

把握数学本质

—中学数学教学研究

崔光鑫 刘 兵 叶含琪 / 主编

吉林人民出版社

前 言

进入 21 世纪之后,中国数学教育经历了数学课程改革的重大变革,经历了实践的检验以及激烈的争论。《义务教育数学课程标准(实验稿)》做了调整,颁布了《义务教育数学课程标准》(2011 年版),且高中数学课程标准的修订已经进入议事日程。过去十几年的课程改革,着重于教学方法的改革与发展,围绕“自主、合作、探究”的教学理念进行课堂教学实践探究,但对于课程内容的诠释、数学知识内涵的理解、数学知识本质的呈现,则缺乏应有的重视。虽然新课标实验开展得如火如荼,但是不管形式如何变化,教学中都应该坚持注重数学知识本质的呈现这一原则。同时,这一原则也是数学教学的立足之本!

目前,我国中小学数学课堂教学一般比较重视数学技能的训练,即便在新授课上,教师对新知识的讲授也总是轻描淡写、一笔而过,直接进入例题讲解或练习训练阶段。本书从数学知识本质的角度入手,从理论与实践两方面对教学中应重视揭示数学本质进行探讨,试图在教学中建立一套把握数学知识本质的教学策略,为数学教学提供一些可行性意见和建议。

本书分别从数学概念、数学思想方法、数学特有的思维方式这三个

方面来具体把握数学的本质。数学本质是数学的灵魂,是数学教育的价值核心,是数学教学的重心。数学课程要强调对数学本质的认识与理解,要求教师在教学实践中,不能仅仅教给学生教材上静态陈列的数学知识,还应特别关注蕴含于教材内容下的深层次的一些数学知识,让数学呈现为学生容易理解的教育形态。加强对数学本质的认识,能帮助教师强化教学功底,开阔教学视野,提高教学水平,成就教学理想。

目 录

第一章 数学学科本质一:对数学基本概念的理解	001
第一节 信息技术条件下的数学概念教学	001
第二节 数学概念中的辩证关系研究	034
第三节 基于样例学习理论的数学概念教学	067
第二章 数学学科本质二:对数学思想方法的把握	085
第一节 数形结合思想在数学教学中的应用	085
第二节 化归思想在数学教学中的应用	121
第三节 类比思想在数学教学中的应用	149
第三章 数学学科本质三:对数学特有思维方式的感悟	170
第一节 数学形象思维	170
第二节 数学逆向思维	193
第三节 数学创新思维	202
结 语	292
参考文献	293
附 录	296

第一章 数学学科本质一： 对数学基本概念的理解

第一节 信息技术条件下的数学概念教学

一、信息技术与数学概念教学理论概述

(一) 数学概念教学的基本理论

1. 数学概念的含义

概念是对事物本质属性的一种反映。数学概念通过对特定数学事物的比较、分析、综合和概括而形成固定的对事物本质的一种揭示。其反映了事物在数量关系、空间形式上的本质属性。数学概念在人类历史进程中,是逐步形成和发展的。

一般来说,数学概念是运用定义的形式来揭示一些问题的数学本质。给定一个数学概念,其概念的内涵和外延就已经明确了。数学定义是准确表达数学概念的一种方式,有些概念是通过文字叙述来表示,如同类项;有些概念是通过数学符号来表示,如二次函数;有些概念是通过图形来表示,如函数的零点;有些概念本身就是图形,如圆锥曲线等。

数学概念是一种特殊的数学思维形式,是人脑思维的高级产物。数学中的定理、命题、法则、证明等都是 以数学概念为基础的 ,只有对数学概念理解透彻,才能

灵活地应用数学概念,才能进一步学习数学其他知识及技能,培养逻辑思维能力和空间想象能力。

2. 数学概念教学的一般要求

数学概念是对数学对象的本质属性的一种描述,是数学中最基本的思维形式。数学概念是学生进行数学认知的起点,在数学的学习与教学中占有很重要的地位。因此,在数学概念教学中需要遵循一定的要求。

(1) 让学生认识到概念的由来和发展

不同的数学概念的来源、产生方式及发展都不同。在数学概念教学中,应该让学生明确,每一个数学概念都是经过一定的抽象、概括得到的,是对某类具体数学对象的本质属性的描述;每一个被定义的对象都是客观存在的。在数学概念教学中,要让学生认识到有些数学概念在某个特定的学习阶段有特定的含义,但是随着知识的增多与加深,这些概念会随之发展和深化,如函数的概念、自然数的概念等。

(2) 让学生把握好概念的本质

透彻地理解一个数学概念,首先一定要明确概念的内涵和外延。如果以前学过的相关概念没有弄明白,将会对学习后面的知识内容造成困难,概念不明确,也不利于学生能力的形成。所以在数学概念教学中,必须让学生对所学概念的定义、概念的名称以及概念的符号表示等有明确的认识,充分认识到概念的内涵和外延。

(3) 让学生明确概念间的关系

数学知识是一个庞大的知识体系,其关系错综复杂,要让学生认识到相关概念之间的联系和区别。每一个数学概念都是整个体系中的一个小分支,在概念学习中,要让学生认识到概念之间的相互关系。明确概念之间的相互关系,有利于深化对概念的理解,形成概念体系,形成一定的知识网络。例如,对代数中数的概念体系、几何中有关角的概念体系、函数概念体系、圆锥曲线概念体系等,应该让学生学

习到一定的阶段形成体系并掌握该体系。

(4)让学生正确运用概念

学习数学概念的目的就是要学会运用概念。在运用数学概念的同时,可以起到巩固数学概念的作用,并能对数学概念有更全面、更深刻的认识,从而能灵活地运用概念解决实际问题。在数学概念教学中,要注意引导学生运用概念去确定数学对象的属性,了解概念在运算、证明以及推理中所发挥的作用,让学生学会运用数学概念去解决各种数学问题。

3.数学概念的教学过程

对数学概念的教学,大致可以分为以下三个阶段,即概念的引入、概念的明确、概念的运用。

(1)概念的引入

在数学概念教学的引入阶段,学生需要对概念有初步的感知,教师则主要帮助学生与原有的知识进行联系,完成从感性认识到理性认识的转化。数学概念的引入方式丰富多彩,可以是生活中的实际问题,也可以让学生观察模型、图表、图片等,还可以通过复习相关的旧知识引入,或者设置问题进行情境引入等。对于一些比较简单的数学概念,其引入的过程也可以十分简洁,但是对于一些十分重要又比较抽象的数学概念,其引入过程则需要引起重视。一个好的概念引入,可以起到激发学生学习兴趣的作用,也有利于学生对该堂课的后续学习,为概念课“增光添彩”。

(2)概念的明确

对数学概念理解不明确,将会给学生的学习带来很大的困扰。数学概念是学生后续学习的基础,是发展能力的基石。当学生对遇到的问题无从下手时,大部分都是因为对概念理解得不透彻。数学概念的学习必须要先正确深刻地理解概念。在数学概念的教学过程中,要引导学生准确地认识概念,弄清楚概念的内涵和外延及概

念间的关系,并逐步建立起概念的体系。

数学概念都具有严密的科学性,所以深刻理解概念首先要从概念的语言入手,适当引导学生剖析概念。教学中要关注概念中的关键词语,挖掘概念的本质属性。例如,单项式概念中“或”字的强调与剖析,平行线概念中强调“在同一平面内”,函数概念中应重点强调“任何”与“唯一”,异面直线概念中应着重强调“不在任何一个平面内”。把握好概念中的关键词,有助于学生对概念的进一步认识。明确了概念的定义对掌握概念还不够,概念的定义仅突出了被定义概念最本质的属性,一些概念的其他本质属性以性质、定理的形式给出,只有把概念的内涵与外延统一起来,才能形成概念。对于一些比较相似的概念,要注意去区分和辨别,找出它们的相同点与不同点。在教学中还要适当地举出正例和反例,深化概念的本质特征和非本质特征,加强对概念的本质认识。

(3)概念的运用

学生在数学概念形成之后,就要学会“用概念”。在明确了概念之后,应该立即在课堂上巩固所学概念,对概念进行辨析,教师可以让学生举出符合概念条件的例子,适当地做一些关于概念的练习题,对概念进行变式教学。数学概念的应用分为两个层次,即知觉水平上的应用和思维水平上的应用。在刚学习概念时,应该要学会概念在知觉水平上的应用,随着概念的多次应用与知识的加深,应明确概念在运算、推理、证明中发挥的作用,逐步学会概念在思维水平上的应用,并形成一定的概念体系。

4.数学概念获得的基本方式

数学概念的获得有两种基本方式,即概念形成与概念同化。

(1)概念形成

在概念教学中,从若干具体实例出发,对同类事物中的不同例子通过感知、分

析、比较、抽象,以归纳的形式概括出这一类事物的本质属性,这种得到概念的方式即概念形成。概念形成教学模式如图 1-1 所示。

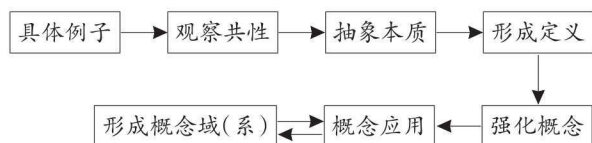


图 1-1 概念形成教学模式

概念形成的过程一般可以概括为七个方面,一是提供具体实例。这些具体实例是概念的不同正面例子,它们一般是由教师直接提供给学生,是学生自己生活经验中接触过的事物,也可以是学生根据教师的要求去寻找实例。二是观察共性,即引导学生对这些实例进行观察分析。学生可以自己独立观察分析,也可分小组合作讨论,分析出各实例的属性,概括出共同的本质的属性。三是抽象出各实例的共同本质属性。通过对本质属性的假设,然后进行验证,确认实例的本质属性。四是概括出概念的定义。可由学生总结概括出概念的定义,教师补充完善,也可以由教师给出概念的定义,并用约定俗成的形式符号表示概念(若有符号表示的话)。概念的符号化,更有利于学生了解概念,深刻理解其本质。五是强化概念。举出概念的正例和反例,让学生辨析,也可由学生举出概念的正面例子,判别其是否理解概念,并做适当的练习题。六是具体运用概念,即运用概念解决实际问题。七是形成概念体系。形成概念体系不是一蹴而就的事,需要经历概念的多次应用之后才能逐步形成。

奥苏贝尔认为,概念形成的心理过程包括以下八个方面:第一,对刺激进行分析、辨别;第二,对抽象出的共同特征进行假设;第三,检验假设;第四,从假设中选取一个一切变式都具有该属性的共同属性;第五,把这组属性与原有的认知结构相联系;第六,把新概念从原有的相关概念中分化出来;第七,把新概念的标准属性推广到这个类目的一切例子;第八,用符号表示新概念。

学生的直接经验是学习形成性概念的基础,形成性概念的学习是在教师的引导下用观察归纳的方式抽取出一类实例的共同属性,通过对这类实例的本质属性进行抽象,进而形成概念。教师在进行教学时需要遵循学生的心理发展规律。首先,在选取概念的实例时,教师应选择那些刺激强度大,具有新颖性和典型性的例子;其次,要给予学生充分的机会进行自主主动的学习,让学生亲历概念形成的过程,对概念产生的要求和概念形成的规律进一步了解和掌握;最后,在形成新概念以后,要采取相应的措施,帮助学生强化概念、应用概念,并逐步形成概念域和概念系。

(2) 概念同化

在概念的教学中,以定义的形式直接给出概念,学生利用已有的知识经验,主动地与原有认知结构中的相关概念相联系,领悟新概念的实质属性,这样获得新概念的方式叫作概念同化。概念同化教学模式如图 1-2 所示。

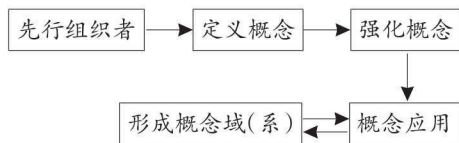


图 1-2 概念同化教学模式

概念同化的过程一般可以概括为以下五个方面:第一,分析概念的定义,观察概念的名称,了解概念的符号表示,揭示概念最本质的特征;第二,把概念进行分类,分析概念的各种特殊情况,进一步突出概念的本质属性;第三,对概念的正面例子和反面例子进行辨认和比较,确认新概念的本质属性与非本质属性,明确新概念与原有概念的本质区别;第四,运用概念,通过各种不同的形式运用概念,深化理解概念,与有关概念融会贯通形成整体结构;第五,形成概念体系,形成概念体系不是一蹴而就的事,需要经历概念的多次应用之后才能逐步形成。

概念同化的心理过程包括三个方面:一是辨认。首先对新概念进行感知,辨认新概念中已经学过的概念,分析已学概念与新概念之间的联系。二是同化。架起新概念与旧概念间的桥梁,把新概念融合于现存的认知结构中,并对现存的认知结构进行改造,形成新的认知结构。三是强化。通过给出一些新概念的正例和反例,让学生通过进一步的辨认,实现对新概念的深化理解。

概念同化是在已经学过的概念基础上学习新的概念,学生的间接知识经验是概念同化的基础,学习者在学习新概念时,需要具备一定的知识基础,即先行组织者。抽象的定义是概念同化学习的起点,对学生有着更高的要求,学生需要具备一定的知识经验,并具有较高的心理活动水平和逻辑思维能力。学生在学习过程中应积极参与到教学活动中,积极地去观察概念,弄清概念所属的范围,对比分析相似概念,并能够在具体的问题中运用概念。要把新概念与原来的概念联系起来并融入原有的认知结构中,形成一个新的认知结构。

概念形成与概念同化既有一定的联系也有一定的区别。概念形成主要是以具体的事物为对象,以学生实际经验为基础进行的抽象概括,而概念同化是以学生原有的概念和知识经验为基础,直接给出概念的定义。概念形成方式对低年级的学生的概念学习比较适合,也适合于简单概念的学习。概念同化更有利于高年级学生的学习。在实际的概念教学过程中,不能孤立地使用某一种方式,通常是将两种形式结合使用,这样既符合学生思维的认识规律,又可以帮助学生准确把握事物的本质属性,提高概念学习的效率。因此,在实际教学中,应把这两种概念学习的方式综合使用,优势互补,使教学效果达到最佳状态。

(二)信息技术应用于数学概念教学的相关概念

信息技术的爆炸式发展推动着教育的蓬勃发展,信息技术已渗透到教育教学的各个方面,教育中融入现代化技术是未来教育发展的一大趋势。教育信息化在教

育的改革和发展过程中发挥着越来越重要的作用。教育的信息化时代推动着教师将信息技术广泛地应用于课堂教学中去,更新了传统的教育模式,营造了全新的学习环境,为课堂教学带去了新的活力。教育部于2001年颁布的《基础教育课程改革纲要(试行)》中指出,教学过程中应大力推进信息技术的普遍使用,使信息技术与学科课程的整合得到有效促进,进而对传统教学的各个方面进行逐步改变,将信息技术的优势充分应用于教学中,为学生的学习和可持续发展提供有力的学习工具和多样的教学环境。伴随着教育的信息化,信息技术与数学教学之间的联系也愈加紧密,对信息技术与数学教学的研究就显得尤为必要。下面主要介绍涉及的一些相关概念和理论。

1. 信息技术概念的界定

关于信息技术一词,有很多不同的说法。比较普遍的说法是,信息技术是指应用信息科学的原理和方法对信息进行获取、传输、处理和应用的技術,包括微电子技术、通信技术、计算机技术和传感技术,成为一门综合技术和方法体系。在教育领域中应用的信息技术主要包括多媒体计算机技术、数字音像技术、人工智能技术、计算机局域网技术和因特网络技术。其中,多媒体与网络技术在教育领域中已逐步得到广泛应用。信息技术也可从几个不同的角度来看待,第一,作为学生学习的对象。信息技术作为一种学习对象,是中小学学生的必修课,教育部明确规定在中小学教学中,必须开设信息技术课,且有规定的课时。第二,作为学习的工具和手段。教育教学中加入信息技术这个新元素,为课堂的教学模式开辟了一条新的道路,指明了未来课堂教学模式的发展方向。在信息技术条件下的课堂教学,将颠覆传统课堂的教学模式,学生将由被动变为积极主动地探寻知识,教师将在组织和促进学生方面发挥作用。学生将学会利用各种先进的技术手段获取各种知识,并将其发展成一种能力。第三,作为一种新的文化。信息技术作为一种新文化,影响着

人类的生活,但文化具有其特殊性,要辩证地认识到其给人类带来好处的同时也带来了很多的问题。

本书中所说的信息技术是指其作为一种工具手段应用于课堂教学中。本书主要介绍了数学教学中常用的两种信息技术工具,即平板电脑和图形计算器。利用这两种技术工具构建一个新的学习环境,使其成为学生学习认知的新工具。学生借助新技术工具获取生活、学习经验并形成能力。

2.信息技术与数学概念教学整合的含义

(1)信息技术与数学教学整合的含义

信息技术与数学学科整合是指在数学课程教学过程中把信息技术、信息资源、信息方法、人力资源和课程内容进行有机结合,共同完成课程教学任务的一种新型的教学方式。在整合的过程中,是让现代的信息媒体技术为数学课程的教学服务,在符合数学课程标准要求的前提下,革新传统教学的结构,让新的教学方式和学习方式渗透于课堂,实现教学方式的优化和学生全面发展的目的。

信息技术数学教学整合时,应该遵循教育教学的基本规律与学生身心发展的规律。信息技术与数学教学整合还应符合以下四个基本要求:第一,学生是学习的主体,学习过程中要以学生为中心,学习内容要能够满足个体自我发展的需求;第二,学习过程要以情景或探究的方式开展,且学习过程是个性化的;第三,学习过程中学习者之间是合作者、协商者的关系,可以交流讨论,共享学习资源;第四,学习要具有创造性和生产性,能切实培养学生的思维能力。

信息技术与数学教学的整合,更新了传统的教学模式。信息技术逐渐地融入课堂教学中,成为课堂教学的重要组成部分,让传统教学中教学的三要素逐渐演变为教学的四要素,即教师、学生、教学内容、信息技术。信息技术在教育教学中正发挥着不可忽视的影响。作为教育工作者,要转变教育教学观,不断学习新知识、新技

术,提高自身各方面的素养。通过利用新技术优化课堂教学结构,促进“生命化”课堂的建构,培养和发展学生的创造能力与实践能力。

(2)信息技术与数学概念教学整合的含义

信息技术与数学概念教学整合是在建构主义学习理论的指导下,强调学生学习的自主性与主动性,教师则是扮演帮助学生完成知识的有意义建构的角色。在数学概念教学过程中,把信息技术有效合理地运用于概念教学中,改变传统教学的教学方式,知识内容的呈现方式、学习方式,使学生在信息技术条件下充分发挥学习的主动性,积极主动地去探索数学概念的发生发展过程,建构属于自己的数学知识结构,并逐步形成概念系、概念域。在此过程中,要注重培养学生的创新能力与实践能力。

信息技术条件下的数学概念教学强调在实践中学习,学生的学习过程是对知识的主动探索过程,并在此过程中进行知识的建构。在信息技术条件下实施数学概念教学的目的在于,使学生能够成为学习的主体,能够经历知识的发生、发展过程,主动探寻数学知识的奥秘,培养和发展学生能力。学生在自主构建概念时不仅能更好地掌握知识,还能得到全方位的发展。在此过程中,信息技术不再是单纯地呈现数学概念的工具,更应该是作为一种终生受用的学习知识与提高技能的认知工具。信息技术应用于数学概念教学是一种引导学生进行有意义建构的教学实践活动。

二、教学中两种常用的信息技术工具

(一)平板电脑

1.平板电脑概述

近年来,随着新型科技产品的应用和推广,传统的教学模式已经不能满足时代的需求,从幻灯片实物投影到计算机辅助教学,再到图形计算器、平板电脑进入课

堂。如何建设一个能适应时代飞速发展的先进教育教学的环境,是各国教育界领导和专家学者都在尝试实施的问题。

平板电脑是 21 世纪教育的一个自然化产物,自问世以来,以其良好的互动性、高效的程序运行能力和便携性,为中小学教育教学带来了新的支持。平板电脑在 2003 年就已经问世,但没有引起太大的反响,直至苹果公司在 2010 年推出一款新的平板电脑 iPad,迅速掀起了一股热潮。各地开始探索利用 iPad 进行教学,建立了基于 iPad 的教学实验室。iPad 外观小巧时尚,方便携带,而且内部功能强大,只需在电脑下载安装相关的应用软件,就可以通过内置的无线上网模块完成平板电脑与电脑的无线连接,实现交互式多媒体教学。信息技术的爆炸式发展,平板电脑的日益普及,使许多国家、地区开始将平板电脑运用在教育领域中,并开展了相关的教育教学研究。在新加坡、美国、韩国等国家,越来越多的学校将平板电脑作为一种新型的教育教学辅助工具。近几年来,北京、深圳、郑州、上海、成都等地已经展开平板电脑运用于课堂教学的实验。

当然,平板电脑还没有完全在课堂教育教学中普及。在其最初引入之际,备受争议,众说纷纭。随着一轮实验成果的验收,才得到了教师、学生、家长的肯定。但利用平板电脑进行教学仍然存在一些问题,如何开发更系统化的教学系统,如何开发更多的教学资源,如何更有效地管理学生,如何将平板电脑转变为学生认知的工具,如何推行新的教育教学模式等是平板电脑用于教学中亟待解决的问题。

2. 平板电脑的特点

(1) 轻便的电子书包

电子书包是学生书包与信息技术的整合,它不仅仅只是一个电子设备,更是利用网络的学习资源,以信息终端为载体,包括其中的内容工具及其外部提供的平台服务,让学生可自主学习的认知工具。电子书包体现了设备、内容、服务三者融合统

一后的一对一的创新型个人数字化学习环境的建构理念。利用平板电脑可以海量地存储各种教材和教辅资料,可以下载相关的 APP 随时随地进行学习。

(2) 互动性

互动性是平板电脑教学相对于传统教学的又一巨大优势。在教学系统的平台上,学生可以随时查看教师布置的学习任务,上传自己的学习成果并检测成果,提出有疑惑的问题,并与同伴进行及时的交流讨论等。互动交流不再受时间、空间的限制,互动变得及时而高效,教师可及时了解学生的认知发展水平,合理地设计下一步的教学。在课上,传统教学方法的互动形式单一,利用平板电脑可以使互动形式变得有趣而富有多样性。每个学生都拥有一台终端,都能自己动手操作并主动参与到课堂中去,而不是像传统教学那样,由教师演示或个别学生演示,大部分学生只能看着教师演示,平板电脑给学生提供一个从“听、看”到“操作、实践”的机会。通过专门的教学辅助系统,学生把学习的情况发送到教师的电脑终端,利用终端的统计功能,能及时了解学生的掌握情况,从而进行针对性的指导。利用系统的追踪功能,学生可了解自己掌握不牢的知识,进行知识的再学习,并针对性地选择练习模块,实实在在地解决学生在学习中遇到的疑惑,真正做到双向互动。

(3) 学生学习的主体性

平板电脑友好的交互界面,趣味性与教育性于一体的游戏,海量的学习资源,让学生能够自主地拿起平板电脑进行学习。平板电脑引进课堂,不仅仅只是对学习工具的简单应用,还应该注重教学理念和教学方式的变革。传统的课堂,受时间和环境的限制,教师讲解居多,学生自我体验机会较少。利用平板电脑中专用的教学系统平台,可以在课前完成对问题的感知和理解,在课堂上可针对性地对有疑惑的问题和重难点进行充分的讨论和探究。数学模型的抽象、解题思路的形成、解题技巧的发现,往往都是学生自己探究得到的,教师只需要在恰当的时机给予指导,并

组织学生完成对知识的自我构建即可。

(4) 分层教学,因材施教

平板电脑可以实现分层教学,它克服了传统课堂中教师只能使用统一的进程、同样的策略的弊端。使用平板电脑,可为学生专门定制学习计划与学习策略,实现真正意义上的分层教学和个性化教学。学生也可以根据自己的实际情况选择学习内容和练习模块。解题训练可以检测学情,巩固新知,强化应用,发现不足,平板电脑中专门定制的 APP 则可以根据学生的练习情况,为学生选择合适的题目加以巩固练习并提供反馈。这种先进的技术手段不仅提高了学生学习的积极性,还可以减轻教师评改作业的繁重任务,做到真正高效的教与学。

(二) 图形计算器

1. 图形计算器概述

图形计算器作为新一代的数学学习工具和学生的认知工具,在教学中能体现数学知识的发生过程,能多重地表征数学概念,方便学生进行自主探索,并符合课程改革的要求。因为图形计算器具有这些特点,所以得到了数学教育工作者的青睐。目前,全球图形计算器主要的品牌有 HP-Prime、HP39g 系列、德州仪器的 TI-Nspire 以及卡西欧 CASIO-fx 系列。《普通中学数学课程标准》中明确提到,学校可以建立数学实验室供学生使用,以拓宽他们的学习领域,培养他们的实践能力。北京、上海、江苏、湖南等多地都建立了基于图形计算器的数学实验室。图形计算器进入学校,走进课堂,它伴随着中学数学课程的改革,引领着数学教学的专业发展,改善着教师的教学方式与学生的学习方式,并不断促进数学课堂的转型。

学习的过程是学生自主建构知识的过程,教师通过创设一定的情景,帮助学生完成知识的建构。图形计算器为学生提供了一个亲自操作、发现、实验、探索的教学情境,学生在经历发现、探究、实验的过程中实现知识的建构。图形计算器的实验探