高等职业教育新形态教材

经济应用数学

主　编　王　芳
副主编　黄孙琴　刘明秀

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

前　言

本教材根据高等院校的人才培养目标，结合高等院校应用数学的教学特点和当前高等数学课程改革经验，依照“定位高等，注重简洁直观，强化应用意识，融入数学思想”的原则编写，在符合教材自身逻辑的前提下，结合目前高等院校经济类专业学时少的特点，编写了三个模块（准备模块、理论模块、实践模块），力求语言准确、条理清晰，让教师在教学过程中引导学生跳出传统高等数学学习的误区，以便更容易掌握关键知识点，培养学生形成严谨的数学思维习惯，提升学生的整体职业素质.

本教材归纳起来主要有以下特点：

1. 从数学在经济领域中的应用出发，精选了多个案例，以数学建模贯穿全书，做到数学知识与实际问题的紧密结合，内容新颖，体现了培养应用型、实用型人才的需要.

2. 本教材特别强调学生学习方法的掌握，打破了以往高等教材的完备性、系统性和逻辑性，更注重学生基础概念的建立、基本方法的突破以及应用问题的分析和求解. 淡化数学概念的抽象描述，强化几何直观，突出实际应用. 让学生了解强调本质、结构和强化分类是突破基本方法的核心，真正做到简单高效地掌握基本的计算方法，有利于提高运用数学知识解决实际问题的能力.

3. 本教材精选了一些数学文化的素材，体现了通识必修课的文化功能，重视数学思想的融合和渗透，引导学生初步领会到数学的精神实质和思想方法，有利于发挥数学课程的育人功能，激发学生的学习兴趣和提升数学应用的能力.

4. 本教材在实践模块中介绍了数学软件 Mathematica 的应用，详细讲述了该软件的一般功能和各种操作技巧，使学生能初步掌握数学软件的基本用法，锻炼学生的操作技能，从而提高学生运用数学软件解决实际问题的能力.

5. 本教材配备了微课视频，学生可以随时随地扫描二维码进行观看，方便学生课前预习与课后复习，巩固知识，加深理解.

6. 本教材每个应用后配备了基础练习、提高练习和应用练习，以帮助学生进一步消化知识. 不同层次的练习有助于教师进行层次教学，对学生进行递进训练.

本教材由王芳任主编，黄孙琴、刘明秀任副主编，并参考其他教师的意见和建议，最后由王芳统稿、定稿.

在本教材的编写过程中，得到北京理工大学出版社提供的大力帮助，在此表示感谢!

编写教材是一项影响深远的教育工作，我们深感责任重大．但由于编者的水平有限，虽然经过反复校对和仔细推敲，书稿中恐仍有许多不尽如人意、不合教学之处，衷心期待专家和广大读者批评指正！

编　者

目 录

准备模块

函数与数学模型

构建函数模型

随着科学技术的进步，数学的应用已不再局限于自然科学，它已大量应用于经济学、管理学、信息科学、环境科学等各个领域，大到国民经济，小到公司管理、个人规划等均离不开数学这个工具．许多以定性为基础的学科正逐步走上定量化的道路．数学在搞好经济管理、发展生产以及自然学科或社会学科中的重要性已为越来越多的人所认识．通过本部分的学习，学生将初步了解数学建模的过程和方法，领略如何用数学来描述自然现象、社会现象的变化规律，并用它来解决问题．

数学模型是针对现实世界的某一特定对象，为了一个特定的目的，根据特有的内在规律，作出必要的简化和假设，运用适当的数学工具，采用形式化语言，概括或近似地表述出来的一种数学结构．它能解释特定对象的现实状态，或能预测特定对象的未来状态，或能提供处理特定对象的最优决策或控制．函数关系可以看作一种变量间有相互依存关系的数学模型．通过举例，了解如何运用学过的函数解决一些简单的实际例子，从而初步了解建立数学模型的过程．学好数学最有效的学习方法是通过数学模型方法去认识基本的实际问题．数学模型方法如图 0－1 所示．

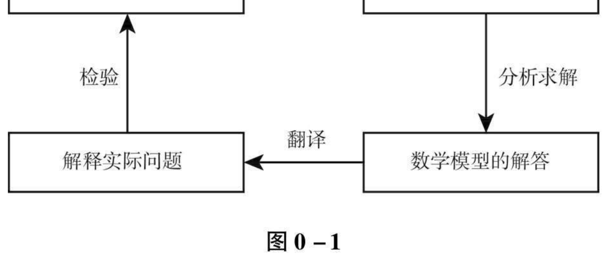


图 0－1

数学模型的构建和解决实际问题的步骤分为以下五个阶段：

（1）科学地识别与剖析实际问题；

（2）形成数学模型（分析问题中哪些是变量，哪些是常量，分别用不同的字母表示；根据所给的条件，运用相关知识，确定一个满足这些关系的函数或图形）；

（3）求解数学模型；

（4）研究算法，并尽量使用计算机；

（5）回到实际中去，解释结果．

●问题 0.1　面包的最佳定价应为多少？

学院为了培养学生的创业能力，鼓励学生在校开展各种营销活动．为了探索创业途径，学生张三利用业余时间在学院超市内打工．经过一段时间的统计，他发现某种面包以每个 8 元的价格销售时，每天能卖 400 个；价格每提高 5 角，每天就少卖 20 个．另外，柜台每天的固定开销为 400 元，每个面包的成本为 4 元．此后，张三决定独自经营面包柜台，问：张三怎样确定面包的价格，才能使获得的利润最大？

问题 0.1　分析与解答

（1）分析：根据信息可以做如下假设．

①随着面包价格上涨，销售量呈线性下降；

②假设每天准备的面包可以全部卖完．

（2）建立数学模型

根据题意，设 y 表示获得的利润，x 为利润最大时面包的定价．

因为价格每提高 5 角，每天就少卖 20 个，所以当定价为 x 元时，销售量为 $400-\dfrac{x-8}{0.5}\times 20=720-40x$，所以每天的利润为

$$y=(x-4)(720-40x)-400=-40x^2+880x-3\,280$$

（3）求解模型．

由二次函数的性质可知当 $x=11$ 元时，y 取得最大值为 1 560 元．

（4）说明．当面包定价为 11 元时面包的销售量只有 280 个，所以当天准备的面包个数是 280 个，面包的价格定为 11 元时，可以获得最大利润 1 560 元．

●问题 0.2　工薪人员的收入和个税

随着人们生活水平的提高，从 2018 年 8 月 31 日起个人所得税的起征点调至5 000元，表 0－1 所示为现行的 7 级税率．

工薪人员的收入和个税——分段函数

表 0－1

级数	全月应纳税所得额（月收入－5 000元部分）	税率/%
1	不超过3 000元的部分	3
2	超过3 000元至12 000元的部分	10
3	超过12 000元至25 000元的部分	20
4	超过25 000元至35 000元的部分	25
5	超过35 000元至55 000元的部分	30
6	超过55 000元至80 000元的部分	35
7	超过80 000元的部分	45

（1）试表示应缴税款 y 和月收入额 x 之间的关系.

（2）小李扣除五险一金后月收入额为10 000元，请问小李每月应缴税多少元?

（3）小张上个月缴了1 650元的税款，请问小张上个月的收入是多少?

问题 0.2　分析与解答

（1）这里不同收入范围应缴税率和税额都是不一样的，所以所列函数必然是一个分段函数. 由表 0－1 中所列数据可得分段函数如下（＊）:

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 5\ 000,\\ (x-5\ 000)\times 3\%, & 5\ 000<x\leqslant 8\ 000,\\ (x-8\ 000)\times 10\%+90, & 8\ 000<x\leqslant 17\ 000,\\ (x-17\ 000)\times 20\%+900+90, & 17\ 000<x\leqslant 30\ 000,\\ (x-30\ 000)\times 25\%+990+2\ 600, & 30\ 000<x\leqslant 40\ 000,\\ (x-40\ 000)\times 30\%+3\ 590+2\ 500, & 40\ 000<x\leqslant 60\ 000,\\ (x-60\ 000)\times 35\%+6\ 090+6\ 000, & 60\ 000<x\leqslant 85\ 000,\\ (x-85\ 000)\times 45\%+12\ 090+8\ 750, & x>85\ 000.\end{cases}\quad (*)$$

（2）对照式（＊），小李的月收入10 000元在 $8\ 000<x\leqslant 17\ 000$ 范围内，所以应缴税 $y(10\ 000)=(10\ 000-8\ 000)\times 10\%+90=290$（元）.

（3）对照式（＊），小张的税款1 650元与基数 990 比较接近，所以可以推测其月收入在 $17\ 000<x\leqslant 30\ 000$，根据 $(x-17\ 000)\times 20\%+990=1\ 650$，得 $x=21\ 300$，即小张月收入为21 300元.

自变量在不同变化范围中，对应法则用不同式子表示的函数，通常称为分段函数.

注：分段函数的定义域为各部分取值范围的并集.

例如：设函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & -4\leqslant x<2,\\ 1, & 2\leqslant x<3,\\ 4x+1, & x\geqslant 3.\end{cases}$

求 $f(-\pi)$，$f(2)$，$f(3.5)$ 及函数的定义域.

解 因为 $-\pi \in [-4,2)$，所以 $f(-\pi)=\cos(-\pi)=-1$；

因为 $2 \in [2,3)$，所以 $f(2)=1$；

因为 $3.5 \in [3,+\infty)$，所以 $f(3.5)=4\times(3.5)+1=15$；

函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,+\infty)$.

●问题 0.3 抵押贷款问题

设某小区二室一厅商品房价值 1 000 000 元，李某自筹了 400 000 元，要购房还需贷款 600 000 元，贷款月利率为 0.5%，条件是每月还一些，25 年内还清，假如还不起，房子归债权人. 问：李某具有什么能力才能贷款购房呢?

问题 0.3 分析与解答

分析：起始贷款600 000元，贷款月利率 $r=0.005$，贷款 n 月 $=25\times12=300$ 月，每月还 x 元，y_n 表示第 n 个月仍欠债主的钱.

建立模型：$y_0=600\,000$

$$y_1=y_0(1+r)-x$$

$$y_2=y_1(1+r)-x=y_0(1+r)^2-x[(1+r)+1]$$

$$y_3=y_2(1+r)-x=y_0(1+r)^3-x[(1+r)^2+(1+r)+1]$$

…

$$y_n=y_0(1+r)^n-x[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\cdots+(1+r)+1]$$

$$=y_0(1+r)^n-\frac{x[(1+r)^n-1]}{r}$$

当贷款还清时，$y_n=0$，可得 $x=\dfrac{y_0r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$.

把 $n=300$，$r=0.005$，$y_0=600\,000$ 代入得 $x\approx3\,865.8$，即李某如不具备每月还款 3 866 元的能力，就不能贷款.

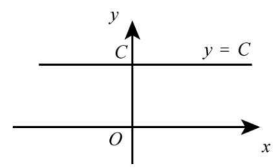
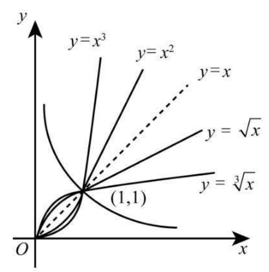
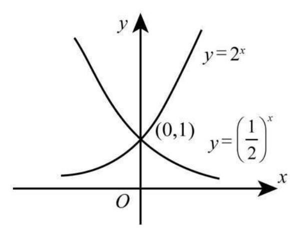
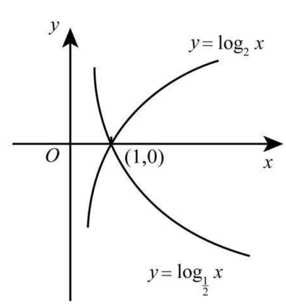
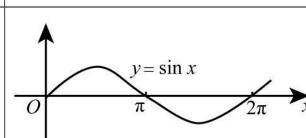
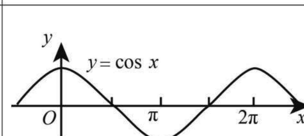
知识拓展

函数在数学建模中常常被应用，高等数学是以函数为主要研究对象的一门数学课程，所以我们有必要来回顾复习一下学过的主要函数.

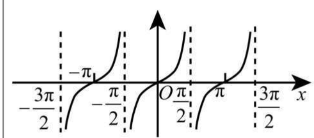
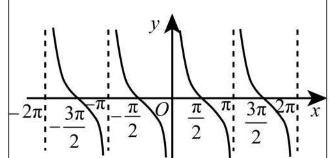
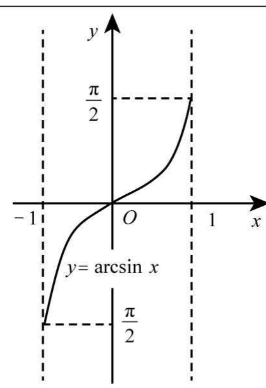
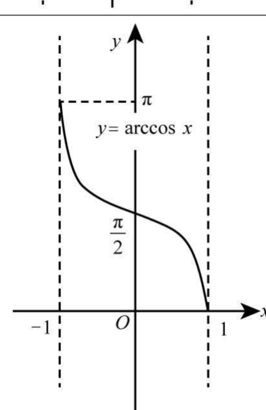
1. 基本初等函数

我们将已学过的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 它们的定义域、值域、图像和性质如表 0－2 所示.

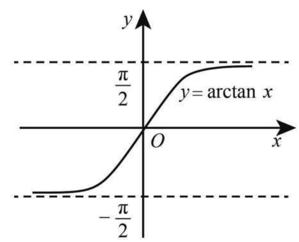
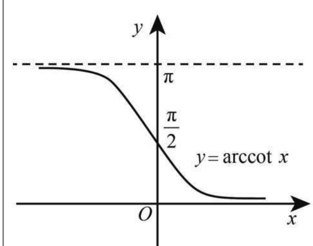
表 0－2

<table>
<tr><th colspan="2">函数</th><th>定义域与值域</th><th>图像</th><th>性质</th></tr>
<tr><td colspan="2">常数函数
$y=C$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y=C$</td><td>
</td><td>偶函数</td></tr>
<tr><td colspan="2">幂函数
$y=x^{\alpha}$</td><td>随 α 而不同</td><td>
</td><td>当 $\alpha>0$ 时，
在 $(0,+\infty)$ 内单调增加；
当 $\alpha<0$ 时，
在 $(0,+\infty)$ 内单调减少</td></tr>
<tr><td colspan="2">指数函数
$y=a^x$
$(a>0,a\neq1)$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in(0,+\infty)$</td><td>
</td><td>过点 (0，1)，
当 $a>1$ 时单调增加；
当 $0<a<1$ 时
单调减少，
曲线以 x 轴为渐近线</td></tr>
<tr><td colspan="2">对数函数
$y=\log_a x$
$(a>0,a\neq1)$</td><td>$x\in(0,+\infty)$
$y\in(-\infty,+\infty)$</td><td>
</td><td>过点 (1，0)
当 $a>1$ 时单调增加；
当 $0<a<1$ 时
单调减少</td></tr>
<tr><td rowspan="2">三
角
函
数</td><td>正弦函数
$y=\sin x$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in[-1,1]$</td><td>
</td><td>奇函数，
以 2π 为周期，有界</td></tr>
<tr><td>余弦函数
$y=\cos x$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in[-1,1]$</td><td>
</td><td>偶函数，
以 2π 为周期，有界</td></tr>
</table>

续表

函数		定义域与值域	图像	性质
三角函数	正切函数 $y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，以 π 为周期，每一个连续区间内单调增加，以直线 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 为渐近线
	余切函数 $y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，以 π 为周期，每一个连续区间内单调减少，以直线 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 为渐近线
	正割函数 $y=\sec x$	$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$		
	余割函数 $y=\csc x$	$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$		
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$		单调增加的，奇函数，有界
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少函数，有界

续表

函数		定义域与值域	图像	性质
反三角函数	反正切函数 $y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$		单调增加的，奇函数，有界，以直线 $y=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 为渐近线
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少函数，有界，以直线 $y=0$、$y=\pi$ 为渐近线

2. 复合函数

设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$．如果 $u=\varphi(x)$ 的值域或其部分包含在 $y=f(u)$ 的定义域中，则 y 通过中间变量 u 构成 x 的函数，称为 x 的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

复合函数与初等函数

其中，x 是自变量，u 称作中间变量．

例如，$y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的；$y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 复合而成的．

要认识复合函数的结构，必须要认识其复合过程，也要理解复合函数如何进行分解．通常采取由外层到内层分解的办法，将 $y=f[\varphi(x)]$ 拆成若干基本初等函数或简单函数的复合．习惯上，我们将基本初等函数经过有限次四则运算所得到的函数称为简单函数．

复合函数分解为简单函数的步骤：

第一步：确定外层函数 $y=f(u)$（y 是 u 的函数）；

第二步：确定内层函数 $u=\varphi(x)$（u 是 x 的函数）．

复合函数分解为简单函数的标准：

（1）基本初等函数（幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数）；

（2）基本初等函数的四则运算；

（3）特别注意多项式函数，如一次多项式函数 $ax+b$，二次多项式函数 ax^2+bx+c 等．

例 1 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sin(x^3+4)$；　　(2) $y=5^{\sin x^2}$.

解 (1) 设 $u=x^3+4$，则 $y=\sin(x^3+4)$ 由 $y=\sin u$，$u=x^3+4$ 复合而成.

(2) 设 $u=\sin x^2$，则 $y=5^u$；设 $v=x^2$，则 $u=\sin v$，所以，$y=5^{\sin x^2}$ 可以看成是由 $y=5^u$，$u=\sin v$，$v=x^2$ 三个函数复合而成的.

例 2 设 $f(x)=x^3, g(x)=\ln x$，求 (1) $f[g(x)]$；(2) $g[f(x)]$.

解 $f(x)=x^3$ 定义域为 $\mathbf{R}$，$g(x)=\ln x$ 定义域为 $(0,+\infty)$，

它们的交集非空，因而可以复合.

(1) $f[g(x)]=[g(x)]^3=(\ln x)^3=\ln^3 x$；

(2) $g[f(x)]=\ln[f(x)]=\ln x^3$.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合而成的函数叫作初等函数. 一般来说，初等函数都可以用一个解析式子表示.

例如 $y=\arctan\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$，$y=\sqrt[5]{\ln\cos^3 x}$，$y=\mathrm{e}^{\operatorname{arccot}\frac{x}{3}}$，$y=\dfrac{3^x+\sqrt[3]{x^2+5}}{\log_2(3x-1)-x\sec x}$ 都是初等函数. 而

$$y=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

$$y=\begin{cases}1, x>0,\\0, x=0,\\-1, x<0\end{cases}$$

都不是初等函数.

4. 函数的几种特性

(1) 单调性：设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加（或单调减少）的. 单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数.

单调增加函数的图形沿 x 轴的正向上升，单调减少函数的图形沿 x 轴的正向下降.（见图 0－2）

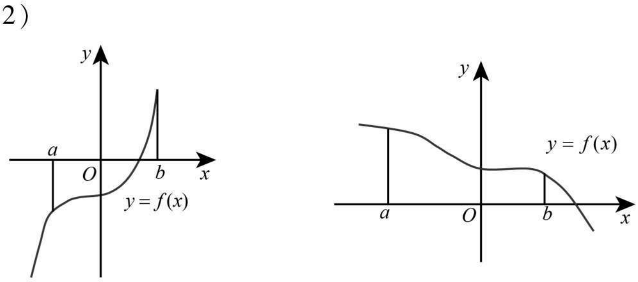


图 0－2

（2）奇偶性：设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$（或 $f(-x)=-f(x)$），则称 $f(x)$ 为偶函数（或奇函数）.

偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.（见图 0－3）

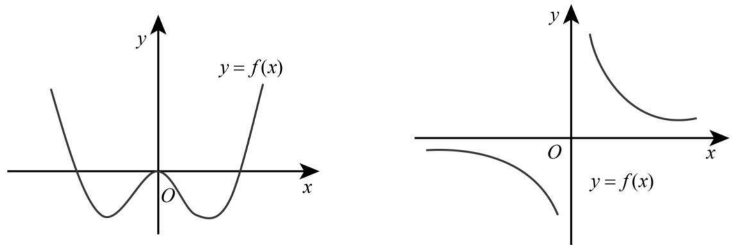


图 0－3

（3）周期性：对于函数 $y=f(x)$，如果存在非零常数 T，使 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立，则称此函数为周期函数. T 称为周期.

若 T 为函数 $y=f(x)$ 的周期，则 $kT(k\in\mathbf{Z})$ 也是函数 $y=f(x)$ 的周期. 我们把满足 $f(x)=f(x+T)$ 的最小正数 T_0 称为最小正周期.

周期函数的图形每经过一个周期 T 重复出现一次.

（4）有界性：$y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的. 如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 D 上是无界的.

函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界的几何意义是：曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内被限制在两条平行于 x 轴的直线 $y=M$ 与 $y=N$ 之间，如图 0－4 所示.

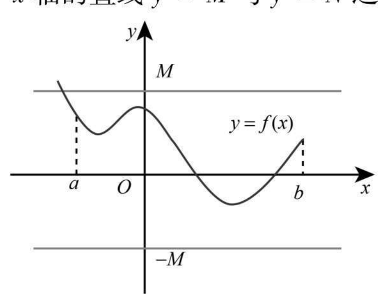


图 0－4

注：

（1）当一个函数 $y=f(x)$ 在 D 上有界时，正数 M 的取法是不唯一的. 如 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，$|\sin x|\leqslant 1$，但我们也可以取 $M=2$，即 $|\sin x|<2$. 事实上，M 可以取大于等于 1 的一切实数.

（2）有界性依赖于区间. 如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，而在开区间 $(0,1)$ 内是无上界的.

【基础练习 0 - 1】

1. 已知 $f(x)=\begin{cases}x+3, x<2,\\ 2^x-3, x\geqslant 2.\end{cases}$ 求函数的定义域和 $f(1), f(2), f(4)-f(0)$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$; (2) $y=\ln(1-x)$; (3) $y=\arcsin\dfrac{2-x}{3}$.

3. 指出下列函数的复合过程:

(1) $y=\sqrt{x+2}$; (2) $y=\cos^2(2x+1)$; (3) $y=\sin x^2$;

(4) $y=\ln(\tan 2x)$; (5) $y=e^{\arcsin\frac{1}{x}}$; (6) $y=\operatorname{arccot}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

【应用练习 0 - 1】

1. 【快递邮费】某快递公司规定:寄送到某地的物件,当物件不超过 20 千克时,按基本邮费每千克 3 元计算;当超过 20 千克时,超过部分按每千克 4.5 元计算. 试求寄送到该地的物件的邮费 y(元)与物件重量 x(千克)之间的函数关系.

2. 【乘坐出租车收费问题】某城市出租汽车收费情况如下:起价 10 元(4 千米以内),行程不足 15 千米,大于等于 4 千米部分,每公里车费 1.6 元;行程大于等于 15 千米部分,每公里车费 2.4 元,计价器每 0.5 千米计一次价. 建立车费与行程的函数关系式. 若分别行驶 12 千米和 23.7 千米,分别应付多少车费?

3. 【租车费用】A 汽车租赁公司的某款汽车每天租金为 200 元,每千米附加费为 1.2 元. B 汽车租赁公司提供的同款汽车每天租金为 250 元,每千米附加费为 0.8 元,问:(1) 分别写出两家公司出租一天这款汽车的费用与行驶里程的函数关系;(2) 在同一坐标系上画出这两个函数的图像;(3) 租哪一家公司的车比较合算?

4. 【人民币和美元兑换】小林住在美国,有一次她想去加拿大旅游,就把人民币兑换成了加元,币面数值增加了 12%. 后来因故未去成,于是她又把加元兑换成美元,这时币面数值减少了 12%. 问:小林亏了还是赚了?亏或赚了多少?

5. 【公寓出租的最大利润】某房地产公司有 50 套公寓要出租. 当租金定为每月 500 元时,公寓会全部租出去;当月租金增加 20 元时,就有一套公寓租不出去,而租出去的房子每月要花费 60 元的维护费. 试问:房租定为多少可获最大收入?

6. 【贷款和分期付款】叶同学了解到:某数码城对笔记本电脑进行分期付款销售. 每台售价为4 000元的笔记本电脑,如果分 36 个月付款,每月只需付 150 元. 同时来自银行的贷款信息为:5 000元以下的贷款,在 3 年内还清,年利率为 15%. 那么,他应该向银行贷款还是分期付款来购得这种笔记本电脑?

【数学文化聚焦】数学模型与求解实际问题的描述

数学家在数学建模的第一阶段并没有起到明显的作用，起作用的通常是研究这类问题的科学家、工程师、医生，甚至是企业家，正是这些人认识到了问题的重要性和与数学方法的可结合性，近年来，数学的应用已引起广泛的注意，因此，往往在提出系统的理论以前，有关数据的收集，经验性的结论已完成，所缺少的是数学家的介入．一旦有数学家介入，问题将会发生质的变化．

第二阶段是整个建模过程中最困难又最关键的部分．它最富有创造性，由具有数学知识的科学家参与，或由数学家与科学家共同参与，模型的建立由仔细地理解问题，区分主次和选取合适的数学结构所组成．模型有两个方面：一方面是数学结构；另一方面是实际概念与数学结构间的对应．基于对同一问题的观察和研究提出的数学模型可能有几种不同的数学结构．不同的数学结构可能反映问题的不同侧面，例如，光的物理模型有两个：一个是波动说；一个是粒子说，它们都是有用的．

第三个阶段是求解数学问题．这个阶段的研究在表面上与纯数学的研究没有区别，只是动机不同而已，然而，数学问题与实际问题有密切的联系，这是很重要的一点．

第四阶段是计算．为了加深对原问题的理解，计算是必不可少的，但是，由于实际问题的复杂性，大部分的计算结果不能借助手工来完成，因此算法的研究以及计算机的使用是必须的．

第五阶段是依照原问题去解释和评价所得结果．这时可能出现各种情况，我们需要针对不同的情况作出详细分析，而分析的结论则能推动我们去进一步完善模型．

理论模块

微积分

应用一　常见经济函数

经济分析中，常常要用数学方法来分析经济变量间的关系，即先建立变量间的函数关系，然后用微积分等知识分析这些经济函数的特性．本节我们将学习一些常见的经济函数，初步学习市场规律的分析和计算方法．

●问题 1.1.1　需求、价格、供给之间的关系

某种商品的市场饱和需求量为200套，当价格每上升1（百元）时，市场需求量将减少5套，投放量将增加10套．另外，从企业角度考虑，需生产100套供应外地市场．你能求出市场需求量和价格、企业供给量与价格之间的关系吗？

常用经济函数

分析：市场需求量与企业供给量随价格变化的规律可以帮助我们及时把握市场动态，以便作出相应合理的决策．

相关知识：需求量与需求函数；供给量与供给函数

需求量是指在特定时间内消费者打算并能够购买的某种商品的数量，用 Q 表示．影响需求的因素很多，主要有商品的价格 p．通常，降低商品价格会使需求量增加，而提高商品价格会使需求量减少．如果不考虑其他因素的影响，需求量 Q 可以看作价格 p 的一元函数，称为需求函数，记为

$$Q = Q(p)$$

一般来说，需求函数为价格 p 的单调减少函数．

根据市场统计资料，常见的需求函数有以下几种类型：

（1）线性需求函数 $Q = a - bp(a > 0, b > 0)$；

（2）二次需求函数 $Q = a - bp - cp^2(a > 0, b > 0, c > 0)$；

（3）指数需求函数 $Q = a\mathrm{e}^{-bp}(a > 0, b > 0)$.

需求函数 $Q = Q(p)$ 的反函数，就是价格函数，记作 $P = P(q)$，也反映商品的需求与价格的关系.

供给量是指在特定时间内，厂商愿意并且能够出售的某种商品的数量，用 S 表示. 影响供给的主要因素也是商品的价格 p，价格上涨将刺激生产者向市场提供更多的产品，使供给量增加；反之，价格下降将使供给量减少. 供给量 S 也可看成商品价格 p 的一元函数，称为供给函数. 记为

$$S = S(p)$$

供给函数为价格 p 的单调增加函数.

常见的供给函数有线性函数、二次函数、幂函数、指数函数等. 其中，线性供给函数为

$$S = -c + dp \qquad (c > 0, d > 0)$$

问题 1.1.1　解答

设市场商品价格为 p（百元/套），市场需求量为 Q（套），企业供给量为 S（套），由题意可得

需求量与价格之间的关系为：$Q = 200 - 5p, 0 < p < 40$. 当 $p \geqslant \frac{200}{5} = 40$ 时，市场上已无人购买.

企业供给量与价格之间的关系为：$S = 10p - 100, p > 10$. 当 $p \leqslant \frac{100}{10} = 10$ 时，企业已不投放产品至本地市场.

●问题 1.1.2　供求平衡与价格

已知某商品的需求函数和供给函数分别为 $Q = 14.5 - 1.5p$，$S = -7.5 + 4p$. 试问：供求平衡时的价格（均衡价格）与供需量（均衡数量）分别是多少？

分析：均衡能够描述经济量变动的方向，它作为引导经济变量力图达到的阶段性“理想”状态的依托，对经济分析具有重要的意义.

相关知识：供求平衡与均衡价格

在一定价格或交换比例下，一种商品的供应速度（或量）与销售速度（或量）相等，就是供求平衡. 也就是说当 $Q = S$ 时，市场处于平衡状态. 若把需求曲线和供给曲线（供给函数的图形）画在同一坐标系中（见图 1-1-1），则由于需求函数 Q 是单调减少函数，供给函数 S 是增加函数，它

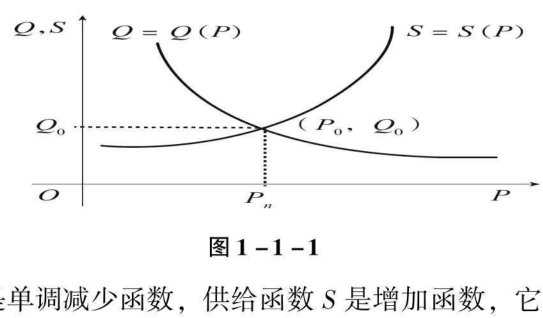


图 1-1-1