高等教育公共基础课系列教材

大学物理实验

史少辉　东艳晖 / 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等教育公共基础课系列教材

大学物理实验

主　编　史少辉　东艳晖
副主编　封顺珍　张彩霞
参　编　韩万强　吴淑花　屈双惠
　　　　吴海滨　刘继宏　牛　萍
　　　　王铁宁　纪登辉　李　梅
　　　　郝　普

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书根据教育部高等学校物理基础课程教学指导分委员会颁布的《理工科大学物理实验教学基本要求》编写而成。

全书共分五章，分别是：实验误差理论及数据处理基础、力学实验、电磁学实验、光学实验、热学实验，各类实验共计 21 个。

本书可作为高等院校非物理专业的本专科学生教材，也可作为实验技术人员和有关教师的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理实验 / 史少辉，东艳晖主编. —北京：北京理工大学出版社，2020. 1

ISBN 978-7-5682-8139-3

Ⅰ. ①大…　Ⅱ. ①史… ②东…　Ⅲ. ①物理学-实验-高等学校-教材　Ⅳ. ①O4-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2020）第 022633 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / （010）68914775（总编室）
　　　　　（010）82562903（教材售后服务热线）
　　　　　（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http：//www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京国马印刷厂
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 7
字　　数 / 164 千字
版　　次 / 2020 年 1 月第 1 版　2020 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 / 24. 80 元

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 赵　轩
责任校对 / 刘亚男
责任印制 / 李志强

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

前　言

Preface

物理学是一门实验科学。物理实验是物理学发展的基础，对于理工科学生而言，物理实验是提高科研能力和拓展创新思维不可或缺的教学环节。

本书是根据教育部高等学校物理基础课程教学指导分委员会颁布的《理工科大学物理实验教学基本要求》，结合当前石家庄学院物理学实验教学仪器，实验教学改革的实际情况，以及编者多年的物理实验教学经验，在校内物理实验讲义的基础上编写而成的。本书在编写过程中，吸取了国内外多种优秀教材的优点。

本书共分五章，第一章介绍实验误差理论及数据处理的基本知识，第二、三、四、五章共选编了 21 个大学物理实验，具体包括：9 个力学实验、5 个电磁学实验、4 个光学实验和 3 个热学实验。

实验教学是一项集体合作的教学工作，本书是石家庄学院物理学院许多教师集体智慧的结晶，由史少辉、东艳晖担任主编，封顺珍和张彩霞担任副主编，其他参与本书编写的人员有：韩万强老师、吴淑花老师、屈双惠老师、吴海滨老师、刘继宏老师、牛萍老师、王铁宁老师、纪登辉老师、李梅老师、郝普老师，本书的整理及校对工作由刘迎娣老师、李金花老师、刘彦军老师、朱雪刚老师完成。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免有错误与不妥之处，在此恳请广大读者批评指正。

编　者

2019 年 9 月

目　录

Contents

第一章 实验误差理论及数据处理基础

第一节　测量与误差

由物理实验的特征可以看出，实验离不开测量，测量是实验的基本任务。下面讨论测量与误差的基本概念以及误差的分类。

一、测量与误差的基本概念

（1）测量：测量是指借助仪器，通过一定的方法，将待测量与选作计量标准的同类量进行比较，并得出其倍数的过程。倍数值称为待测量的测得值，选作的计量标准称为单位。记录下来的测量结果应该包含测得值的大小和单位，二者缺一不可。

（2）直接测量：直接测量是指待测物理量的大小可从选定好的测量仪器或仪表上直接读出来的测量过程。相应的待测物理量称为直接测量结果。例如，用米尺测长度，用秒表测时间，用电表测电压、电流，用温度计测温度等。

（3）间接测量：间接测量是指待测物理量不能直接测量，而是与若干直接测量存在一定的函数关系（一般为物理概念、定理、定律），依据这种关系才能计算出来的测量过程，相应的待测物理量称为间接测量结果。例如，如果先测量出圆柱体的底面直径 D 和高度 h，再利用 $V=\frac{1}{4}\pi D^2h$ 计算其体积。在这一测量中，对 D 和 h 的测量是直接测量，对 V 的测量则是间接测量。

（4）真值：被测物理量所具有的客观的、真实的数值称为真值，可记为 x_0。严格地讲，真值只是一个理想化定义，通常物理量的真值是未知的，需要测定。但由于测量仪器、测量方法、测量环境及测量者的技术、感官等都不能做到完美无缺，故任何测量都做

不到绝对准确。

（5）测得值：通过测量所获得的被测物理量的值称为测得值，可记为 x 。一般来说，x 只能接近真值而不会等于真值。

（6）平均值：在相同条件下，某物理量的一组 n 次测得值 x_1，x_2，x_3，…，x_n 之和再除以测量次数 n 所得的值称为平均值，记为 $\bar{x}$ 。即

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1-1}$$

对这组测得值来讲，$\bar{x}$ 被认为是最接近真值的值，故其又称为测量的最佳值或近真值。它与真值的关系为 $\lim\limits_{n=\square} \bar{x} = x_0$。

因此，在处理测量数据时常用物理量的平均值 $\bar{x}$ 代替其真值 x_0。

（7）测量误差：物理量的测得值与其真值之间总有一定的差异，测得值 x_i 与真值 x_0 之差称为测量误差（简称误差），记为 ε_i ，即

$$\varepsilon_i = x_i - x_0 \tag{1-2}$$

由于真值是未知的，因此，严格意义上的测量误差也是不能求得的。

（8）偏差（残差）：测得值 x_i 与相同条件下多次测量所得平均值 $\bar{x}$ 的差值称为偏差，记为 v_i 。那

$$v_i = x_i - \bar{x} \tag{1-3}$$

由于可用 $\bar{x}$ 近似代替 x_0，故通常也用 v_i 代替 ε_i 。因此，一般情况下人们所说的误差就是指偏差。

二、误差的分类

在物理实验中，由于测量对象、测量仪器、实验方法、测量环境、观测者等因素的作用，测得值与真值之间总存在一定的差值，因此误差存在于一切测量之中，而且贯穿测量过程。根据引起误差的主要因素的不同，一般可将误差分为系统误差、随机误差（也称偶然误差）和粗差（也称过失误差）三类。

1. 系统误差

系统误差是测量装置、周围环境，以及测量者本人所组成的整个系统产生的误差。

系统误差在测量过程中对结果的影响体现在：对同一物理量进行多次等精度测量时，测得值总是偏大、偏小或随测量条件改变按某一确定规律变化。

系统误差的特征：具有规律性。

系统误差的来源如下。

（1）仪器的误差。仪器的误差是由仪器本身的缺陷引起的，如直尺刻度不均、天平不等臂、转动轴偏心等。

（2）环境条件的误差。环境条件的误差是实验条件不能达到理论公式所规定的要求引起的，如温度、湿度、气压、电源等条件与实验条件偏离。

（3）实验理论和方法的误差。实验理论和方法的误差是实验理论的不充分、实验方法的不完善、公式的近似性或对影响实验结果的某些因素不了解而引起的。例如：用高灵敏天平称量物质质量时没有考虑空气浮力的影响；用伏安法测电阻时没有考虑导线的电阻；用单摆测重力加速度时使用周期公式的近似等。

（4）个人误差。个人误差是操作者本人的习惯或偏差引起的，如有的人读数总是偏大或偏小，有的人计时总是偏快或偏慢等。

2. 随机误差

在测量中即使消除了产生系统误差的一切可能因素，所测数据仍然会有一定差别。当实验者对同一物理量进行多次等精度测量时，每次测量出现的误差的绝对值大小和符号以不可预测的方式发生变化，没有确定的变化规律，这种误差称为随机误差。

随机误差的特征：单次测量的随机误差是无法预测的、无规律性的。

随机误差的来源：是某些偶然的或不确定的因素引起的，是无法控制和预料的，如温度、气压、电压等的波动，观测者读数不稳定等。

随机误差的规律：对单次测量的随机误差虽然无法确定，但对多次等精度测量来讲，随机误差的分布却是服从一定的统计分布规律的——正态分布（高斯分布）。其正态分布曲线如图 1-1 所示。

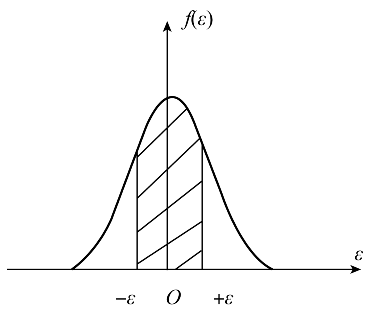

图 1-1　随机误差的正态分布曲线

图 1-1 中：ε 为随机误差；$f(\varepsilon)$ 为误差分布的概率密度函数，它表示在误差为 ε 附近单位误差间隔内出现随机误差为 ε 的测量的几率。

正态分布具有如下特点。

（1）单峰性。随机误差绝对值小的测量比绝对值大的测量出现的几率大。

（2）对称性。随机误差绝对值相等的测量出现的几率相同。从而，在多次测量中用测得值的平均值 $\bar{x}$ 可以消除随机误差，用平均值 $\bar{x}$ 代替真值 x_0 是合适的。

（3）有界性。在一定的测量条件下，随机误差的绝对值是不超过一定限度的，即误差仅出现在一定的范围，超出此范围的误差实际上不出现。

（4）抵偿性。当测量次数非常多时，正误差和负误差相互抵消，于是误差的代数和趋向于零。

3. 粗差

粗差是由于某些原因（如观测时粗心、精神不集中、对仪器的使用不正确等）造成实验数据异常所产生的误差。

带有粗差的数据称为异常值或坏数据，可以通过核对实验理论值、重新测量等方法作出判断，若确认为粗差，则应将其删除。粗差毫无规则可寻，但只要认真做好实验准备，专心进行观测、记录和读数则完全可以避免粗差的出现。

综上所述，由于粗差完全可以避免，因此，实验的不准确性主要是由于系统误差和随机误差的存在而产生的。

第二节　误差的估算

1. 绝对误差

实际的测得值 x 总是与真值有差距。人们把测得值与被测量的真值 x_0 之间的差值叫绝对误差，用 Δx 表示。绝对误差反映了测量结果的精确程度。即

$$\Delta x = x - x_0 \tag{1-4}$$

2. 相对误差

测量的绝对误差与被测量的真值（约定）之比叫相对误差，记为 E_r 。即

$$E_r = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \times 100\% \tag{1-5}$$

相对误差反映了测量结果的相对精确程度。

3. 测量列的标准偏差

实际的测量是有限次的测量，真值是不可知的，因此，实际上估算标准误差一般采用式（1-6）（称为贝塞尔公式）进行估算，即

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \tag{1-6}$$

式中：σ_x 称为测量列的标准偏差。

需要注意：测得值的标准偏差并不表示测得值的误差的实际大小，因为测得值的偶然误差是随机的，所以测得值的标准偏差只表示任一测得值的误差落在区域（$-\sigma_x$，$+\sigma_x$）内的概率为 68.3%，这就是标准偏差的统计意义。

4. 算术平均值的标准偏差

算术平均值也是一个随机变量，在完全相同的条件下，进行不同组的有限次重复测量的平均值不尽相同，也具有离散性，存在偏差。因此，引入算术平均值的标准偏差，用 $\sigma_{\bar{x}}$ 表示，即

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \tag{1-7}$$

$\sigma_{\bar{x}}$ 也是一个统计性的特征量，其含义为测得值的算术平均值的随机误差落在（$-\sigma_{\bar{x}}$，$+\sigma_{\bar{x}}$）区间的概率为 68.3%。$\sigma_{\bar{x}}$ 反映了算术平均值接近真值的程度。

由式（1-7）可知，$n>10$ 以后 $\sigma_{\bar{x}}$ 变化缓慢，因此，利用增加测量次数而减小随机误差的办法，已经没有多少实际意义，另一方面重复测量对减小系统误差并不起作用，所以在实际测量中，综合考虑各种因素，测量次数一般取 5～10 次。

第三节　测量结果的评定

一、传统的评定方法

定性评定测量结果的传统方法，通常是用精密度、准确度和精确度 3 个概念来说明。

（1）精密度：精密度是指重复测量所得结果相互接近的程度。它反映了随机误差的大小，测量的精密度高，是指测量数据的离散性小，即随机误差小。但是测量数据是否集中于真值附近不明确（系统误差的大小不明确）。

（2）准确度：准确度是指测得值与真值之间符合的程度。它反映了系统误差的大小，测量的准确度高，是指测量数据的算术平均值偏离真值较小，测量结果与真值接近的程度好。

注意：精密度高其准确度不一定高；同样，准确度高，其精密度也不一定高。

（3）精确度：精确度是对测量结果的精密度与准确度的综合评定。它反映了随机误差与系统误差综合大小的程度，测量的精确度高，是指测量数据比较集中在真值附近，即测量的结果既精密又准确，系统误差和随机误差都比较小。

下面以打靶时子弹的着弹点为例来说明精密度、准确度和精确度三者的关系：

在图 1-2（a）中，着弹点比较集中，但均与靶心偏离较远，说明精密度高而准确度低；

在图 1-2（b）中，着弹点比较分散，但平均起来靠近靶心，说明准确度高而精密度低；

在图 1-2（c）中，着弹点都集中在靶心附近，说明精密又准确，精密度和准确度都

高，即精确度高。

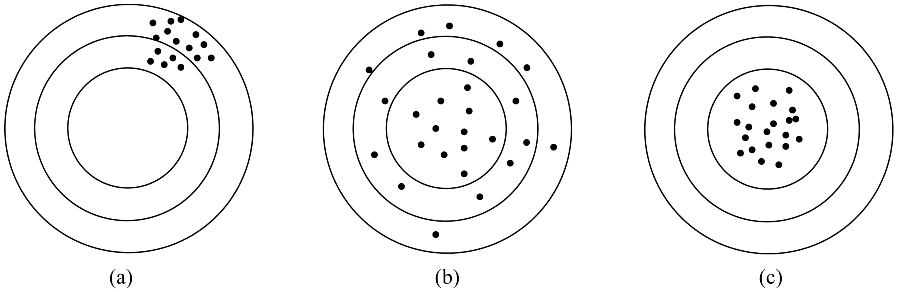

图 1-2　精密度、准确度及精确度的关系示意

二、测量结果不确定度的评定方法

1. 不确定度的定义

早在 20 世纪 70 年代初，国际上已有许多学者开始使用测量不确定度一词取代误差来表征测量结果的可信赖程度。1978 年，国际计量局（BIPM）提出了《国际计量局实验不确定度的规定建议书 INC—1（1980）》。1993 年制定的《测量不确定度表示指南 ISO 1993（E）》得到了 BIPM、国际法制计量组织（OIML）、国际标准化组织（ISO）、国际电工委员会（IEC）、国际纯粹与应用化学联合会（IUPAC）、国际纯粹与应用物理学联合会（IUPAP）、国际临床化学和实验室医学联盟（IFCC）7 个国际组织的批准，由 ISO 出版，是国际组织的重要权威文献。中国也已于 1999 年颁布了与之兼容的《测量不确定度评定与表示》计量技术规范。至此，测量不确定度评定成为检测和校准实验室必不可少的工作之一。

下面简单介绍与测量不确定度相关的概念。

测量不确定度：对某物理量进行测量，其测得值 Y 与真值 Y_0 之差的绝对值以一定的概率分布在 $-U \sim U$ 之间，表示为 $|Y-Y_0| \leqslant U$，其中，U 值可通过一定方式进行估算，称 U 为测量不确定度（简称为不确定度）。

不确定度是对被测量的真值所处量值范围的评定，用以评定实验测量结果的质量，是对误差的一种评定方式，表示由于误差的存在而导致的被测量真值不能确定的程度。

不确定度的意义：U 表征真值以某种包含概率存在的范围，是对测量结果不确定性的度量。

不确定度的说明如下。

（1）不确定度 U 反映了对被测量真值不能肯定的程度，用以表征测量结果的分散性和可信赖程度。U 小，表明测量结果更接近真值，可信程度高。

（2）不确定度的含义为被测量的真值落在 $[Y_0-U, Y_0+U]$ 区间的概率为 68.3%，即包含概率为 68.3%。如果把区间取为 $[Y_0-2U, Y_0+2U]$ 和 $[Y_0-3U, Y_0+3U]$，则其所表示的包含概率分别为 95.5% 和 99.7%。

（3）不确定度与误差是两个不同的概念。

误差：测得值与真值之差称为误差。由于真值是无法知道的，因此，误差是一个理想概念，是不可能准确求得的量，不能用指出误差的方法去说明测量结果的可信赖程度。

不确定度：表示误差可能存在的范围称为不确定度，其大小可由一定方法计算出或估算出。不确定度大，不一定误差的绝对值也大。

不确定度的引入并不意味着误差需放弃使用。实际上，误差仍可用于定性地描述理论和概念的场合；不确定度则用于给出具体数值或进行定量运算、分析的场合。

2. 不确定度的分量

在修正了可定系统误差之后，测量结果的不确定度可分为 A、B 两类分量，常称为 A 类标准不确定度和 B 类标准不确定度。

（1）A 类标准不确定度——用统计方法评定的不确定度分量，常用 u_A 表示。

进行有限次测量时，误差不完全服从正态分布而是服从 t 分布（也叫学生分布），总不确定度的 A 类标准不确定度为

$$u_A = \frac{t_p}{\sqrt{n}}\sigma_x = t_p\sigma_{\bar{x}} \tag{1-8}$$

式中：t_p 的值可从专门的数据表中查得（见表 1-1），在 $n > 5$ 和包含概率 $p=68.3\%$ 的条件下，可取 $u_A = \sigma_{\bar{x}}$。

表 1-1　t_p 因子与测量次数 n、包含概率 p 的关系

包含概率 p	测量次数 n										
	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	∞
0.68	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1.04	1.03	1
0.90	2.92	2.35	2.13	2.02	1.94	1.86	1.83	1.76	1.73	1.71	1.65
0.95	4.30	3.18	2.78	2.57	2.46	2.37	2.31	2.26	2.15	2.09	1.96
0.99	9.93	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	2.98	2.86	2.58

注：如果只进行一次测量，$u_A=0$。

在 t 分布时，误差并不服从正态分布，$\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$ 的包含概率不是 0.683（实验教学中一般包含概率取 95%），故在基础物理实验中，采用简化处理的方法，即当测量次数满足 $5 \leqslant n \leqslant 10$ 时取 A 类标准不确定度 u_A 的大小等于测量列的标准偏差 σ_x。

如：在 $t=6$ 时，

$$\frac{t_p}{\sqrt{n}} = \frac{2.57}{\sqrt{6}} = 1.05 \approx 1$$

$$u_A = \frac{t_p}{\sqrt{n}}\sigma_x = \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{1-9}$$

因此，实验次数一般取 6 次，实验中通常用式（1-9）计算 u_A。

（2）B 类标准不确定度——用其他方法评定的不确定度分量，又称非统计不确定度，常用 u_B 表示。

在普通实验里，B 类标准不确定度一般简化为由仪器引起，即 $u_B = \dfrac{\Delta_{仪}}{k_B}$，其中，$\Delta_{仪}$为仪器的最大允许误差（也称最大允差，仪器误差限），由生产厂家或由实验室结合具体测量方法和条件给出。对量具仪表可取其最小刻度的一半。若令最小刻度为 L_z 即

$$\Delta_{仪} = \frac{L_z}{2} \tag{1-10}$$

k_B 为包含因子，在基础物理实验中，通常作简化处理（包含概率为95%时），取 $k_B = 1$，所以，$u_B = \Delta_{仪}$。

若实验室给出所用仪器误差在其分散区间内均匀分布，则 $k_B = \sqrt{3}$ 。

常见的测量仪器的最大允差 $\Delta_{仪}$为：

①长度测量工具、水银、酒精温度计取其分度值（最小刻度）的一半为仪器误差限；

②天平、机械秒表取其分度值为仪器误差限；

③指针式电压表、电流表 $\Delta_{仪} = \alpha\% \times A_m$ ，电阻箱近似取为 $\Delta_{仪} = \alpha\% \times R$ ，其中，α 是表的准确度等级，可从仪器面板或铭牌上找到，A_m 是电压表或电流表测量时所用量程，R 为电阻箱测量时所用量程。

例如，0.2 级电压表，若量程为 10 V，则 $\Delta_{仪} = 0.2\% \times 10\ \text{V} = 0.02\ \text{V}$；若量程为 100 V，则 $\Delta_{仪} = 0.2\% \times 100\ \text{V} = 0.2\ \text{V}$

可见量程不同，$\Delta_{仪}$不同。为减小误差影响，选用量程时，应尽量使指针偏转为满偏值的 2/3 以上。

（3）合成标准不确定度 u_c（总不确定度）。合成标准不确定度的合成方法：不同类分量按“方和根”合成；同类独立分量按“方和”合成。即

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \tag{1-11}$$

一般地说，u_A 和 u_B 本身可能包含着若干个独立分量。这时，要计算合成标准不确定度，首先要求出所有的 A 类和 B 类标准不确定度，然后再求合成标准不确定变 u。

例：设测量结果的 A 类标准不确定度和 B 标准不确定度的表征值分别为 u_{A1}，u_{A2}，u_{A3}，…和 u_{B1}，u_{B2}，u_{B3}，…。且彼此独立，则有 $u_A^2 = \sum {u_{Ai}}^2$，$u_B^2 = \sum {u_{Bj}}^2$。

合成标准不确定变为

$$u = \sqrt{\sum u_{Ai}^2 + \sum u_{Bj}^2}$$

即

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

评价测量结果，有时也要写出相对标准不确定度，即

$$E = \frac{u}{x} \times 100\% \tag{1-12}$$

一般情况下，计算不确定度时，不确定度的数值只保留 1 位有效数字，当不确定度的第一位有效数字比较小时常取两位，但最多不超过两位。

3. 测量结果的评价

完整的测量结果应表示为

$$x = x_0 \pm u \tag{1-13}$$

由于 x_0 一般用平均值代替，故完整测量结果一般可写为

$$x = \bar{x} \pm u \tag{1-14}$$

式（1-13）表示被测量的真值落在（$x_0 - u$，$x_0 + u$）范围内的概率很大，u 的取值与包含概率有一定联系。

三、直接测量结果的不确定度计算步骤及结果表示

（1）对测量数据中的可定系统误差加以修正；即修正已知的系统误差，得到测得值 $x_0 = \bar{x} - x_L$（修正值，如螺旋测微器必须进行零点修正）。

（2）计算测量列的算术平均值 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{x_i\}$，作为测量结果的最佳值。

（3）用 $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ 作为 A 类标准不确定度 u_A。

（4）估算 B 类标准不确定度，$u_B \approx \Delta_{仪}$。

（5）求合成标准不确定度 $u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$。

（6）写出最终结果表示式，则有：

①待测量 $x = \bar{x} \pm u$［若有修正值 x_L 则为 $x = (\bar{x} - x_L) \pm u$］；

②相对标准不确定度为 $E = \frac{u}{\bar{x}} \times 100\%$。

例：用毫米刻度的米尺，测量物体长度 l（cm），测量 10 次，其测得值分别为 53.27、53.25、53.23、53.29、53.24、53.28、53.26、53.20、53.24、53.21。试计算合成标准不确定度，并写出测量结果。

解：计算步骤如下。

（1）计算 l 的近似真值 $\bar{l}$，即

$$\bar{l} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{10} l_i = \frac{1}{10} \times (53.27 + 53.25 + 53.23 + \cdots + 53.21) = 53.25(\mathrm{cm})$$

（2）计算 A 类标准不确定度，即

$$u_{Al}=\sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(l_i-\bar{l})^2}=$$

$$\sqrt{\frac{(53.27-53.24)^2+(53.25-53.24)^2+\cdots+(53.21-53.24)^2}{10-1}}=0.03(\text{cm})$$

（3）计算 B 类标准不确定度，即

$$u_B=\Delta_{仪}=L_z/2=0.05(\text{cm})$$

（4）合成标准不确定度为

$$u=\sqrt{u_{Al}^2+u_{Bl}^2}=\sqrt{0.03^2+0.05^2}\approx 0.06(\text{cm})$$

（5）测量结果的标准式为

$$l=\bar{l}\pm u=(53.25\pm 0.06)(\text{cm})$$

相对标准不确定度为

$$E=\frac{u}{\bar{l}}\times 100\%=\frac{0.06}{53.25}\times 100\%=0.11\%$$

四、间接测量结果的表示

1. 间接测量结果的平均值

设间接测量结果f与彼此独立的直接测量结果x 、y 、z间的函数关系为$f=f(x, y, z)$，直接测量结果用平均值和不确定度表示为

$$x=\bar{x}\pm u_c(x),\qquad y=\bar{y}\pm u_c(y),\qquad z=\bar{z}\pm u_c(z)$$

则间接测量结果的平均值为

$$\bar{f}=f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \tag{1-15}$$

2. 间接测量结果的不确定度

设各直接测量结果之间彼此独立，其各自的合成标准不确定度为 $u_c(x)$、$u_c(y)$、$u_c(z)$，由误差理论可证明

$$u=\sqrt{\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial x}}\right)^2 u_c^2(x)+\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}\right)^2 u_c^2(y)+\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}\right)^2 u_c^2(z)} \tag{1-16}$$

相对形式为

$$E=\frac{u_c}{\bar{f}}=\sqrt{\left(\overline{\frac{\partial \ln f}{\partial x}}\right)^2 u_c^2(x)+\left(\overline{\frac{\partial \ln f}{\partial y}}\right)^2 u_c^2(y)+\left(\overline{\frac{\partial \ln f}{\partial z}}\right)^2 u_c^2(z)} \tag{1-17}$$

式中：$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}}$ 、$\overline{\frac{\partial \ln f}{\partial x}}$分别为$\frac{\partial f}{\partial x}$ 、$\frac{\partial \ln f}{\partial x}$在 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 点处的值。

3. 间接测量结果的表示

待测量为

$$f = \bar{f} \pm u_c$$

相对标准不确定度为

$$E = \frac{u_c}{\bar{f}} \times 100\%$$

4. 间接测量结果的计算程序步骤

间接测量结果的计算程序步骤如下：

（1）计算各直接测量结果的平均值$\bar{x}$、$\bar{y}$、$\bar{z}$；

（2）计算各直接测量结果的合成标准不确定变$u_c(x)$、$u_c(y)$、$u_c(z)$；

（3）将各直接测量结果的平均值代入式$\bar{f}=f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$中，计算出间接测量结果的平均值$\bar{f}$；

（4）计算间接测量结果的合成标准不确定变的相对形式，即

$$E = \frac{u_c}{f} = \sqrt{\left(\overline{\frac{\partial \ln f}{\partial x}}\right)^2 u_c^2(x) + \left(\overline{\frac{\partial \ln f}{\partial y}}\right)^2 u_c^2(y) + \left(\overline{\frac{\partial \ln f}{\partial z}}\right)^2 u_c^2(z)}$$

（5）计算合成标准不确定度$u_c = E\bar{f}$;

（6）写出间接测量最终结果表示式及相对标准不确定度。

例：用单摆测量重力加速度的实验公式为$g=\dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$，并测得$l=(69.0 \pm 0.22)\,\mathrm{cm}$，$T=(1.688 \pm 0.0072)\,\mathrm{s}$，求测量结果的表示。

解：（1）各直接测量结果的平均值为

$$\bar{l} = 69.0\ \mathrm{cm},\ \bar{T} = 1.688\ \mathrm{s}$$

（2）各直接测量结果的合成标准不确定变为

$$u_c(l) = 0.22\ \mathrm{cm},\ u_c(T) = 0.0072\ \mathrm{s}$$

（3）将各直接测量结果的平均值代入式$\bar{f}=f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$中，计算出间接测量结果的平均值$\bar{g}$为

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2 \bar{l}}{\bar{T}^2} = \frac{4 \times 3.14^2 \times 69.0}{1.688^2} = 9.550(\mathrm{m/s^2})$$

（4）计算间接测量结果的合成标准不确定变的相对形式。对g取自然对数得$\ln g = \ln 4\pi^2 + \ln l - \ln T^2$，求偏导$\dfrac{\partial \ln g}{\partial l} = \dfrac{1}{l}$；$\dfrac{\partial \ln g}{\partial T} = -\dfrac{2}{T}$，则相对形式为

$$E = \frac{u}{\bar{g}} = \sqrt{\left(\overline{\frac{\partial \ln g}{\partial l}}\right)^2 u_c^2(l) + \left(\overline{\frac{\partial \ln g}{\partial T}}\right)^2 u_c^2(T)} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{l}}\right)^2 u_c^2(l) + \left(-\frac{2}{\bar{T}}\right)^2 u_c^2(T)} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{69.0}\right)^2 \times 0.22^2 + \left(\frac{2}{1.688}\right)^2 \times 0.0072^2} = 0.0091$$