

高等院校理工科类大学物理系列教材

UNIVERSITY
PHYSICS

大学物理实验

主编 » 吕洪方 石文星



华中科技大学出版社
<http://www.hustp.com>

目 录

第 1 章 实验误差与数据处理 1

1.1 测量与误差 1

1.2 误差的分类及误差处理 1

1.3 直接测量随机误差的计算及测量结果的表达 4

1.4 间接测量结果的计算及误差的传递与合成 7

1.5 实验中的错误与错误数据的处理 9

1.6 有效数字及其运算规则 10

1.7 物理实验中常用的数据处理方法 13

1.8 物理实验的基本程序 17

第 2 章 验证性基础实验 19

实验 2.1 基本测量 19

实验 2.2 重力加速度的测定 23

实验 2.3 验证动量守恒定律 26

实验 2.4 气体比热容比的测定 30

实验 2.5 LRC 电路的暂态过程研究 33

实验 2.6 分光计的调节及三棱镜顶角和折射率的测定 37

- 实验 2.7 光栅的衍射 45
- 实验 2.8 等厚干涉现象的观测 49
- 实验 2.9 单缝衍射的光强分布 53
- 实验 2.10 迈克尔逊干涉仪的应用 57
- 实验 2.11 光的偏振 63
- 实验 2.12 夫兰克 赫兹实验 66
- 实验 2.13 密立根油滴实验 68

第 3 章 综合性实验 73

- 实验 3.1 示波器的使用 73
- 实验 3.2 刚体转动惯量的测定 77
- 实验 3.3 杨氏弹性模量的测定 81
- 实验 3.4 金属线膨胀系数的测量 85
- 实验 3.5 液体黏滞系数的测定 88
- 实验 3.6 落球法测定液体不同温度的黏滞系数 91
- 实验 3.7 声速测量实验 95
- 实验 3.8 弦振动的研究 100
- 实验 3.9 液体表面张力系数的测量 107
- 实验 3.10 导热系数的测定 111
- 实验 3.11 用单臂、双臂电桥测电阻 114
- 实验 3.12 铁磁物质的磁滞回线 118
- 实验 3.13 铁磁物质居里温度的测定 123

- 实验 3.14 薄透镜焦距的测定 126
- 实验 3.15 液晶电光效应实验 129
- 实验 3.16 音频信号光纤传输技术实验 133
- 实验 3.17 用磁聚焦测量电子的荷质比 138
- 实验 3.18 普朗克常数的测定 140

第 4 章 设计性实验 145

- 实验 4.1 电表的改装与校准 145
- 实验 4.2 电子束的电偏转和电聚焦 148
- 实验 4.3 各向异性磁阻传感器与磁场的测量 154
- 实验 4.4 霍尔效应测量磁场 158
- 实验 4.5 螺线管磁场分布的测量 161

第 5 章 虚拟仿真实验 167

附录 174

第 1 章 实验误差与数据处理

1.1 测量与误差

测量一般分为两类:直接测量和间接测量。直接测量是指用标准量与待测量进行比较的过程,它无须进行任何函数关系的辅助运算。当用 Y 表示待测量(在测量时称为被测量), X 表示直接测量得到的量时,则

$$Y = X \quad (1-1-1)$$

直接测量的特点是待测的未知量与直接测量得到的量是一致的。例如,用米尺测量长度、秒表计时间、天平称质量、电流表测电流、温度计测温度等,皆为直接测量。

间接测量是指被测量与直接测量得到的量之间需要通过一定的函数关系的辅助运算,才能得到被测量的过程,即

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1-1-2)$$

式中: x_1, x_2, \dots, x_n 是直接测量得到的量。

间接测量的特点是待测的未知量与直接测量得到的量是不一致的。例如,求某圆柱形导线的电阻率 ρ ,必须先测得其长度 L 、直径 d 和电阻值 R ,然后利用公式计算 ρ 的值,即

$$\rho = \frac{\pi d^2 R}{4L} \quad (1-1-3)$$

物理量的测量中,绝大部分是间接测量,直接测量是间接测量的基础。无论是哪种测量,都需要在满足一定的实验条件下,按照严格的方法和正确地使用仪器,才能获取测量结果,即获得数据。由于在测量过程中始终存在着各种因素的干扰,故所测得的值只是对真值的近似描述。所谓的真值,就是被测量在实验当时条件下有一个不以人的意志改变而变化的客观存在值。若用 A 表示真值, x 表示测量值,那么差值 $\Delta x = x - A$ 就称为误差。 Δx 与 x 同量纲,故又常称 Δx 为绝对误差。显而易见,误差的正负就表示测量值偏离真值的方向。真值是不能确知的,所以测量值的误差也是不能确切知道的,常常用测量的最佳估计值来代替真值。因此,测量的任务是给出最佳估计值和相应的可靠程度的估计。

1.2 误差的分类及误差处理

既然通过测量不能得到真值,那么怎样才能最大限度地减小测量误差并估算出误差的范围呢?要解决这个问题,首先要了解误差产生的原因及其性质。根据误差产生的原因与性质的不同,通常将误差分为系统误差和随机误差。本书若无特别说明,则不计系统误差。

1. 系统误差

在一定条件(仪器、方法和环境等)下对同一物理量进行多次测量时,误差的正负号和绝对值保持恒定,或者在该测量条件改变时,其误差按一定的规律变化,此类误差称为系统误差。产生系统误差的原因主要有以下几个。

1) 仪器误差

仪器误差是由于仪器本身存在一定的缺陷或没有按规定条件使用仪器造成的。例如:仪器的零点不准,仪器的水平未调整,在 20 °C 下标定的标准电池在 35 °C 下使用等。

2) 原理误差

原理误差(或方法误差)是由于理论公式本身的近似性或实验条件的不完善性造成的。例如:用单摆测量重力加速度时,忽略空气对摆球的阻力影响;用伏安法测电阻时,不考虑电表内阻的影响及电路的接入误差。

3) 观察者误差

观察者误差是由于观察者本人生理或心理特点所引入的误差。例如:读数时,观察者可能习惯性偏向某一方向;按动秒表时,观察者可能习惯性提前或滞后。

2. 随机误差

在实际测量条件下,多次测量同一物理量的过程中,误差的正负号和绝对值的变化时大时小、时正时负,这种以不可预知的方式变化的误差称为随机误差。随机误差产生的原因很多,一般可分为两大类:

第一类,实验中各种微小因素的变动,如实验装置在各次调整操作上的变动性、气流的扰动、温度的起伏、电压的波动、杂散电磁场的干扰等引入的误差;

第二类,观察者在对准目标、确定平衡、估读数据时以及其分辨能力所限所引入的误差。

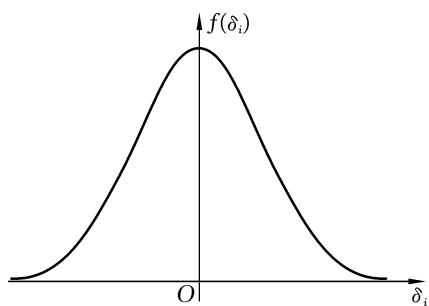


图 1-2-1 正态分布曲线

单就每一次测量而言,随机误差的出现是没有规律的,大小和方向都是不可预知的。但只要进行足够多次的测量,就会发现随机误差服从一定的统计规律。根据随机误差的性质,有多种处理随机误差的理论和方法。最常见的所谓遵从正态分布(又称高斯分布,此时只考虑随机误差)的误差如图 1-2-1 所示。图 1-2-1 中,横坐标 $\delta_i = \Delta x_i = x_i - A$, 表示误差,纵坐标 $f(\delta_i)$ 表示与误差出现的概率有关的概率密度函数。由图 1-2-1 可知,遵从正态分布的随机误差有以下几点特征。

- (1) 单峰性:绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的概率大。
- (2) 对称性:绝对值相等的正负误差出现的概率相等。
- (3) 有界性:在一定的条件下,误差的绝对值不会超过一定的范围。
- (4) 抵偿性:在测量次数 $n \rightarrow \infty$ 时,全部误差的代数和等于零,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \delta_i = 0 \tag{1-2-1}$$

根据概率论的数学方法可以导出

$$f(\delta_i) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta_i^2}{2\sigma^2}} \quad (1-2-2)$$

式中： σ 是一个与实验条件有关的常数，称为标准偏差，其值为

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^2} \quad (1-2-3)$$

式中： n 为测量次数，各次测量的随机误差为 $\delta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

随机误差的正态分布曲线的形状与 σ 值有关。 σ 值越小，分布曲线越尖锐，峰值 $f(\delta_i)$ 越高，说明绝对值小的误差占多数，且测量值的离散性较小、重复性好，测量精密度较高；反之， σ 值越大，分布曲线越平坦，则测量值的离散性较大，测量精密度较低。

对任意一次测量，其测量值误差出现在区间 $(-\sigma, +\sigma)$ 的概率为

$$P = \int_{-\sigma}^{+\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} d\delta = 68.3\% \quad (1-2-4)$$

用同样的方法可算得，误差出现在区间 $(-2\sigma, +2\sigma)$ 的概率为 95.5%，出现在区间 $(-3\sigma, +3\sigma)$ 的概率为 99.7%。测量误差的绝对值大于 3σ 的概率仅为 0.3%，因此在有限次的测量中，误差超出区间 $(-3\sigma, +3\sigma)$ 的情况几乎不会出现，所以把 3σ 称为极限误差。

3. 随机误差与系统误差的关系

系统误差的确定性及随机误差的随机性是同时存在于一切科学实验中的，它们之间的关系有时难以区分。我们常把目前尚不清楚的系统误差当作随机误差来处理。例如，已做零点校正的游标卡尺产生的误差为系统误差；也常把规律过于复杂的系统误差当作随机误差来处理，例如，加工的圆柱体，其直径处处都有确定的值，其产生的误差是系统误差，但对于直径的平均效应来讲，圆柱体各处直径产生的误差有正有负、有大有小，具有随机误差的特性。反过来，随机误差依一定的条件可转化为系统误差，如尺子刻度的不均匀性对尺子各个刻度位置而言，其产生的误差具有随机性，但将它作为基准尺去成批检定尺子时，该分度误差使测量结果始终偏长或偏短，呈现系统误差的特性。

总之，一旦实验条件确定，作为在这种条件下的系统误差及随机误差就基本确定，测量结果的误差是两者的综合。在实际的测量中，应牢记这两类误差，对测量结果做出符合实际的客观评定。

4. 测量的精密度、准确度、精确度

在描述测量结果时，经常会用精度来表征误差大小。误差小的精度高，误差大的精度低。但是精度是一个笼统的概念，并没有明确表示是哪一种精度。为使描述更具体、更直观，可以将精度分为精密度、准确度和精确度。

1) 精密度

精密度是用来表示测量结果中随机误差大小的程度，是指在一定条件下进行重复测量时，所得结果的相互接近程度。它用来表征测量的重复性。精密度高，表示测量结果重复性好，随机误差较小。

2) 准确度

准确度是用来表示测量结果中系统误差大小的程度。它用来表征测量值接近真值的程度。准确度越高，测量结果越接近真值，系统误差越小。

3) 精确度

精确度是对测量结果中系统误差和随机误差的综合描述。它是指测量结果的重复性和接近真值的程度。

1.3 直接测量随机误差的计算及测量结果的表达

1. 直接测量结果的算术平均值

设在相同条件下对某一物理量进行 n 次独立的直接测量, 所得 n 个测量值分别为 x_1, x_2, \dots, x_n , 则该测量值的算术平均值为

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1-3-1)$$

式中: $i = 1, 2, \dots, n$ 为测量次数。第 i 次测量相应的随机误差为 $\delta_i = \Delta x_i = x_i - A$, 其中, A 为真值。对 n 次测量的随机误差求和, 有

$$\sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n x_i - nA \quad (1-3-2)$$

式(1-3-2)两边都除以 n , 可得

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - A = \bar{x} - A \quad (1-3-3)$$

当测量次数 $n \rightarrow \infty$, 由随机误差具有抵偿性的特征, 可知

$$\bar{x} \rightarrow A \quad (1-3-4)$$

由此可知, 测量次数越多时, 计算得到的算术平均值越接近于真值。因此一般把测量值的算术平均值当作真值的最佳估计值或最近真值。

例 1-1 测量某物体长度 10 次, 得值 x_i 如下: $x_i = 7.981 \text{ cm}, 7.982 \text{ cm}, 7.980 \text{ cm}, 7.983 \text{ cm}, 7.981 \text{ cm}, 7.982 \text{ cm}, 7.984 \text{ cm}, 7.982 \text{ cm}, 7.980 \text{ cm}, 7.983 \text{ cm}$, 求该列测量结果的平均值。

解

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i \\ &= \frac{1}{10} (7.981 + 7.982 + 7.980 + 7.983 + 7.981 + 7.982 + 7.984 + 7.982 + 7.980 + 7.983) \text{ cm} \\ &= 7.9818 \text{ cm} \\ &\approx 7.982 \text{ cm} \end{aligned}$$

2. 直接测量结果的随机误差估计

1) 多次测量结果的随机误差估计

由于无法知道客观真值, 那么也无法确定测量误差 δ_i , 也无从估算相应的标准误差 σ 。根据测量值的算术平均值是最近真值或最佳估计值, 在实际估算误差的时候, 可用测量值的算术平均值代替真值来估算误差, 即 $\delta_i = \Delta x_i = x_i - \bar{x}$, 该差值称为残差。对于有限测量次数 n , 当用残差来表示误差时, 任意一次测量值的标准偏差用 S_x 表示为

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (1-3-5)$$

对于有限多次测量, S_x 是标准偏差的一个估计值。如果多次测量的随机误差遵从正态分布, 那么, 任意一次测量的随机误差在区间 $(-S_x, +S_x)$ 的可能性(概率)为 68.3%。

n 次测量的算术平均值的标准偏差 $S_{\bar{x}}$ 为

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (1-3-6)$$

由式(1-3-6)可知, 算术平均值的标准偏差是 n 次测量中任意一次测量值标准偏差的 $1/\sqrt{n}$ 。 $S_{\bar{x}} < S_x$, 因为算术平均值是测量结果的最佳估计值, 比任意一次测量值更接近真值, 误差更小。如果多次测量的随机误差遵从正态分布, 那么真值处于区间 $(\bar{x} - S_{\bar{x}}, \bar{x} + S_{\bar{x}})$ 的概率为 68.3%。

增加测量次数 n , $S_{\bar{x}}$ 将变小。由于 $S_{\bar{x}}$ 与 n 的平方根成反比, 当 n 增加到一定值后, $S_{\bar{x}}$ 随之的减少程度就不太明显了。在实际测量工作中, 并不是测量次数越多越好。因为增加 n , 测量时间必定要延长, 这会对保持稳定的测量条件带来困难, 同时也会引起观测者疲劳, 从而引入新的误差。另外, 增加测量次数 n 只能对降低随机误差有利, 而与系统误差的减少无关。因此选取测量次数 n 的一般原则是: 在随机误差较大的测量中要多测几次, 一般实验取 6~10 次, 科学实验可取 10~20 次; 对于分散性小的一般测量, 从效率考虑多数可以单次测量。

例 1-2 计算例 1-1 中单次测量结果的标准偏差 S_x , 以及算术平均值的标准偏差 $S_{\bar{x}}$ 。

解 例 1-1 中任意单次测量结果的标准偏差为

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (\delta_i)^2}$$

其中, $\delta_i = x_i - \bar{x}$, 所以

$$\delta_i = -0.0008 \text{ cm}, 0.0002 \text{ cm}, -0.0018 \text{ cm}, 0.0012 \text{ cm}, -0.0008 \text{ cm}, 0.0002 \text{ cm}, \\ 0.0022 \text{ cm}, 0.0002 \text{ cm}, -0.0018 \text{ cm}, 0.0012 \text{ cm}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{15.6 \times 10^{-6}}{10-1}} \approx 0.0013 \text{ cm} \approx 0.002 \text{ cm}$$

按算术平均值的标准偏差定义可得

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} \approx \frac{0.0013}{\sqrt{10}} \approx 0.00041 \text{ cm} \approx 0.0005 \text{ cm}$$

一般情况下, 为了避免计算引入的舍入误差, 在计算过程中对中间计算量可取两位有效数字, 而对最终的计算结果只取一位有效数字, 且只入不舍。

2) 多次测量值相同或单次测量的误差估计

在实际工作中, 常限于被测对象特别稳定而仪器的灵敏度不够需要多次测量, 出现多次测量的值相同, 以及工作中有时不需要精确测量而只做单次测量, 这时的误差应如何估计呢?

通常, 测量结果的误差是系统误差和随机误差的综合, 对于多次测量值相同, 仪器的灵敏度不够, 以致仪器误差“淹没”了随机误差, 这时可用仪器误差作为测量结果的评定, 对于单次测量也是如此。但必须指出, 无论对于多次测量值相同还是单次测量的情况, 都必须把产生误差的因素分析清楚; 否则, 即使是用仪器误差来表征测量结果, 也会产生对误差估计不足的失误。例如, 用卷尺测量物体长度时, 如果测量者倾斜拉尺或卷尺扭曲, 这时产生的误差就会比仪器误差大得多, 如果仍然用仪器误差来评定测量结果, 则会产生测量错误。

仪器误差表征了仪器示值的不确定范围,属于非统计量,鉴于误差以正态分布为基本分布,故在普通物理实验中,以3倍标准偏差与仪器误差相对应,即 $3S = \Delta_{\text{仪}}$ 。在实际中都是以仪器出厂技术检定书上的各种技术指标来评定仪器质量的,故 $\Delta_{\text{仪}}$ 是一种简化处理。

3. 直接测量结果的不确定度估计

任何测量过程中都存在误差,误差是测量值与真值之差,由于真值不能被确切地知道,误差便无法确定。因此通常需要引入一个表征真值在某一个量值范围内的不能确定程度的估计值,这个估计值就是测量不确定度,简称不确定度。它是测量结果中无法修正的部分,是反映被测量值不能肯定的误差范围的一种评定,不确定度包含A类标准不确定度、B类标准不确定度和合成不确定度。

1) A类标准不确定度

由于偶然因素的存在,在同一条件下对同一物理量 x 进行多次重复测量,所得测量值 x_1, x_2, \dots, x_n 是分散的。从分散的测量值出发,用统计的方法评定的不确定度就是A类标准不确定度,用 Δ_A 表示。用统计的方法算出平均值的标准偏差 $S_{\bar{x}}$,A类不确定度就取为 $S_{\bar{x}}$,即

$$\Delta_A = S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (1-3-7)$$

如果多次测量的随机误差遵从正态分布,那么不确定度 Δ_A 表示物理量 x 的随机误差在区间 $(-\Delta_A, +\Delta_A)$ 的概率为68.3%。

2) B类标准不确定度

测量中凡是不符合统计规律的不确定度统称为B类不确定度。在实际计算时,有的依据计量仪器的说明书或检定书,有的依据仪器的准确度,有的则粗略地依据仪器的最小分度值,以获得仪器的极限误差 Δ ,而B类标准不确定度为

$$\Delta_B = \frac{\Delta}{k} \quad (1-3-8)$$

式中: k 是一常量。根据概率统计理论对于均匀分布, $k = \sqrt{3}$,不确定度 Δ_B 表示物理量 x 的该项误差在 $(-\Delta_B, +\Delta_B)$ 的概率为57.7%。

3) 合成不确定度

对某一物理量进行测量之后,分别评定其A类标准不确定度和B类标准不确定度。无论是A类评定还是B类评定,在合成时应该是等价的,国际上统一采用方根法,即测量结果的合成不确定度为

$$\Delta = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2} \quad (1-3-9)$$

4. 直接测量结果的表达

一个完整的测量结果不仅包括该测量值的大小和单位,同时还包括它的不确定度。用不确定度来表征测量结果的可信程度,于是测量结果应写成下列标准形式

$$x = (\bar{x} \pm \Delta) \text{ 单位} \quad (1-3-10)$$

$$E_x = \frac{\Delta}{\bar{x}} \times 100\% \quad (1-3-11)$$

式中: E_x 称为相对误差,用来表示测量结果的准确程度。

例1-3 已知某游标卡尺 $\Delta_{\text{仪}} = 0.05 \text{ mm}$,初读数为 0.50 mm ,用该游标卡尺测量圆柱体直径时的读数如表1-3-1所示,试写出测量结果。

表 1-3-1 圆柱体直径的测量值

测量次数	1	2	3	4	5	6
读数 /mm	22.55	22.50	22.55	22.50	22.60	22.55

解 零点修正后,该圆柱体直径的测量值为 $D_i = 22.05 \text{ mm}, 22.00 \text{ mm}, 22.05 \text{ mm}, 22.00 \text{ mm}, 22.10 \text{ mm}, 22.05 \text{ mm}$, 则

$$\bar{D} = \frac{1}{6}(22.05 + 22.00 + 22.05 + 22.00 + 22.10 + 22.05) \text{ mm} \approx 22.04 \text{ mm}$$

$$S_{\bar{D}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2} = 0.015 \text{ mm} \approx 0.02 \text{ mm}$$

由式(1-3-7)可得 A 类不确定度为

$$\Delta_A = S_{\bar{D}}$$

由式(1-3-8)可得 B 类不确定度为

$$\Delta_B = \frac{\Delta_{\text{仪}}}{\sqrt{3}} \approx 0.03 \text{ mm}$$

所以合成不确定度为

$$\Delta = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2} \approx 0.04 \text{ mm}$$

测量结果为

$$D = (22.04 \pm 0.04) \text{ mm}$$

$$E_D = \frac{\Delta}{D} \times 100\% \approx 0.18\%$$

1.4 间接测量结果的计算及误差的传递与合成

1. 间接测量结果的计算

设间接测量量与直接测量量具有 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的函数关系, x_1, x_2, \dots, x_n 为彼此独立的直接测量量。在直接测量中,以算术平均值作为测量结果的最佳估计值,若 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ 为各组直接测量的测量结果的最佳估计值,那么间接测量结果的最佳估计值 \bar{y} 可表示为

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad (1-4-1)$$

2. 间接测量误差的传递与合成

1) 误差传递的基本公式

设函数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 且 x_1, x_2, \dots, x_n 为彼此独立的直接测量量,利用全微分公式有

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n \quad (1-4-2)$$

或对该函数取自然对数后,再利用全微分公式有

$$\frac{dy}{y} = \frac{\partial \ln y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \ln y}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \ln y}{\partial x_n} dx_n \quad (1-4-3)$$

式(1-4-2)和式(1-4-3)为误差传递的基本公式,如果间接测量量是直接测量量的和函数或差函数时,一般选择式(1-4-2)计算较为方便,当间接测量量是直接测量量的积函数或商函数时,采用式(1-4-3)计算比较方便。

2) 标准偏差传递公式(方根法)

由式(1-4-2)或式(1-4-3)可导出间接测量的标准偏差传递公式,即

$$S_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} S_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} S_{x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n} S_{x_n}\right)^2} \quad (1-4-4)$$

或

$$\frac{S_y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln y}{\partial x_1} S_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln y}{\partial x_2} S_{x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial \ln y}{\partial x_n} S_{x_n}\right)^2} \quad (1-4-5)$$

对于式(1-4-4)和式(1-4-5),如果代入测量列标准偏差和测量值 x_i ,计算所得 S_y 就是测量列的标准偏差,如果代入算术平均值的标准偏差和平均值 \bar{x} ,计算所得用 $S_{\bar{y}}$ 表示,称为算术平均值的标准偏差。

3) 算术合成的误差传递公式

由式(1-4-2)或式(1-4-3)可导出间接测量的算术合成的误差传递公式,即

$$\Delta_y = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta_{x_1} \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta_{x_2} \right| + \cdots + \left| \frac{\partial y}{\partial x_n} \Delta_{x_n} \right| \quad (1-4-6)$$

或

$$\frac{\Delta_y}{y} = \left| \frac{\partial \ln y}{\partial x_1} \Delta_{x_1} \right| + \left| \frac{\partial \ln y}{\partial x_2} \Delta_{x_2} \right| + \cdots + \left| \frac{\partial \ln y}{\partial x_n} \Delta_{x_n} \right| \quad (1-4-7)$$

利用算术合成的误差传递公式计算误差,在一定程度上会夸大测量结果的误差,尤其在分项较多的情况下。但在误差分析、实验设计或比较粗略的误差计算中,这样的误差估计是比较简单和稳妥的。

4) 不确定度的误差传递公式

由式(1-4-2)或式(1-4-3)可导出间接测量的不确定度的误差传递公式,即

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta_{x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n} \Delta_{x_n}\right)^2} \quad (1-4-8)$$

或

$$\frac{\Delta_y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln y}{\partial x_1} \Delta_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln y}{\partial x_2} \Delta_{x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial \ln y}{\partial x_n} \Delta_{x_n}\right)^2} \quad (1-4-9)$$

例 1-4 已知某金属环的内径 $D_1 = (2.880 \pm 0.004)$ cm, 外径 $D_2 = (3.600 \pm 0.004)$ cm, 高度 $h = (2.575 \pm 0.004)$ cm, 求该金属环的体积 V 。

解 根据题意得,金属环的平均体积为

$$\bar{V} = \frac{1}{4} \pi (\bar{D}_2^2 - \bar{D}_1^2) \bar{h} = \frac{\pi}{4} (3.600^2 - 2.880^2) \text{ cm}^2 \times 2.575 \text{ cm} \approx 9.436 \text{ cm}^3$$

对金属环的体积取对数及求偏导数,可得

$$\begin{aligned} \ln \bar{V} &= \ln \frac{\pi}{4} + \ln(\bar{D}_2^2 - \bar{D}_1^2) + \ln \bar{h} \\ \frac{\partial \ln \bar{V}}{\partial D_1} &= \frac{-2 \bar{D}_1}{\bar{D}_2^2 - \bar{D}_1^2}, \quad \frac{\partial \ln \bar{V}}{\partial D_2} = \frac{2 \bar{D}_2}{\bar{D}_2^2 - \bar{D}_1^2}, \quad \frac{\partial \ln \bar{V}}{\partial h} = \frac{1}{\bar{h}} \end{aligned}$$

利用不确定度的误差传递公式可得

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta_V}{\bar{V}}\right)^2 &= \left(\frac{-2\bar{D}_1}{\bar{D}_2^2 - \bar{D}_1^2}\Delta_{D_1}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{D}_2}{\bar{D}_2^2 - \bar{D}_1^2}\Delta_{D_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{h}\Delta_h\right)^2 \\ &= \left(\frac{-2 \times 2.880}{3.600^2 - 2.880^2} \times 0.004\right)^2 + \left(\frac{2 \times 3.600}{3.600^2 - 2.880^2} \times 0.004\right)^2 + \left(\frac{0.004}{2.575}\right)^2 \\ &\approx 64.9 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta_V}{\bar{V}} \approx 0.81\%$$

$$\Delta_V = \bar{V} \cdot \frac{\Delta_V}{\bar{V}} = 9.436 \text{ cm}^3 \times 0.0081 \approx 0.08 \text{ cm}^3$$

因此,金属环的体积为

$$V = (9.44 \pm 0.08) \text{ cm}^3$$

1.5 实验中的错误与错误数据的处理

实验操作过程中有时会出现各种各样的错误,我们要尽量防止出现错误。

尽早发现实验中的错误是实验得以顺利进行的前提。防止出现错误的关键是,熟悉实验理论和各种实验条件,明确要观察的实验现象,正确使用实验仪器。

尽早发现实验中的错误是实验者应该养成的良好习惯。在观察实验现象的同时,要及时分析思考,确保避免实验过程中出现的各种错误。

数据分析是发现错误的重要方法。例如,测量单摆摆动 50 个周期的时间,测得时间为 98.4 s、96.7 s、97.7 s。从数据可知单摆的周期接近 2 s,但前面两个数据相差 1.7 s,而后两个数据相差 1.0 s,它们都在半个周期以上,显然,这么大的差异是不能用手按秒表稍许提前或滞后的操作不当去解释的,那么只能是在测量过程出现了错误。

常见的判断错误数据的方法主要有两种:拉依达准则和格拉布斯准则。

1. 拉依达准则(Pauta criterion)

在一组数据中,有时会有两个稍许偏大或者偏小的数值,如果通过简单的数据分析不能判定它是否为错误数据,就要借助误差理论。

在前面关于标准误差的物理意义中已提到对于服从正态分布的随机误差,其任意一次测量的误差出现在区间 $(-S_x, +S_x)$ 的概率为 68.3%,出现在区间 $(-3S_x, +3S_x)$ 的概率为 99.7%。如果用测量列的算术平均替代真值,则测量列中约有 99.7% 的数据应落在区间 $(\bar{x} - 3S_x, \bar{x} + 3S_x)$ 内。如果某数据出现在此区间之外,则认为它是错误数据,这时应将该数据舍去。这样以测量列标准偏差 S_x 的 3 倍为界去决定数据的取舍就成为一个剔除错误数据的准则,这个准则称为拉依达准则。

2. 格拉布斯准则(Grubbs criterion)

设测量值 x_1, x_2, \dots, x_n 近似为正态样本,平均值为 \bar{x} ,任一次测量值标准偏差为 S_x ,取统计量 G 为

$$G = \frac{|x_i - \bar{x}|}{S_x} \quad (1-5-1)$$

格拉布斯准则给出 G 的分布的临界值 $G(n, \alpha)$, 其中 α 为检出水平 (与置信概率 P 相关), n 为测量次数。如果要求严格, 检出水平 α 可以定得小一些, 例如, 定 $\alpha = 0.01$, 那么置信概率 $P = 1 - \alpha = 0.99$; 如果要求不严格, α 可以定得大一些, 如 $\alpha = 0.10$, 即 $P = 0.90$; 通常可以定 $\alpha = 0.05, P = 0.95$ 。

若可疑值为 x_m , 则当

$$\frac{|x_m - \bar{x}|}{S_x} > G(n, \alpha) \quad (1-5-2)$$

时, 就判定 x_m 为高度异常值。

表 1-5-1 给出不同 α , 不同测量次数 n 的临界值 $G(n, \alpha)$ 。

表 1-5-1 格拉布斯准则临界值表

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$G(n, 0.10)$	1.148	1.425	1.602	1.729	1.828	1.909	1.977	2.036
$G(n, 0.05)$	1.153	1.463	1.672	1.822	1.938	2.032	2.110	2.176
$G(n, 0.01)$	1.155	1.492	1.749	1.944	2.097	2.220	2.323	2.410
n	15	20	25	30	40	50	100	
$G(n, 0.10)$	2.247	2.385	2.486	2.583	2.682	2.768	3.017	
$G(n, 0.05)$	2.409	2.557	2.663	2.745	2.866	2.956	3.207	
$G(n, 0.01)$	2.705	2.884	3.009	3.103	3.240	3.336	3.600	

例 1-5 测量某物体的长度, 测量 10 次, 测量结果如表 1-5-2 所示。试用格拉布斯准则发现错误数据, 并计算正确的。

表 1-5-2 某物体的长度测量结果

单位: cm

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5.28	5.23	5.24	5.21	5.20	5.25	5.22	5.45	5.27	5.26

解 计算出: $\bar{x} = 5.26 \text{ cm}, S_x = 0.069 \text{ cm}$ 。

第 8 次测量值 5.45 cm 可疑, 算出

$$G = \frac{|5.45 - 5.26|}{0.069} = 2.754$$

因为 $G(10, 0.01) = 2.410$, 所以 $G > G(10, 0.01)$, 第 8 次测量值应该判为高度异常值, 应舍去。除去后再计算可得

$$\bar{x} = 5.24 \text{ cm}, \quad S_x = 0.027 \text{ cm}, \quad S_{\bar{x}} = 0.009 \text{ cm}$$

1.6 有效数字及其运算规则

1. 有效数字的定义

在做物理实验的过程中, 经常会记录很多数值, 并且进行相应的计算, 而且测量结果都是存

在一定的误差的,在相应的计算过程中涉及误差传递的问题,那么记录的时候取几位数字?运算后应留几位数字?这就涉及实验数据处理中的重要问题,也就是有效数字的问题。

实验时处理的数值,应是能反映出被测量实际大小的数值,记录并进行相应的运算后保留的应为能传递被测量实际大小信息的全部数字,称为有效数字。有效数字由若干准确数字和一位可疑数字构成。

2. 有效数字的特点

1) 有效数字位数与仪器的准确程度有关

一般来说,仪器上显示的数字均应读出(包括最后一位数字的估读)并记录。例如,用一把最小分度为1 mm的尺,测得一物体的长度为4.25 cm,其中,数字4和2是准确读出的,最后一位数字是凭眼力去估读的,而且只能估读到0.1 mm,是存在可疑的读数,但还是近似地反映了被测量大小的信息,也应该算作有效数字。由此表明,对同一物理量进行测量时,仪器的准确程度越高,有效数字的位数就越多。

2) 有效数字的位数与小数点的位置无关

有效数字位数的多少是由仪器的准确度决定的,不会因单位变换而提高仪器的准确程度。例如, $4.25\text{ cm}=42.5\text{ mm}=0.425\text{ dm}=0.0425\text{ m}$,全部都是3位有效数字,数字前面的“0”不是有效数字。

3) 有效数字后面的“0”也是有效数字

当我们用毫米刻度尺去测量某物体的长度时,如果被测物的端点正好与尺的刻度线重合,那么估读位应记为“0”,而不是将其省略不写。例如:应记为4.30 cm,而不是4.3 cm;如果记为4.3 cm,那么按照有效数字的定义,数字3就成为可疑数字,则由此推得该仪器的最小刻度是厘米,而这与实际使用的毫米刻度尺不符,为此,“3”后面应该添“0”。

3. 有效数字的科学记数法

在实际实验中,为了避免因数字过大或过小与误差在表达方面的困难,常采用科学记数法,即将有效数字表达为

$$a \times 10^N \quad (1-6-1)$$

式中: $1 \leq a < 10$, N 为整数。

例如,43 kV的电压值,改用V作单位,应写成 $4.3 \times 10^4\text{ V}$,而不应写成43 000 V,前者为两位有效数字,误差发生在千位上,后者为五位有效数字,误差发生在个位上。

4. 有效数字的运算规则

有效数字的正确运算关系到对实验结果的精确表达,由于运算条件不一样,运算规则也相应地有差别。

(1) 若干个有效数字相加减,应以这些数字中有效数字最末一位位数最高的数为准,其他各数在运算前按“四舍六入,五凑偶”的原则保留到比该数末位数多一位,然后进行加减,其结果的末位数最后仍按“四舍六入,五凑偶”的原则取到与该有效数字末位数相同。

例如, $3.14+1\ 056.76+103-9.852 \rightarrow 3.1+1\ 056.8+103-9.8=1\ 153.1 \rightarrow 1\ 153$,参加运算的各项最后一位最靠前的是103的个位,其计算结果的最后一位就保留在个位上。

“四舍六入,五凑偶”原则中“四”是指不大于4时舍去,“六”是指不小于6时进位,“五”是根

据尾数 5 后面的数字来定。当尾数 5 后面的数字均为 0 时,应当看尾数 5 的前一位,分两种情况:①5 前为奇数时,就应向前进一位;②5 前为偶数,则应将尾数舍去(数字 0 在此时应视为偶数)。当尾数为 5,而尾数 5 后面还有任何不是 0 的数字时,无论前一位在此时为奇数还是偶数,也无论 5 后面不为 0 的数字在哪一位上,都应向前进一位。

例如,应用“四舍六入,五凑偶”原则将下列数据保留 3 位有效数字:

4.224 9→4.22, 4.226 71→4.23, 4.245 0→4.24, 4.255 0→4.26, 4.235 0→4.24, 4.205 0→4.20, 4.195 0→4.20, 4.245 000→4.24, 4.255 000→4.26, 4.235 01→4.24, 4.295 001→4.30, 4.235 000 001→4.24。

(2) 若干个有效数字相乘除时,应以这些数字中有效数字位数最少的数为准,其他各数在运算前按“四舍六入,五凑偶”的原则保留到比该数多取一位(包括各种常数),然后再进行乘除,其结果最后仍按照“四舍六入,五凑偶”的原则取到与该有效数字位数相同。

例如, $19.876 \times 50.7 \div \pi \rightarrow 19.88 \times 50.7 \div 3.142 = 320.7 \rightarrow 321$, 参加运算的各项以 50.7 位数最少,有效位数是三位,因此运算过程中可以取四位有效数字,最后结果为三位有效数字。

(3) 若干个有效数字相乘除和相加减时,按照规则(1)和(2)按部就班地进行运算。

例如,计算

$$\begin{aligned} \frac{8.042\pi}{6.038-6.034} + 309.6 &\rightarrow \frac{8.042 \times 3.1416}{6.038-6.034} + 309.6 \rightarrow \frac{25.265}{0.004} + 309.6 \rightarrow \frac{25}{4 \times 10^{-3}} + 309.6 \\ &\rightarrow 6 \times 10^3 + 309.6 \rightarrow 6 \times 10^3 + 0.31 \times 10^3 \rightarrow 6 \times 10^3 \end{aligned}$$

(4) 函数的有效数字运算规则。

函数的有效数字运算较有效数字的加减乘除略为复杂,一般情况下要考虑如下三点:①通常函数的有效数字与自变量相同;②若自变量给出了不确定度,计算过程中可以比自变量多保留一位有效数位,再用误差传递公式计算函数的不确定度,最终由不确定度决定有效数字位数;③若自变量未给出不确定度,可以采用量具的最小分度值来表示,然后同样通过误差传递公式计算函数不确定度,再得到函数有效数字位数。

例 1-6 已知 $x = 60^\circ 13' \pm 1'$, 计算 $y = \sin x$ 。

解 $\bar{y} = \sin 60^\circ 13' = \sin 1.0509 = 0.86787$

$$S_x = 1' = \frac{\pi}{180} \times \frac{1}{60} = 0.0003$$

$$S_y = \frac{dy}{dx} \times S_x = \cos 1.0509 \times 0.0003 = 1.4 \times 10^{-4} \approx 2 \times 10^{-4}$$

$$y = (0.8679 \pm 0.0002) \times 10^0, \text{ 或者 } y = 0.8679 \pm 0.0002$$

例 1-7 已知 $x = 63.7$, 计算 $y = \ln x$ 。

解 题中没有明确告知自变量 x 的误差,取最小分度,即 $S_x = 0.1$, 则

$$S_y = \frac{dy}{dx} \times S_x = \frac{S_x}{x} = \frac{0.1}{63.7} \approx 0.002$$

也就是函数 y 的误差位为千分位,那么函数 y 的计算结果应取小数点后 3 位,即

$$y = \ln x = \ln 63.7 = 4.154$$

1.7 物理实验中常用的数据处理方法

测量获得了大量的实验数据,而要通过这些数据来得到可靠的实验结果或物理规律,则需要学会正确的数据处理方法。本节将介绍在物理实验中常用的列表法、作图法、逐差法和最小二乘法等数据处理的基本方法。

1. 列表法

在记录和处理实验测量数据时,经常将数据以表格的形式列出,它可以简单而明确地表示出有关物理量之间的对应关系,便于随时检查分析测量结果是否正确合理,及时发现问题,也利于计算和分析误差。通过列表法有助于找出有关物理量之间的规律性,得出定量的结论或经验公式等。一个好的表格,有时能简化运算手续,反映实验的大致过程,因此,列表法是实验人员、工程技术人员最常使用的一种方法。

列表时,一般应遵循下列规则:

- (1) 表格应简单明了,便于看出有关物理量之间的关系,便于处理数据;
- (2) 在表格中均应标明各物理量的符号与意义,并在标题栏中注明符号的单位,不要重复地标在各个数字上;
- (3) 表格中数据要正确反映测量结果的有效数字,不能随意涂改;
- (4) 在必要时,应对表格中某些项目加以说明,并计算出平均值、标准误差和相对误差等。

例 1-8 用千分尺测量钢丝直径,如表 1-7-1 所示。

表 1-7-1 钢丝的直径

次 数	初读数/mm	末读数/mm	直径 D /mm	\bar{D} /mm	S_D /mm
1	0.002	3.147	3.145	3.145	0.001
2	0.004	3.148	3.144		
3	0.003	3.149	3.146		
4	0.001	3.145	3.144		
5	0.003	3.149	3.146		

2. 作图法

1) 作图规则

(1) 作图务必用坐标纸。

常用的坐标纸有直角坐标纸、对数坐标纸、极坐标纸等,应根据不同的需要选用合适坐标纸。原则上,测量数据中的可靠数字在图中应是可靠的,数据中有误差的一位在图中也可以是估计的,有时也根据实际需要,把图纸适当放大些,但不能过大,过大会使原本光滑的图线呈现折线或偏离太远。

(2) 确定坐标轴、标明分度值。

通常,横坐标表示自变量,纵坐标表示因变量,并标注坐标轴所表示的物理量的名称及单