



北京理工大学“双一流”建设精品出版工程

Interplanetary Flights: Theory and Applications

# 行星际飞行轨道 理论与应用

尚海滨 ◎ 编著

 北京理工大学出版社  
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

# 行星际飞行轨道 理论与应用

尚海滨 编著  
乔 栋 主审

 **北京理工大学出版社**  
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

---

图书在版编目 (CIP) 数据

行星际飞行轨道理论与应用/尚海滨编著. —北京: 北京理工大学出版社, 2019. 4  
ISBN 978 - 7 - 5682 - 6742 - 7

I. ①行… II. ①尚… III. ①行星际轨道 - 研究 IV. ①V412. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 031828 号

---

---

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (总编室)

(010) 82562903 (教材售后服务热线)

(010) 68948351 (其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 /

开 本 / 787 毫米 × 1092 毫米 1/16

印 张 / 19.25

字 数 / 452 千字

版 次 / 2019 年 4 月第 1 版 2019 年 4 月第 1 次印刷

定 价 / 56.00 元

责任编辑 / 王玲玲

文案编辑 / 王玲玲

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 李志强

---

图书出现印装质量问题, 请拨打售后服务热线, 本社负责调换

行星际飞行器是指在太阳系内广阔的行星际空间中飞行的人造天体，是人类进行深空探测活动的重要工具，如火星探测器、小行星探测器、彗星动能撞击器等。行星际飞行轨道理论是行星际飞行器设计所涉及的重要基础理论，也是从事深空探测技术研究应具备的知识。相比近地航天器轨道，行星际飞行轨道有许多独具的特点，需要一本专门的教材进行系统的阐述，这也是本书编写的初衷。

本书共包括8章。第1~3章介绍与行星际飞行轨道相关的基础知识，包括基本的力学原理、二体问题和三体问题等；第2~6章从不同的行星际飞行方式出发，分别介绍直接转移轨道、借力飞行轨道和连续小推力飞行轨道；第7章介绍几种常用的行星际飞行轨道优化方法，包括微分修正方法、主矢量方法等；第8章中针对几个典型的深空探测任务，对行星际飞行轨道进行初步的设计，并分析了不同飞行方案的特点。

本书是在作者多年来从事行星际飞行轨道教学实践与科学研究基础上，并参考国内外学者的一些优秀研究成果编著而成的。本书写作过程中，力求做到叙述清晰准确，条理分明。行星际飞行轨道的典型特点是能量需求大、飞行时间长和力场环境复杂，合理地利用自然力、施加合适的控制力以提高飞行轨道性能是研究的重点。为此，本书在介绍轨道基础理论与知识的同时，着重对不同转移方式轨道的特点与设计方法进行讨论。为了使读者深入理解行星际飞行轨道设计方法，书中尽可能地对各种方法进行详尽的推导与讨论，这也是本书的一个特点。本书可以作为航空宇航学科研究生和高年级本科生教材，也可以为从事深空探测技术研究的人员提供一定的参考。

全书由尚海滨编著，北京理工大学宇航学院乔栋教授主审。

感谢崔平远教授和龙腾教授在本书编写过程中给予的鼓励、指导与帮助。感谢研究生韦炳威、秦啸、张阔翔、许铃健和王嘉瑶的辛勤劳动，他们完成了部分文字的校对和仿真程序的调试工作。

限于时间和作者水平，书中不妥之处在所难免，敬请读者和同行批评指正。

编著者

# 目 录

## CONTENTS

---

---

---

<b>第 1 章 行星际飞行轨道基础知识</b> .....	001
1.1 太阳系中的天体 .....	001
1.2 牛顿力学 .....	004
1.3 分析力学 .....	004
1.3.1 拉格朗日方程 .....	004
1.3.2 拉格朗日函数 .....	006
1.3.3 哈密顿方程 .....	008
1.4 天体的引力场描述 .....	011
1.4.1 引力势的一般描述 .....	011
1.4.2 均匀球体的引力势 .....	013
1.4.3 均匀椭球体的引力势 .....	014
1.4.4 球谐函数展开描述 .....	015
1.5 轨道的数值积分方法 .....	016
1.5.1 欧拉方法 .....	017
1.5.2 龙格-库塔方法 .....	018
参考文献 .....	021
<b>第 2 章 二体问题</b> .....	022
2.1 $N$ 体问题 .....	022
2.1.1 $N$ 体问题的动力学 .....	022
2.1.2 $N$ 体问题的积分 .....	023
2.2 二体问题的运动方程 .....	024
2.3 角动量与能量守恒 .....	025
2.4 开普勒定律 .....	025
2.4.1 椭圆定律 .....	025
2.4.2 面积定律 .....	028
2.4.3 调和定律 .....	028

2.5	飞行路径角 .....	030
2.6	椭圆轨道 .....	031
2.6.1	圆轨道运动 .....	031
2.6.2	椭圆轨道几何 .....	032
2.6.3	开普勒问题 .....	033
2.6.4	兰伯特问题 .....	035
2.7	抛物线轨道 .....	040
2.7.1	逃逸速度 .....	040
2.7.2	飞行路径角与真近点角 .....	041
2.7.3	巴克方程 .....	041
2.7.4	欧拉方程 .....	042
2.8	双曲线轨道 .....	043
2.8.1	双曲线轨道几何 .....	043
2.8.2	位置与时间关系 .....	045
2.9	拉格朗日系数 .....	046
2.9.1	级数形式 .....	046
2.9.2	闭合形式 .....	049
2.10	经典轨道根数 .....	052
2.10.1	轨道根数的定义 .....	052
2.10.2	轨道根数确定位置和速度 .....	053
2.10.3	位置和速度确定轨道根数 .....	054
	参考文献 .....	056
<b>第3章</b>	<b>三体问题 .....</b>	<b>057</b>
3.1	三体问题运动方程 .....	057
3.1.1	三体运动方程 .....	057
3.1.2	三体系统特解 .....	059
3.2	圆形限制性三体问题 .....	064
3.2.1	基本假设与近似 .....	064
3.2.2	会合坐标运动方程 .....	065
3.3	拉格朗日平动点 .....	069
3.3.1	平动点的计算 .....	069
3.3.2	平动点的稳定性 .....	072
3.4	雅可比积分 .....	075
3.5	零速度曲面 .....	076
3.6	平动点附近周期运动 .....	078
3.6.1	运动方程一阶近似解 .....	078
3.6.2	周期与拟周期轨道 .....	080
3.7	不变流形 .....	086
3.7.1	基本概念与结论 .....	086

3.7.2	周期轨道的稳定性 .....	089
3.7.3	平动点的不变流形 .....	090
3.7.4	周期轨道的不变流形 .....	092
	参考文献 .....	094
<b>第4章</b>	<b>行星际直接转移轨道 .....</b>	<b>096</b>
4.1	圆锥曲线拼接原理 .....	096
4.2	霍曼转移轨道 .....	097
4.2.1	两圆轨道间两脉冲转移 .....	097
4.2.2	两圆轨道间三脉冲转移 .....	102
4.2.3	不相交圆与椭圆轨道间转移 .....	106
4.2.4	相交圆与椭圆轨道间转移 .....	111
4.2.5	行星际探测任务初始评估 .....	113
4.3	行星轨道的会合周期 .....	114
4.4	行星际转移轨道的类型 .....	116
4.5	行星际发射机会搜索 .....	117
4.5.1	等高线图搜索方法 .....	117
4.5.2	发射能量等高线图 .....	122
4.5.3	火星发射机会分析 .....	124
4.6	地球逃逸轨道 .....	127
4.6.1	地球逃逸能量需求 .....	127
4.6.2	逃逸双曲线发射圆 .....	129
4.6.3	地球逃逸轨道几何 .....	131
4.7	目标天体捕获轨道 .....	137
4.7.1	目标天体捕获能量需求 .....	137
4.7.2	固定轨道半长轴捕获 .....	138
4.7.3	固定轨道偏心率捕获 .....	139
4.7.4	捕获轨道的倾角问题 .....	140
4.7.5	$B$ 平面参数打靶方法 .....	141
	参考文献 .....	144
<b>第5章</b>	<b>行星借力飞行轨道 .....</b>	<b>146</b>
5.1	借力飞行的基本原理 .....	146
5.2	借力飞行的机理分析 .....	149
5.2.1	借力飞行的基本方程 .....	149
5.2.2	角动量和能量变化量 .....	151
5.2.3	借力效能的数值分析 .....	153
5.3	$v_{\infty}$ 杠杆效应 .....	158
5.3.1	行星共振借力飞行 .....	158
5.3.2	地球共振杠杆类型 .....	159
5.3.3	地球共振杠杆效应 .....	160

5.4 气动借力飞行技术 .....	166
5.4.1 气动借力飞行原理 .....	166
5.4.2 气动借力飞行模型 .....	168
5.4.3 气动借力参数分析 .....	170
5.5 借力飞行轨道设计 .....	172
5.5.1 引力辅助借力轨道 .....	173
5.5.2 推力辅助借力轨道 .....	175
5.5.3 气动辅助借力轨道 .....	176
5.5.4 深空机动借力轨道 .....	177
5.6 借力序列初始评估 .....	179
5.6.1 Tisserand 准则 .....	179
5.6.2 Tisserand 图方法 .....	180
5.6.3 行星借力序列选择 .....	184
参考文献 .....	185
<b>第6章 连续小推力飞行轨道 .....</b>	<b>187</b>
6.1 连续推力轨道动力学模型 .....	187
6.1.1 笛卡儿坐标系动力学方程 .....	187
6.1.2 球坐标系下的动力学方程 .....	188
6.1.3 经典轨道根数动力学方程 .....	189
6.1.4 改进轨道根数动力学方程 .....	190
6.2 连续推进系统数学模型 .....	191
6.2.1 核能电推进模型 .....	191
6.2.2 太阳能电推进模型 .....	192
6.2.3 太阳帆推进模型 .....	192
6.3 连续推力轨道的形状逼近 .....	194
6.3.1 正弦指数曲线逼近方法 .....	194
6.3.2 逆多项式曲线逼近方法 .....	199
6.3.3 形状逼近轨道设计方法 .....	203
6.4 连续推力轨道的局部最优控制 .....	205
6.4.1 局部最优控制基本原理 .....	205
6.4.2 轨道参数局部最优控制律 .....	206
6.4.3 局部最优控制的加权组合 .....	210
6.5 连续小推力轨道的离散脉冲方法 .....	212
6.5.1 离散脉冲法的基本原理 .....	212
6.5.2 离散脉冲两点边值问题 .....	214
6.5.3 离散脉冲方法的应用 .....	215
参考文献 .....	217
<b>第7章 行星际飞行轨道优化方法 .....</b>	<b>219</b>
7.1 轨道微分修正方法 .....	219

7.1.1	轨迹变分原理 .....	219
7.1.2	微分修正方法 .....	222
7.1.3	微分修正的应用 .....	224
7.2	轨道间接优化方法 .....	228
7.2.1	行星际轨迹优化问题 .....	228
7.2.2	庞特里亚金极小值原理 .....	229
7.2.3	飞行时间最短问题 .....	232
7.2.4	燃料消耗最少问题 .....	235
7.3	主矢量原理与应用 .....	238
7.3.1	主矢量原理 .....	238
7.3.2	主矢量的计算 .....	241
7.3.3	主矢量伴随方程 .....	241
7.3.4	脉冲轨道优化方法 .....	242
7.3.5	主矢量理论的应用 .....	249
7.4	轨道直接优化方法 .....	252
7.4.1	轨迹优化问题描述 .....	252
7.4.2	标准配点法 .....	253
7.4.3	伪谱配点方法 .....	257
7.4.4	龙格-库塔方法 .....	261
7.4.5	直接法的应用 .....	262
	参考文献 .....	264
<b>第8章</b>	<b>行星际任务轨道设计实例 .....</b>	<b>266</b>
8.1	近地小行星交会探测任务 .....	266
8.1.1	近地小行星轨道特点 .....	266
8.1.2	探测目标评估与选择 .....	267
8.1.3	日心转移轨道设计 .....	271
8.1.4	地球逃逸轨道设计 .....	274
8.2	载人火星探测任务 .....	275
8.2.1	载人火星轨道特点 .....	275
8.2.2	载人火星探测机会 .....	277
8.2.3	载人火星转移轨道 .....	280
8.2.4	探测系统规模分析 .....	283
8.3	木星探测任务 .....	286
8.3.1	两脉冲探测轨道 .....	287
8.3.2	行星借力序列分析 .....	290
8.3.3	借力飞行转移轨道 .....	292
8.3.4	连续推力转移轨道 .....	295
	参考文献 .....	297

# 第 1 章

## 行星际飞行轨道基础知识

### 1.1 太阳系中的天体

太阳系由一个恒星（称为太阳）、八大行星、行星卫星、至少 5 个矮行星及无数的小行星和彗星组成。八大行星按照距太阳的距离，依次为：水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星和海王星。而原先被视为行星的冥王星于 2006 年由国际天文联合会（International Astronomical Union, IAU）正式定义为矮行星。许多科学家认为，太阳系大约于 46 亿年前由巨大的旋转气体和尘埃（即星云）形成。这些星云因为引力而逐渐聚集，旋转越来越快，整体被压成圆盘状。大多数的物质被聚集到中心，形成了太阳，而其他的一些物质则组成了行星、小行星、彗星及行星的卫星等。

太阳是太阳系里最大的天体，它占据了太阳系 99.86% 的质量。木星是八大行星中体积最大的行星，其直径约为太阳直径的 1/10，而总质量仅为太阳的 0.1%。由于太阳引力的主导作用，八大行星的运动可视为主要受太阳引力的影响。因此，它们的运动轨迹大致为以太阳为焦点的椭圆轨道，但半长轴、偏心率和倾角等轨道特征各不相同。当然，由于岁差、其他行星引力及广义相对论效应的影响，行星绕太阳的公转轨道也在时刻发生着微小的变化。太阳系中各大行星绕太阳公转轨道的偏心率都较小，除水星以外，其他行星的轨道偏心率均小于 0.1，运行于近圆轨道上。另外，除水星外，各大行星绕太阳公转轨道平面与黄道面的夹角都小于 4°。

根据天体绕太阳运动轨道的分布，太阳系可非正式地分为内太阳系和外太阳系。内太阳系包括水星、金星、地球、火星和主小行星带；而主小行星带以外的部分称为外太阳系。特别地，对于外太阳系，从木星到海王星这 4 颗大型行星称为“中间带”；海王星以外还有很大的区域被小行星和矮行星所占据，这个区域称为柯伊伯带。

水星是距离太阳最近的行星，它绕太阳公转轨道的半长轴为 0.387 AU（1 AU =  $1.495\,978\,7 \times 10^8$  km，定义为地球到太阳的平均距离，称为一个天文单位），偏心率为 0.206，轨道倾角为 7°（参考平面为黄道面）。水星绕太阳公转周期为 87.97 天，自转周期为 58.646 天，刚好是公转周期的 2/3。水星不存在天然的卫星。水星的平均半径为 2 439.7 km，质量是太阳系行星中最小的，约为地球质量的 0.055。目前已有“水手 10 号”和“信使号”探测器实现了水星探测，而“哥伦布号”探测器将于 2025 年到达水星开展探测任务。

金星是离地球最近的行星，它绕太阳公转轨道半长轴约为 0.723 AU，偏心率为 0.007，轨道倾角为 3.39°。金星的公转周期约为 224.7 天，自转周期约为 243 天，其自转方向与地

球自转方向是相反的,所以,在金星表面上看太阳是从西边升起,东边落下的。金星的平均半径为 6 051.8 km,质量约为地球的 0.815。金星具有非常稠密的大气层,大气密度约为地球大气密度的 93 倍,地表温度在 400 °C 以上,这增加了探测器进行金星近距离探测的难度。与水星一样,金星没有天然的卫星。金星是人类探测器到达的第一颗地外行星。

地球是太阳系中唯一拥有生命的行星,它与太阳的距离为 1 AU,绕太阳公转轨道的偏心率为 0.016 7。地球的平均半径为 6 371 km,质量为  $5.972\ 37 \times 10^{24}$  kg。地球的密度在内太阳系中是最高的,并且有一颗自然卫星,即月球。

近地天体,是指那些绕太阳的公转轨道与地球的公转轨道很接近的小天体。太阳系中的小天体,若其近日点距离小于 1.3 AU,则被定义为近地天体。近地天体的主要组成是小行星,也有部分彗星。截至 2018 年 9 月,人类已经发现了超过 18 800 颗近地天体。近地天体是行星际探测的热点目标。在这些近地天体中,若其轨道与地球最近接近距离小于 0.05 AU,并且直径大于 140 m,则被认为是高危小天体,高危小天体存在撞击地球的可能性,对地球及人类的安全构成了威胁。人类已经成功实施了多次近地天体探测任务,例如美国的 NEAR 任务和日本的近地小行星采样返回任务。

火星绕太阳公转轨道半长轴为 1.524 AU,偏心率为 0.093 4,倾角为 1.85°。火星的公转周期为 779.96 天,自转周期为 1.026 天。火星具有稀薄的大气,大气密度不到地球大气的 1%,大气成分主要是二氧化碳。火星的表面温度约为 -63 °C,被视为人类最有可能移居的星球。火星的平均半径为 3 389.5 km,质量约为地球的 0.107。此外,火星拥有两个天然的卫星,分别为火卫一 Phobos 和火卫二 Deimos。火星一直是人类开展行星际探测任务的热点目标,进行火星探测的任务窗口每 26 个月会出现一次。自 1960 年以来,人类已经向火星发射了 46 颗探测器,开展火星科学探测,任务成功率约为 45%。

主小行星带,在火星和木星之间运行着成千上万的小天体。特别地,这些小天体主要集中于距离太阳 2.06 ~ 3.27 AU 核心区域内。据估计,主小行星带中天体的数量在 70 万 ~ 170 万颗,其中最大的天体是谷神星(被归类为矮行星)。尽管小行星带分布很广,但其中所有天体的总质量仅为地球质量的 0.1%。绝大多数主小行星带中的天体绕太阳公转轨道的偏心率小于 0.4,轨道倾角小于 30°。一般认为,由于木星引力的影响,早期太阳系的残余物质没能够聚合在一起,最终形成主小行星带。主小行星带中的天体近年来也逐渐成为行星际探测的热点目标。

木星是太阳系中最大的行星,平均半径为 69 911 km,质量约为地球的 318 倍,为气态巨行星。木星绕太阳公转的轨道半长轴为 5.2 AU,偏心率为 0.048 9,轨道倾角为 1.303°。木星绕太阳的公转周期为 11.862 年,自转周期约为 9.925 小时。目前已经发现了 79 颗木星的天然卫星,其中有 4 颗卫星较大,并且与类地行星具有相似的特征。由于木星的质量很大,在木星与太阳系统的两个三角平动点  $L_4$  和  $L_5$  附近稳定存在着许多小行星,这些小行星构成了特洛伊小行星群。目前人类已经进行了多次的木星探测任务,包括著名的“旅行者号”飞越探测和“伽利略号”环绕探测任务。

土星也为气态巨行星,平均半径为 58 232 km,土星的质量约为地球的 95 倍,但其密度是太阳系所有行星中最低的。土星绕太阳公转轨道的半长轴为 9.58 AU,偏心率为 0.056 5,轨道倾角为 2.485°。木星的公转周期约为 29.457 1 年,自转周期约为 10.55 h。土星赤道附近的环状结构十分显著,主要由冰微粒和岩石尘土组成。目前在土星附近已发现了 62 颗自

然卫星，其中最大的一颗卫星为泰坦，它的体积比水星的还要大，并且拥有浓厚的大气。“卡西尼-惠更斯号”探测器于 2004 年成功进入环土星轨道，开启了人类的首次近距离土星科学探测。

天王星是太阳系中第三大的行星，平均半径为 25 362.7 km，质量约为地球的 14 倍。天王星绕太阳公转轨道半长轴为 19.218 AU，偏心率为 0.046，轨道倾角为 0.773°。天王星的公转周期约为 84.02 年，自转周期约为 17 h 14 min。天王星自转轴的倾角非常大，与其绕太阳公转轨道角动量矢量之间的夹角约为 97.77°，因此，天王星几乎是横躺着绕太阳公转的，其赤道附近也存在暗淡的行星环，目前已发现了 27 颗天王星的自然卫星。由于距离地球遥远，探测器飞抵天王星需要很长的时间。NASA 的“旅行者 2 号”是目前唯一成功飞越天王星的探测器。

海王星是太阳系中距离太阳最远的行星，其离太阳最近距离为 29.81 AU，最远距离为 30.33 AU。海王星绕太阳公转轨道的半长轴为 30.11 AU，偏心率为 0.095，轨道倾角为 1.768°。天王星的平均半径为 24 622 km，质量约为地球的 17 倍。天王星绕太阳公转周期约为 164.8 年，自转周期约为 15 h 58 min。目前发现的自然卫星有 14 颗，其中只有海卫一具有足够大的质量，能使其自身呈球体。截至目前，只有“旅行者 2 号”探测器实现了海王星的飞越探测。

柯伊伯带位于距离太阳 30~50 AU 的区域。与主小行星带类似，其主要由小天体和太阳系形成初期的残骸构成。柯伊伯带可分为传统带和共振带，共振带是指与海王星运动具有共振关系的天体群，其共振比为 2:3（当海王星绕太阳公转 3 圈时，小天体完成绕太阳公转 2 圈），共振带分布在约 39.4 AU 处，包括冥王星和其卫星在内的许多天体都位于共振带内。

图 1.1.1 给出了太阳系主要结构的示意图，其中略去了一些天体，如彗星、谷神星等。

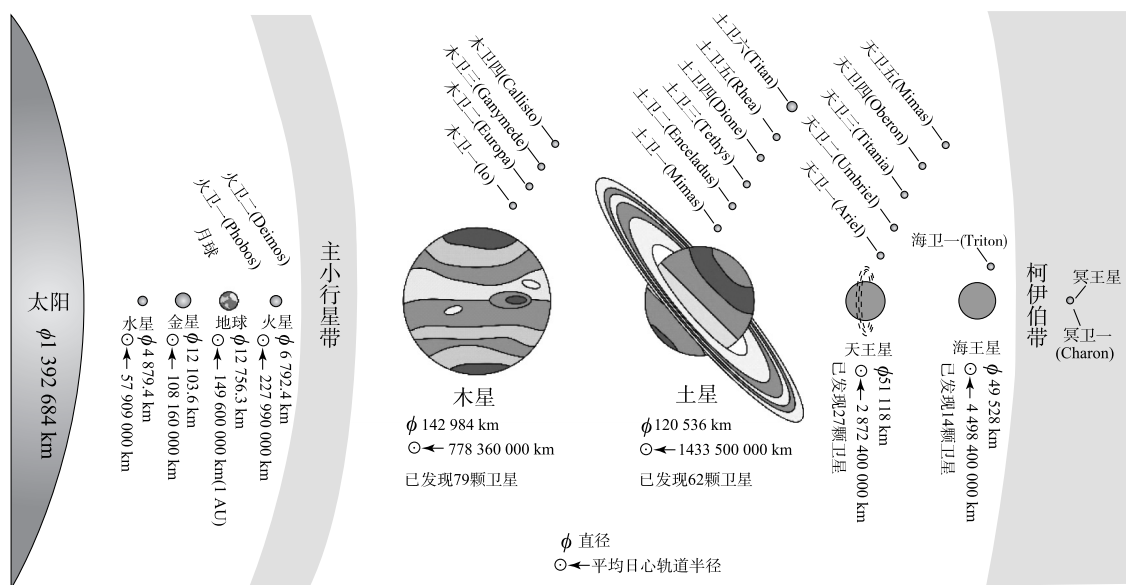


图 1.1.1 太阳系的结构

## 1.2 牛顿力学

牛顿于1687年发表了《自然哲学的数学原理》，在其第一卷中首次表述了物体运动的三定律，后来被称为牛顿定律。这三个定律描述如下：

牛顿第一定律：任何质点或质点系会继续相对于某一惯性坐标系保持静止或者匀速直线运动状态，除非有外力施加在该质点或质点系上，迫使它改变这种状态。该定律又称为惯性定律。

牛顿第二定律：动量为 $\boldsymbol{p}$ 的质点在外力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，其动量随时间的变化率同该质点所受外力成正比，并且与外力的方向相同，即 $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$ 。

牛顿第三定律：相互作用的两个质点之间的作用力和反作用力总是大小相等，方向相反，并且作用在同一条直线上。

牛顿在《自然哲学的数学原理》中还首次提出了万有引力定律，从而使得经典力学成为一个较为完整的体系，这为后来的力学体系发展奠定了基础。

牛顿力学引入了一些基本概念，包括力、质点、时间、匀速运动和惯性坐标系。不可否认，这些概念带有些形而上学的色彩，如质点是一个假象模型，我们忽略了物体的形状和大小，将有限质量集中于一个零维的点，且其密度还是有限的。另外，牛顿的绝对时空观认为时间和空间是独立的，两者不会互相影响，时间是均匀流逝的，与参照系和物体的运动都无关，空间的度量也是处处相等，且与参照系和物体的运动无关。因此，惯性坐标系存在于绝对时空观中，不同的惯性系中对物体运动的描述，如速度、位移等，可以通过伽利略变换相互联系，或者说一切力学定律在伽利略变换下都是不变的。1905年，爱因斯坦建立了狭义相对论，直接否定了绝对时空观，他认为时间和空间是紧密联系的，且时间和空间都具有相对的意义，绝对的惯性系是不存在的。1915年，爱因斯坦建立了广义相对论，对引力进行了重新解释，他认为引力是时空被弯曲的表现，从而时空是非均匀且可弯曲的。从现代的观点看，牛顿力学是真实情况的高度近似理论，在许多工程问题中仍然是适用的。例如，对行星际飞行轨道进行讨论时，依据的基础力学理论仍然是牛顿三大运动定律及牛顿万有引力定律。实际上，在航天工程领域中，只有极少数情况下需要考虑相对论效应，例如GPS定位误差的校正，需要考虑飞行速度和引力势带来的卫星钟与接收机钟之间的误差。

## 1.3 分析力学

### 1.3.1 拉格朗日方程

力学系统的运动规律可用最小作用原理进行描述，根据这一原理，表征每一个力学系统都可以用一个确定的函数：

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t) \quad (1.3.1)$$

其中， $q_1, q_2, \dots, q_s$ 表示自由度为 $s$ 的系统的广义坐标，其对时间的导数 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ 称为广义速度。

式(1.3.1)可以简记为 $L(q, \dot{q}, t)$ ，力学系统的运动满足以下条件：

假设在时刻  $t = t_1$  和  $t = t_2$ , 运动系统的位置由两组坐标  $q^{(1)}$  和  $q^{(2)}$  确定, 那么系统在这两个位置之间的运动使得积分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.3.2)$$

取最小值 (一般是极小值)。函数  $L$  称为给定系统的拉格朗日函数, 积分  $S$  称为作用量。拉格朗日函数中只包含  $q$  和  $\dot{q}$ , 而不包含更高阶导数  $\ddot{q}$ ,  $\ddot{\ddot{q}}$ ,  $\dots$ , 这表明系统的力学状态完全由坐标和速度确定。

下面将通过求解使积分  $S$  取最小值的问题来推导运动微分方程。为了便于表达, 先假设系统仅有一个自由度, 只需确定一个函数  $q(t)$ 。

设  $q = q(t)$  是使  $S$  取最小值的函数, 即采用其他任意函数

$$q(t) + \delta q(t) \quad (1.3.3)$$

代替  $q(t)$  时, 都会使  $S$  增大。这里函数  $\delta q(t)$  称为函数  $q(t)$  的变分, 其在从  $t_1$  到  $t_2$  的整个时间间隔内都认为是小量。由于比较函数 (1.3.3) 在时刻  $t = t_1$  和  $t = t_2$  分别取值为  $q^{(1)}$  和  $q^{(2)}$ , 因此有

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (1.3.4)$$

使用  $q(t) + \delta q(t)$  代替  $q(t)$  时, 使  $S$  产生的增量为

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.3.5)$$

$S$  取最小值的必要条件是一阶变分为零。于是最小作用量原理可以写成

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (1.3.6)$$

或者变分后的形式可以表示为

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0 \quad (1.3.7)$$

注意到  $\delta \dot{q} = d(\delta q)/dt$ , 则第二项分部积分为

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 \quad (1.3.8)$$

根据式 (1.3.4) 可得式 (1.3.8) 中第一项为零, 剩下的积分在  $\delta q$  取任意值时都应该等于零。这时, 被积函数必须恒等于零, 于是有

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (1.3.9)$$

对于有  $s$  个自由度的系统, 在最小作用量原理中, 有  $s$  个不同的函数  $q_i(t)$  应该独立地变分。因此, 可以得到  $s$  个方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (1.3.10)$$

利用上式推导的运动微分方程在力学中称为拉格朗日 - 欧拉方程。如果给定力学系统的拉格朗日函数已知, 则方程 (1.3.10) 建立了加速度、速度和坐标之间的联系, 即给出了系统的运动方程。

为了讨论拉格朗日函数的一般性结论, 考虑两个拉格朗日函数  $L'(q, \dot{q}, t)$  和  $L''(q, \dot{q}, t)$ , 它们相差某个坐标和时间的函数  $f(q, t)$  对时间的全导数, 表示为

$$L''(q, \dot{q}, t) = L'(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}f(q, t) \quad (1.3.11)$$

计算这两个拉格朗日函数对应的积分,可以得到

$$\begin{aligned} S'' &= \int_{t_1}^{t_2} L''(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}f(q, t) dt \\ &= S' + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1) \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

上式表明,  $S''$ 和 $S'$ 相差一个附加项,在变分时附加项消失,条件 $\delta S'' = 0$ 和 $\delta S' = 0$ 完全等价,则运动微分方程也相同。因此,可以得到这样的结论:拉格朗日函数的定义不唯一,但不同拉格朗日函数之间仅相差某个时间和广义坐标的函数对时间的全导数。

### 1.3.2 拉格朗日函数

#### 1. 自由质点的拉格朗日函数

研究力学现象必须选择参考系,一般来说,运动规律在不同参考系下具有不同的形式。为了使力学规律在形式上最简单,选择参考系时,若空间相对它是均匀的且各向同性的,时间相对它是均匀的,这样的参考系称为惯性参考系。对于在惯性参考系中自由运动的质点,其拉格朗日函数形式存在一些结论:时间和空间的均匀性意味着这个函数不显含质点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 和时间 $t$ ,即 $L$ 只能是速度 $\boldsymbol{v}$ 的函数。又由于空间内各向同性, $L$ 也不依赖于速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 的方向,只能是速度大小的函数,也就是说 $L = L(v^2)$ 。

如果在已有的这个惯性参考系 $K$ 以外,再引进另一个惯性参考系 $K'$ ,且惯性参考系 $K$ 以无穷小速度 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 相对于另一惯性参考系 $K'$ 运动,则有 $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\varepsilon}$ 。实验表明,质点相对这两个参考系的自由运动规律是完全相同的,并且所有力学关系式相对这两个参考系都是等价的。换言之,存在无穷多个惯性参考系,它们相互做匀速直线运动,在这些参考系中,时间和空间的性质都是相同的,力学规律也是相同的,这个结论称为伽利略相对性原理。在惯性参考系 $K'$ 中,拉格朗日函数 $L'$ 表示为

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^2) \quad (1.3.13)$$

将上式展开成 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的幂级数并忽略二阶及以上小量,可以得到

$$L(v'^2) = L(v^2) + 2 \frac{\partial L}{\partial v^2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.3.14)$$

根据拉格朗日函数的一般性结论,在所有惯性参考系中,运动方程的形式是相同的,如果 $L'$ 与 $L(v^2)$ 存在差异,只能相差某个关于时间和坐标的函数的全导数。对于式(1.3.14),只有在等式右边第二项与速度 $\boldsymbol{v}$ 呈线性关系时,它才能是时间的全导数。因此, $\partial L / \partial v^2$ 应与速度无关,即拉格朗日函数 $L$ 与速度的平方成正比:

$$L = \frac{m}{2} v^2 \quad (1.3.15)$$

其中, $m$ 为常数,称为质点的质量。

式(1.3.15)即为自由运动质点的拉格朗日函数形式。

考虑一个力学系统由 $A$ 和 $B$ 两部分组成,拉格朗日函数分别为 $L_A$ 和 $L_B$ 。如果两个部分都是封闭的,即不受外部任何物体作用,则在两个部分相距足够远,以至于它们的相互作用可以忽略的极限情况下,系统的拉格朗日函数趋于极限

$$\lim L = L_A + L_B \quad (1.3.16)$$

式 (1.3.16) 表明拉格朗日函数具有可加性。因此, 根据式 (1.3.15), 对于无相互作用的质点组成的自由质点系, 可以得到

$$L = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (1.3.17)$$

需要注意的是, 只有考虑到可加性, 给出的质量定义才有实际的物理意义。

在特定的坐标系中, 速度平方的计算方式为

$$v^2 = \left( \frac{dl}{dt} \right)^2 \quad (1.3.18)$$

因此, 确定拉格朗日函数只需求出在特定坐标系中弧长微元  $dl$  的平方。例如, 在笛卡儿坐标系中, 有  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , 这时拉格朗日函数可以表示为

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (1.3.19)$$

## 2. 质点系的拉格朗日函数

存在一种质点系, 其质点之间有相互作用, 但不受外部任何物体作用, 这种质点系称为封闭质点系。为了描述质点之间的相互作用, 可以在自由质点系的拉格朗日函数中增加坐标的某一函数 (根据相互作用的性质确定), 将这一函数记为  $-U$ , 于是封闭质点系拉格朗日函数的一般形式表示为

$$L = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) \quad (1.3.20)$$

其中,  $\mathbf{r}_i$  是第  $i$  个质点的矢径; 函数  $U$  称为质点系的势能。势能仅依赖于所有质点在同一时刻的位置, 即其中任何质点位置的改变都会立刻影响到所有其他质点, 证明了相互作用具有瞬间传递性, 这种性质在经典力学中是必然的。

拉格朗日函数的形式 (1.3.20) 也表明, 时间是均匀且各向同性的, 用  $-t$  代替  $t$  不会改变拉格朗日函数, 也不会改变运动方程, 也就是说, 如果在参考系中某种运动是可能的, 则逆运动也是可能的。回溯到经典力学中可以得出: 遵循经典力学定律的所有运动都是可逆的。

根据拉格朗日函数建立运动方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (1.3.21)$$

将式 (1.3.20) 代入式 (1.3.21) 可得

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (1.3.22)$$

式 (1.3.22) 形式的运动方程称为牛顿方程, 是相互作用质点系力学的基础。上式等号右端的矢量为

$$\mathbf{F}_i = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (1.3.23)$$

$\mathbf{F}_i$  称为作用在第  $i$  个质点上的力。 $\mathbf{F}$  与  $U$  都只依赖于所有质点的坐标, 与速度无关。因此, 式 (1.3.22) 表明, 质点的加速度矢量只是坐标的函数。

采用笛卡儿坐标描述, 根据式 (1.3.19), 可以得到拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U \quad (1.3.24)$$

如果采用任意的广义坐标  $q$  描述运动, 而不是用笛卡儿坐标, 则表示新的拉格朗日函数需要进行相应的变换

$$\mathbf{x}_i = f_i(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad \dot{\mathbf{x}}_i = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (1.3.25)$$

将式 (1.3.25) 代入式 (1.3.24), 可以得到广义坐标下的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k,l} a_{kl}(q) \dot{q}_k \dot{q}_l - U(q) \quad (1.3.26)$$

其中,  $a_{kl}$  是广义坐标的函数, 表示为

$$a_{kl} = \sum_i m_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \frac{\partial f_i}{\partial q_l} \quad (1.3.27)$$

前面的讨论只针对封闭质点系, 下面研究非封闭质点系。假定某一非封闭质点系  $A$ , 它与运动完全已知的质点系  $B$  相互作用, 这种情况称为  $A$  在由  $B$  给定的外场中运动。根据最小作用量原理推导运动方程时, 需要对每个广义坐标进行独立变分, 假设质点系  $A+B$  是封闭质点系, 则有

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B) \quad (1.3.28)$$

其中,  $T_A$  和  $T_B$  表示为

$$T_A = \sum_i \frac{m_{A,i} v_{A,i}^2}{2}, \quad T_B = \sum_i \frac{m_{B,i} v_{B,i}^2}{2} \quad (1.3.29)$$

分别称为系统  $A$  和  $B$  的动能;  $U(q_A, q_B)$  是  $A+B$  的势能。将广义坐标  $q_B$  用已知的时间函数代替后, 动能  $T_B$  为只与时间有关的函数, 即是某个时间函数的全导数, 可以从  $L$  中略去。因此, 非封闭质点系  $A$  的拉格朗日函数为

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)) \quad (1.3.30)$$

上式表明, 在外场中的非封闭质点系的运动可以由一般形式的拉格朗日函数描述, 唯一的区别是势能函数  $U$  中可能显含时间  $t$ 。

### 1.3.3 哈密顿方程

使用拉格朗日函数和相应的拉格朗日方程来描述力学规律的前提是利用广义坐标和广义速度来描述系统的力学状态。然而, 这种描述不是唯一的, 存在其他的描述方式。在研究某些力学普遍问题的时候, 利用广义坐标和广义动量来描述系统状态具有一系列的优点, 这时需要推导与此相应的运动方程。

在数学上, 利用勒让德变换可以实现从一组独立变量到另一组独立变量的变换, 应用到广义坐标和广义动量的描述方式的过程如下。

拉格朗日函数作为坐标和速度的函数时, 其全微分可以表示为

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \quad (1.3.31)$$

定义导数  $\partial L / \partial \dot{q}_i$  为广义动量  $p_i$ , 根据拉格朗日方程 (1.3.10), 可以得到  $\partial L / \partial q_i = \dot{p}_i$ , 则式 (1.3.31) 可以表示为

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i \quad (1.3.32)$$