、经济增长模型、等级评价模型、信度评价模型。在教学活动中，要让学生知道这些模型形成的背景、数学表达的道理、模型适用的范围，体会数学的实用性，培养学习数学的兴趣，提升实践创新能力。

解读：新课标要求学生通过数学建模，了解、认识与之相关的各种模型，理解其意义，弄清其使用范围，真正意义上理解各类模型，并能结合实际问题加以运用，提高综合素质。

要求五：在数学建模教学探究活动中，在提升自我现代信息技术使用能力的同时指导学生使用现代信息技术。

解读：在建模教学过程中，涉及模型建立和模型求解环节。在模型建立过程中，涉及大量的图表和模型表达，而基础的办公软件和几何画板能实现数据的分类处理。但在模型求解

过程中，对于大量数据的回归分析，就需要用到常见的数学软件。鼓励学生使用现代信息技术，可以让数学建模学习更加丰富而又简单。

要求六：数学建模教学应与其他五大数学核心素养相结合，相互促进，以求提高。

解读：在《新课标》中提出数学建模、数学运算、数学抽象、数据分析、逻辑推理、直观想象六大数学核心素养，并强调数学学科的终极目标是“三会”。

会用数学的眼光观察世界→数学抽象、直观想象。

会用数学的思维思考世界→逻辑推理、数学运算。

会用数学的语言表达世界→数据分析、数学建模。

通过建模活动，横向让学生发现数学与其他学科的关联、数学与实际生活的关联，纵向让学生知道数学在数学史、人类科学发展史中的进步，培养学生跨学科、跨领域的跨界思维。例如，数学与物理方面，伽利略的自由落体实验，牛顿的万有引力研究；数学与生物方面，蜂巢问题；数学与社会方面，马尔萨斯人口模型问题，红绿灯设置问题；数学与生活方面，茶水温度问题，淋雨问题，衣服漂洗问题；数学与数学史方面，戈尼斯堡七桥问题等。这从各学科、各领域体现数学建模的价值，同时也是与美国提出的STEM课程不谋而合之处。

## 第二节 数学建模教学的界定

考虑到《新课标》的颁布与实施，本节主要依据课程标准来考虑相关概念的界定。下面主要讨论数学模型、数学建模和数学建模素养，同时分析数学建模在高中数学教学中的意义。

### 一、数学建模的界定

#### （一）模型与数学模型

原型和模型常常共同出现，原型是指人们在现实世界里进行研究、生产或管理的实际对象。我们在日常生活中常常提到模型，比如汽车、飞机的模型，是依据原型进行针对的改变，改变大小或进行抽象。原型就是我们生活中所关心的问题，而模型就是我们对于生活的原型进行简缩、提炼和构造的替代物。我们对于模型的构造可以分为物理构造和理想构造。物理构造就是对原型的物理方面的特质进行改造，理想构造即为在我们大脑中对原型进行理想化处理，数学模型就是对于我们生活中的问题进行理想构造。

数学模型的本质就是发现问题的内在联系，设出问题中的未知量，再将各种关系通过数学的方式将它们统一在一个方程或者不等式关系中，之后利用模型得到结果，最后再把模型应用到实际生活中。在教学中应注意以下三个原则：

第一，数学建模教学是思想和方法，在课堂内容讲解过程中不应占太大比重，所以要求教师在讲解数学模型时要简要明了地让学生学会建模方法。

第二，数学建模在课堂教学中应选用与实际生活关系密切的问题进行讲解，不应选择难度太高的脱离生活实际的问题，让学生感受到数学建模的实用性。

第三，对于数学模型的教学教师还应精心准备，巧妙使用数学软件和现代教育技术，让学生能够直观清晰地观察数学建模的过程，学习数学建模的方法。

## （二）数学建模

《新课标》对数学建模的定义是将实际情境中所阐述的有关问题加以抽象化后提取出来，并运用与数学有关的文字、符号对其进行表述，随即通过数学方法建构符合条件的各类相关模型，从而达到较好地解决问题的目的。数学建模的步骤大致包含以下四个方面：

### 1. 假设模型

通过了解实际问题的背景信息及其所蕴含的实际意义，对该问题达到深层次的理解，并分析探索其中表达数学知识的文字、符号信息，用最简洁的文字总结归纳概括出相应的数学问题，进行假设。由于不同学生的数学素养以及所蕴含的数学知识的层次都不同，可能假设出的数学模型也各有不同。如果假设符合逻辑且内容合理，则可以通过建立相关模型更加有效快速地解决问题。如果假设不合逻辑或过于烦琐，将可能导致所建模型与实际不符，从而无法继续实施。模型的假设正确与

否将决定数学建模的整体是否可运行。因此，在对模型进行假设时要考查全面、综合分析。

## 2. 建立模型

依据所得假设，从中找出各种变化的量之间的对应关系，将其关系用数学符号表示出来，然后建立与实际问题分析符合的并能够被人们普遍接受和使用的模型类型，如函数模型、不等式模型、三角模型、排列组合、概率模型等。而此模型建立的过程就是把与现实相关的问题转化为与数学相关的问题的过程。

## 3. 求解模型

运用与数学有关的思想、方法、知识对所建模型进行求解，也可依据实际情况运用计算机、统计表等相关工具，求出该模型的解。

## 4. 检验模型

把所求得解转化为语言文字融入实际情境问题中，如果所得结果能够很好地解决实际情境中所要解决的问题，则说明该模型是符合条件的模型；反之，如果所求解对实际情境问题的解决并无作用，则需要建立新的模型。

由此可以看出，数学建模并不是对现实情境中的数学问题进行简单抽象概括，然后运用相关数学学科知识加以解决的流水线模式般的机械化操作，而是致力于让学生通过建模的过程理解情境化问题中的深层含义，从数学观点出发看待问题，并从中抽象出该问题特有的本质化内容，然后使用数学语言、数学符号对其进行文字化描述，随即寻找相应的数学方法

给予问题最优化的解决方案。学生经过高中阶段对数学知识的学习，可以利用自身所具备的相关数学知识发现现实生活中的数学问题，并构造有效的数学模型来解决问题，有意识地寻找其他学科与数学建模的内在联系，提升创新能力，开阔视野。

### （三）数学建模素养

素养近乎等同于素质，其词义本身包含褒义性，其内在含义则是指可视为结合了各方面优秀特征的人的内在涵养，可通过后天磨炼和实践得到的一种道德修养。依据《新课标》中对高中阶段学生应具备的数学建模素养所给出的定义，可将其简单概括为学生在学习数学知识过程中，若遇到现实性情境问题，可自觉化使用数学建模方法解决问题。

高中生数学建模素养的培育离不开现实化情境，学生在日常生活中接触并发现实际问题，随即用自身所学的数学定义、定理、公式、符号等数学语言将其转化为数学类问题，并用数学知识加以解决。因此，对于高中生数学建模素养的培育离不开数学建模知识和数学建模过程，而对于问题的解决则需要学生自身的信念感和对事物的好奇心等因素。其内涵的界定包含情境、知识、过程、情感四个方面。

## 二、数学建模教学意义

### （一）促进学生核心素养的养成

数学教育越来越重视对知识的实际应用以及对学生数学核心素养的培养，对数学教学也进行了改革和完善。课程改革

的核心理念是以学生的发展为本，培养学生的科学精神和创新意识，发展学生用数学语言表达现实世界的能力，让学生亲身经历发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的过程。在课堂教学中应用数学建模，可以引导学生积极参与，主动探究，激发学习兴趣，促进学生全面发展，培养学生的数学核心素养。数学教育要回归现实生活，现实生活是数学知识的源泉，也就说明教学具有现实意义。教师要注重挖掘数学知识的本质，在教学过程中融入建模，鼓励学生实践和创新，培养学生的应用能力，帮助学生认识数学、理解数学，从而树立正确的数学观，发展学生的数学学科核心素养。

高中数学课程体现未来社会发展需求，根据学生的认知规律和数学学科的特点，发展学生的数学学科核心素养，培养思维能力和创新意识。教师应注重处理数学技能与数学核心素养的关系，提升学生数学应用能力和对数学文化的渗透。

数学核心素养是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度、价值观的综合体现，主要包括数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析。数学建模是对现实世界中的问题进行数学抽象，选择适当的数学模型，运用数学知识解决问题的一种数学思想方法。学生数学建模思想的形成是学生领悟数学与外部世界联系的有效途径，这也是数学建模思想的本质所在。《新课标》中把数学建模活动和数学探究活动以主线的形式呈现，明确各学校要开展一定课时的数学建模活动。与传统的高中数学学习内容相比，应用数学建模思想教学内容灵活，对于教师来说挑战性

强，但能改变重结果轻过程和评价方式单一的现状。数学建模在高中数学课程中占有重要位置，在数学核心素养的培养过程中扮演着重要角色。

## （二）帮助学生适应新高考

《新课标》在内容标准部分，将数学探究、数学建模与数学文化作为专题呈现，渗透在每个模块教学中，要求高中阶段至少应安排一次数学探究、数学建模活动。虽然设置数学建模与数学探究模块时没有提出明确的评价方式，但在实施过程中建模活动流于形式，没有落到实处。同时，《新课标》将数学建模作为数学核心素养提出，将数学建模活动与数学探究活动作为一个主线内容，要求以课题研究的形式开展数学建模活动。但学生的数学建模及数学建模思想方面知识匮乏，基础不牢，已有的数学建模相关知识经验不足，直接进行建模活动的跨越度较大，学生无法直接完成建模活动，因此教师将建模思想应用到日常教学中是必要的。在教学中数学渗透建模思想，按数学建模步骤设计教学环节，为数学建模活动的实施奠定基础，在日常教学与数学建模活动间起着过渡作用。应用数学建模思想进行日常教学，让学生领会数学本质的同时，达到知其源、会其神、通其用的目的，提升学生的数学核心素养，增强学生自主获取知识能力，从而提高数学建模能力，为数学建模活动和数学探究活动奠定知识和能力基础。

随着科技的发展，数学在经济、自然科学等领域的应用越来越广泛，出现了多种与数学相结合的数学分支学科，如数学生物学、数学物理学等，说明数学与数学应用在今后的日常