统计学与数据科学系列教材

高等数学(一)

邵志超 苏燕玲 张小燕 郝素敏 编

对外经济贸易大学出版社
University of International Business and Economics Press

统计学与数据科学系列教材

高等数学（一）

邵志超　苏燕玲　张小燕　郝素敏　编

对外经济贸易大学出版社
中国·北京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．一 / 邵志超等编．—北京：对外经济贸易大学出版社，2020.1

统计学与数据科学系列教材

ISBN 978-7-5663-2083-4

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①邵…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 189660 号

高等数学（一）
GAODENG SHUXUE

邵志超　苏燕玲　张小燕　郝素敏　编

责任编辑：汪　洋

对 外 经 济 贸 易 大 学 出 版 社

北京市朝阳区惠新东街 10 号　　邮政编码：100029

邮购电话：010－64492338　　发行部电话：010－64492342

网址：http://www.uibep.com　　E-mail：uibep@126.com

北京时代华都印刷有限公司印装　　新华书店经销

成品尺寸：185mm×260mm　　16.5 印张　　381 千字

2020 年 1 月北京第 1 版　　2020 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5663-2083-4

印数：0 001－2 000 册　　定价：45.00 元

总　　序

伴随知识经济和数据时代的到来，统计学科经历了日新月异的变化。如今数字经济、人工智能、大数据的蓬勃发展，对深化统计改革、完善统计体系、创新统计方法提出了新的要求，统计学与数据科学、生命科学、信息技术、经济、金融、保险、管理和人文科学等众多学科的融合，涌现出许多新的学科分支，如生物统计、风险管理、数量金融、保险精算、大数据技术，等等。信息技术的快速发展，云计算、物联网高科技的高速革新也使得统计学科面临更多机遇与挑战，大数据时代改变了传统数据的意义，传统统计学的结构化数据的局限性已逐渐显现。在此背景下，我们一直在思考如何设置课程、建设教材、创新教学模式使学生更好地适应社会发展需要。在不断尝试与教学科研实践中，我们深感统计教育必须要改革教材才能适应高速发展的社会趋势。

对外经济贸易大学统计学院自 2012 年 10 月建院以来，始终坚持着统计理论与应用相结合的办学方向，以培养具有全球视野的统计精英为己任，以国际化、信息化、前沿化的人才培养模式为导向，学院具有统计学本科、硕士研究生和博士研究生培养体系，充分吸收国内外统计学人才培养经验，建立和完善符合学术型和应用型人才成长规律的良性培养机制，在经济统计学、数据科学、数量金融与风险管理等领域进行为各级政府部门、金融机构和企业、高校及研究机构培养高素质复合型人才。

为拥抱新时代，适应经济发展新常态，推动统计学、数据科学等相关学科的发展，统计学院决定编写一套面向高校本科生，特别是财经类院校的统计学与数据科学系列教材，不仅注重教学内容的基础，更要体现现代统计学和数据科学的思想和原理；不仅强调运用统计和大数据软件的动手能力，更要体现结合财经类问题突出统计方法的灵活应用；不仅广泛吸收国内外优秀教材成果，引用符合时代特征的前沿案例，更要体现服务于提高本科生的应用统计及数据科学素质教育，适应数据时代发展的高要求。

感谢对外经济贸易大学出版社的同志们，经过反复修改论证，使这套教材得以出版。感谢参与这套教材编写的统计学院教师们。编写统计学与数据科学系列教材是建院以来的首次尝试，恳请兄弟院校专家、使用这套教材的师生和读者多提宝贵意见，使教材不断完善。

统计学与数据科学系列教材指导委员会

2019 年 5 月 1 日于惠园

前　言

“高等数学”或“微积分”是财经类高校各专业很重要的一门公共基础课程，它是相应专业本科生学习后续数学类课程的基础，也是经贸、金融等各专业研究生入学考试的必修课程。本书作为对外经济贸易大学统计学院的统计学与数据科学系列教材之一，旨在进一步提高本科基础课教学质量，以及更加适应财经类高校本科生的特点，强化和提高学生的逻辑思维、抽象思维、发散思维等基础数理分析能力，以适应未来国家和社会对创新型人才的强烈需求。本书可作为财经类高校或同等学历教育高等数学的教材或教学参考书。

对于本书的结构、内容和突出特点，我们给予以下说明：

第一，在结构方面，每章开头都列出本章的学习目标和重要概念，并在每节都配有适量的练习题。每章结尾都有本章重要知识点的总结，并根据先易后难的原则，给出 A，B 两套总习题。

第二，第〇章的预备知识可视为高等数学先修课的内容。它包含了高等数学将要用到，但在高中阶段尤其是文科生未曾掌握的基础知识。此外，为提升学生的数学素养，第〇章还介绍了三个重要的初等不等式，这对学生学习后续的数学类课程、参加数学竞赛以及考研都将有所裨益。

第三，第一章在介绍数列以及函数的极限时，特别突出了“无穷小”这一概念及其运算法则。这样做的目的是为了使学生加深对极限概念的理解，也让学生对于未定式类型的极限的计算方法有更好的领悟，从而为后续章节的学习打下更加坚实的基础。

第四，第二章介绍导数与微分的基本概念、运算法则和基本公式。以极限为工具，利用导数定义推导出基本初等函数的导数公式，使学生不仅知其然，而且知其所以然。根据财经类高校的专业特点，本章还增加了边际与边际分析、弹性与弹性分析，以达到

理论与应用相结合的目的。

第五，第三章的中值定理与导数应用是一元函数微分学的核心内容。本章首先介绍几个中值定理以及洛必达法则，然后以微分中值定理为理论基础，对函数的单调性、极值、凹凸性、拐点以及图像等进行了系统探讨。

第六，第四章从微分逆运算的角度提出原函数与不定积分的概念。介绍了不定积分的性质与运算方法，在不定积分概念理解及运算方法中，强化微分与积分的互逆关系，增强了对微分概念的理解，降低了不定积分的运算技巧，总结了不定积分的运算规则和步骤，降低了学习难度。

本教材的编写由对外经济贸易大学统计学院应用数学系完成。教材的第〇章与第一章由邵志超老师完成，第二章由郝素敏老师完成，第三章由张小燕老师完成，第四章由苏燕玲老师完成。在本书的编写过程中，编者得到了对外经济贸易大学统计学院领导和同事们的大力支持和关心。本教材的出版还得到了对外经济贸易大学出版社的大力支持和统计学院本科教材建设项目的资助。在此，我们一并表示衷心的感谢。

限于作者的水平有限，书中不足之处在所难免，敬请批评指正。

编　者

2019 年 8 月

目　　录

第〇章　预 备 知 识

☞ 学习目标

1. 熟悉正切、余切、正割、余割四个三角函数的图像及其性质，记住一些常用的三角恒等式；熟悉反正弦、反余弦、反正切、反余切四个反三角函数的概念、图像和性质；

2. 学会运用数学归纳法证明有关自然数的命题；

3. 熟悉组合数的概念，掌握二项式定理及其简单应用；

4. 熟悉等差数列、等比数列求和公式，掌握三角不等式等几个常用不等式；

5. 熟悉极坐标和参数方程的概念，掌握常见的几个极坐标方程和参数方程所表示的曲线；

6. 掌握伯努利不等式、算术—几何平均值不等式、柯西不等式.

☞ 重要概念

反三角函数　三角恒等式　数学归纳法　二项式定理　三角不等式　极坐标方程　参数方程

一、三角函数与三角恒等式

1. 三角函数

我们对正弦函数、余弦函数都已经很熟悉了，下面介绍另外四个三角函数.

（1）**正切函数** $y=\tan x$

正切函数 $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，其定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，其中 k 为任意整数. 正切函数是周期为 π 的函数，它的图像如图 0－1 所示.

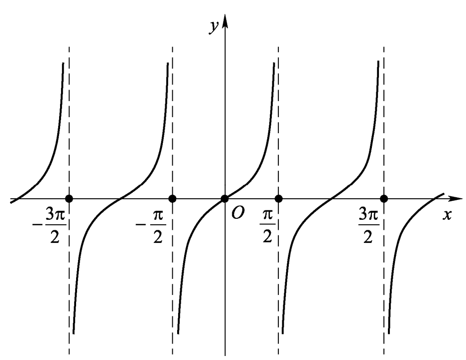

图 0－1

（2）余切函数 $y=\cot x$

余切函数定义为 $y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，其定义域为 $x\neq k\pi$，其中 k 为任意整数. 余切函数是周期为 π 的函数，它的图像如图 0−2 所示.

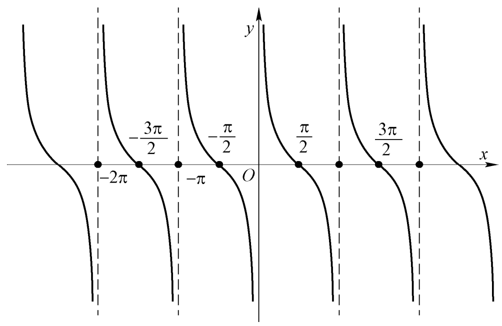

图 0−2

（3）正割函数 $y=\sec x$

正割函数 $y=\sec x$ 定义为余弦函数 $y=\cos x$ 的倒数，其定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，其中 k 为任意整数. 正割函数是周期为 2π 的函数，它的图像如图 0−3 所示.

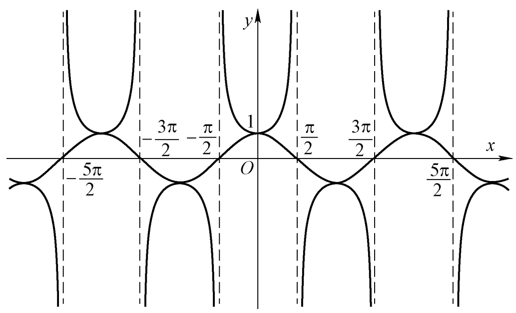

图 0−3

（4）余割函数 $y=\csc x$

余割函数 $y=\csc x$ 定义为正弦函数 $y=\sin x$ 的倒数，其定义域为 $x\neq k\pi$，其中 k 为任意整数. 余割函数也是周期为 2π 的函数，它的图像如图 0−4 所示.

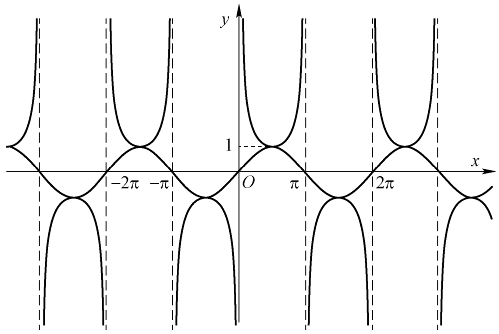

图 0−4

正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数和余割函数，这六个函数统称为**三角函数**（trigonometric function）.

2. 三角恒等式

我们列出一些经常使用的三角恒等式，这些公式应该熟练掌握.

（1） $\sin^2 x+\cos^2 x=1$；

（2） $\sin(2x)=2\sin x\cos x$；

（3） $\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1$；

（4） $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$；

（5） $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$；

（6） $1+\tan^2 x=\sec^2 x$；（由公式（1）和正割函数的定义即得（6）.）

（7） $1+\cot^2 x=\csc^2 x$；（由公式（1）和余割函数的定义即得（7）.）

（8） $\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$；

特别地， $\sin(x+\pi)=(-1)\cdot\sin x$. 一般的，对于任意的正整数 n ，有

（8）′ $\sin(x+n\pi)=(-1)^n\cdot\sin x$；

（9） $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$；

特别地， $\cos(x+\pi)=(-1)\cdot\cos x$. 同理，对于任意的正整数 n ，有

（9）′ $\cos(x+n\pi)=(-1)^n\cdot\cos x$.

（10） $\tan(x\pm y)=\dfrac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}$；（公式（8）除以公式（9）即得（10）.）

（11） $\tan(2x)=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$；

（12） $\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$；

（在公式（8）中令 $x=\dfrac{a+b}{2},y=\dfrac{a-b}{2}$ ，两式相加即得（12）.）

（13） $\sin a-\sin b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$；

（在公式（8）中令 $x=\dfrac{a+b}{2},y=\dfrac{a-b}{2}$ ，两式相减即得（13）.）

（14） $\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$；

（在（9）中令 $x=\dfrac{a+b}{2},y=\dfrac{a-b}{2}$ ，两式相加即得（14）.）

（15） $\cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$；

（在（9）中令 $x=\dfrac{a+b}{2},y=\dfrac{a-b}{2}$ ，两式相减即得（15）.）

（16）$\sin x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$；

（因分别由公式（6）和（2），（16）的右端$=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=$左端.）

（17）$\cos x=\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$；

（因分别由公式（6）和（3），（17）的右端$=\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}=$左端.）

（18）$\tan x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$；（公式（16）除以（17）即得（18）.）

通常，公式（2），（3），（4），（5）统称为**倍角公式**，公式（12），（13），（14），（15）统称为**和差化积公式**，而公式（16），（17），（18）称为**万能公式**.

二、反三角函数

所谓的反三角函数（inverse trigonometric function）并不能简单理解为三角函数的反函数. 三角函数都是周期函数，其值域中的任一点，在其定义域中都存在无穷多个点与之对应，因此，在整个定义域上三角函数不存在反函数. 事实上，我们只需把三角函数限定在其定义域中某个单调区间上，则在此区间上该函数便存在反函数了. 通常我们把反函数所对应的原来的函数称为**直接函数**. 我们定义如下四个反三角函数.

1. 反正弦函数 $y=\arcsin x$

反正弦函数 $y=\arcsin x$ 定义为：直接函数 $y=\sin x, x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的反函数. 如图 0−5 所示. 其性质如下：

（1）$y=\arcsin x$ 的定义域为 $x\in[-1,1]$，值域为 $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$；

（2）$y=\arcsin x$ 的特殊函数值为：$\arcsin 0=0$，$\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$，$\arcsin(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$，$\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，$\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$，$\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}$；

（3）$y=\arcsin x$ 是严格单调递增的有界奇函数.

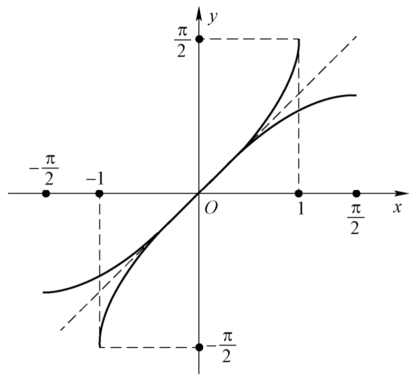

图 0−5

2. 反余弦函数 $y=\arccos x$

反余弦函数 $y=\arccos x$ 定义为：直接函数 $y=\cos x, x\in[0,\pi]$ 的反函数. 如图 0−6 所示. 其性质如下：

（1） $y=\arccos x$ 的定义域为 $x\in[-1,1]$，值域为 $y\in[0,\pi]$；

（2） $y=\arccos x$ 的特殊函数值为： $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$， $\arccos 1=0$， $\arccos(-1)=\pi$， $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$， $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$， $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$；

（3） $y=\arccos x$ 是严格单调递减的有界函数.

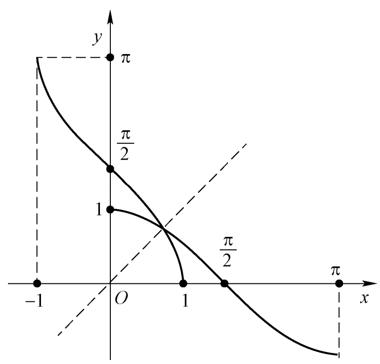

图 0−6

例 1　证明：对于 $x\in[-1,1]$，

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

证　只需证明 $\arcsin x=f(x),\ x\in[-1,1]$，其中 $f(x)=\frac{\pi}{2}-\arccos x$.

由于 $\arccos x$ 的值域为 $[0,\pi]$，故 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，从而 $f(x)$ 与 $\arcsin x$ 具有相同值域. 又由于 $\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格单调增加，因此，对于 x_1，$x_2\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$\sin x_1=\sin x_2$

等价于 $x_1 = x_2$．令 x_1， x_2 分别等于 $f(x)$ 与 $\arcsin x$ ，由于

$$\sin[f(x)] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x = \sin(\arcsin x),$$

因此， $\arcsin x = f(x)$ ， $x \in [-1,1]$．证毕.

3. 反正切函数 $y = \arctan x$

反正切函数 $y = \arctan x$ 定义为：直接函数 $y = \tan x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数．如图 0－7 所示．其性质如下：

（1） $y = \arctan x$ 的定义域为 $x \in (-\infty, +\infty)$ ，值域为 $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$；

（2） $y = \arctan x$ 的特殊函数值为： $\arctan 0 = 0$ ， $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ ， $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{4}$ ， $\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$ ， $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$；

（3） $y = \arctan x$ 是严格单调递增的有界奇函数，并且以 $y = \pm\frac{\pi}{2}$ 为其水平渐近线.

4. 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 定义为：直接函数 $y = \cot x, x \in (0, \pi)$ 的反函数．如图 0－8 所示．其性质如下：

（1） $y = \operatorname{arccot} x$ 的定义域为 $x \in (-\infty, +\infty)$，值域为 $y \in (0, \pi)$；

（2） $y = \operatorname{arccot} x$ 的特殊函数值为： $\operatorname{arccot} 0 = \frac{\pi}{2}$ ， $\operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4}$ ， $\operatorname{arccot}(-1) = \frac{3\pi}{4}$ ， $\operatorname{arccot}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$ ， $\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$；

（3） $y = \operatorname{arccot} x$ 是严格单调递减的有界函数，并且以 $y = 0$ 和 $y = \pi$ 为其水平渐近线.

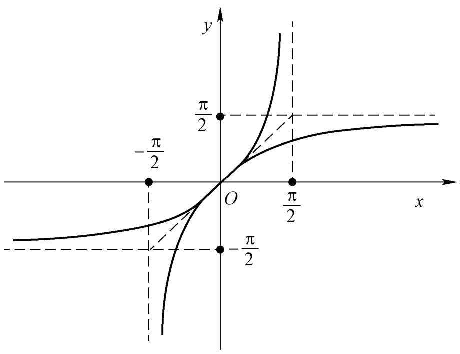

图 0－7

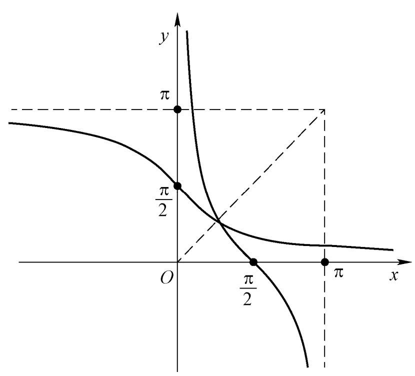

图 0－8

三、数学归纳法、组合数及二项式定理

1. 数学归纳法

数学归纳法（mathematical induction）是一种数学证明方法，可用来证明当 n 为任意

自然数或者某一部分自然数时某命题成立. 用数学归纳法证明某命题时，可分两步进行：

（1）证明当 $n=1$（或等于某个自然数 n_0）时命题成立.

（2）假设当 $n=m$ 时命题成立. 由此假设，可推导出当 $n=m+1$ 时命题也成立.

例 2 用数学归纳法证明：对于正整数 n，成立

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\,. \tag{0.1}$$

证 当 $n=1$ 时，显然公式成立.

假设当 $n=m$ 时等式成立，即 $1^2+2^2+\cdots+m^2=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$.

则当 $n=m+1$ 时，利用归纳假设，我们有

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+n^2&=1^2+2^2+\cdots+m^2+(m+1)^2=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)+(m+1)^2\\&=\frac{1}{6}(m+1)[(2m^2+m)+(6m+6)]=\frac{1}{6}(m+1)[(2m^2+7m+6)]\\&=\frac{1}{6}(m+1)(m+2)(2m+3)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\,.\end{aligned}$$

由数学归纳法，可知等式（0.1）成立. 证毕.

2. 组合数

从 n 个不同元素中取出 $k(k\leqslant n)$ 个元素的所有不同组合的个数，叫作从 n 个不同元素中取出 k 个元素的**组合数**（combinatorial number），我们用符号 C_n^k 表示.

为了计算组合数 C_n^k，我们把 n 个不同元素想象成标号为 1 到 n 的小球，并依次取出 k 个来. 第一次取，有 n 种可能的取法；第二次再取，有 $n-1$ 种可能；依次类推，当取出 $k-1$ 个小球后，这时还剩下 $n-(k-1)$ 个球，因此，要取第 k 个球时，就有 $n-k+1$ 种可能的取法. 所以，取出 k 个小球的所有可能的取法共有 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 种.

注意：$n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 并非组合数. 因为在上述取法中，可能出现这种情况：取出小球的顺序不同，但最终结果却是 k 个小球号码完全相同. 而所有这些按不同顺序的取法只能算作同一个组合. 那么由选取顺序不同而得到同一组合的取法有多少种呢？不难发现，这正是 k 个不同小球任意的排列数 $k!$. 由此可知，从 n 个不同元素中取出 $k\,(1\leqslant k\leqslant n)$ 个元素的组合数为

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\,. \tag{0.2}$$

特别的，当 $k=0$ 时，我们规定：$C_n^0=1$. 则当 k 分别取 $0,1,2$ 以及 $n-1$ 和 n 时，我们有

$$C_n^0=1,C_n^1=n,C_n^2=\frac{n(n-1)}{2!},C_n^{n-1}=n,C_n^n=1\,.$$

从而，$C_n^0=C_n^n$，$C_n^1=C_n^{n-1}$.

更一般的，组合数 C_n^k 具有下面两个性质：

（1）设自然数 $0\leqslant k\leqslant n$，则

$$C_n^k=C_n^{n-k}\,.$$