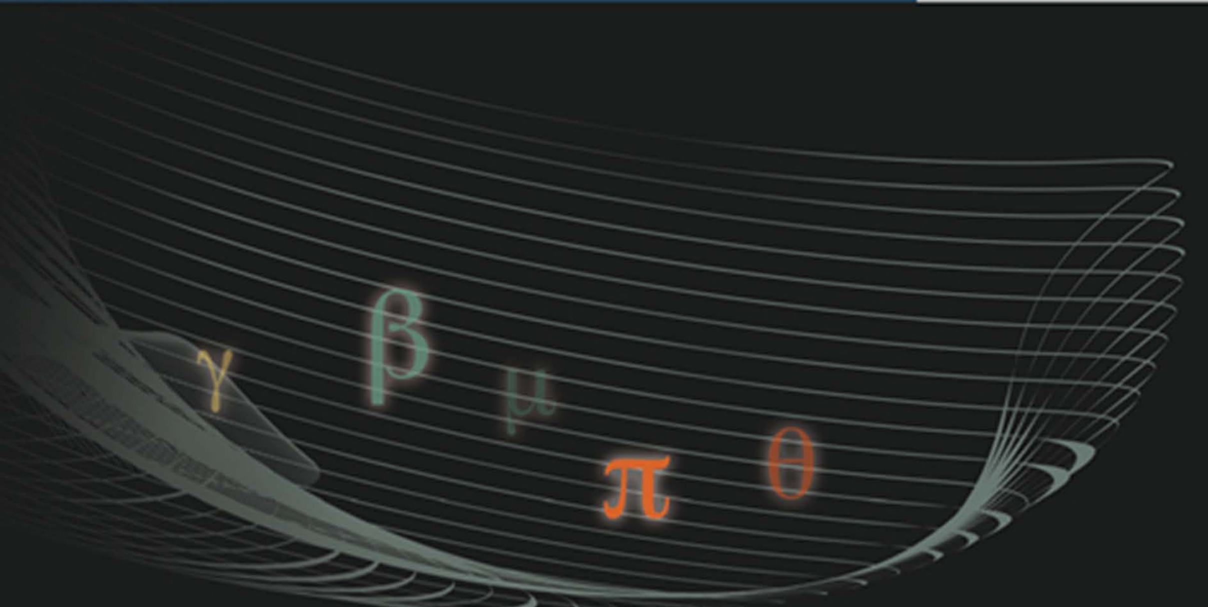
经济应用数学

屈思敏 ◎ 主编



北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

经济应用数学

屈思敏　主　编
喻光继　副主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书根据财经管理类专科的课程特点编写.

全书除了介绍数学理论外，还包括一些简单的经济应用问题. 共分七章，包括函数、函数的极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、二元函数微积分学简介，每章后面配有小结及习题，书后附有参考答案，以便读者理解有关章节内容和掌握计算方法.

本书可作为高等院校财经管理类专科各专业学生的数学教材，也可作为其他专业读者的学习参考书.

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学/屈思敏主编. —北京：北京理工大学出版社，2020.4

ISBN 978－7－5682－8345－8

Ⅰ.①经…　Ⅱ.①屈…　Ⅲ.①经济数学－高等学校－教材　Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2020）第 058016 号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／（010）68914775（总编室）
　　　　　（010）82562903（教材售后服务热线）
　　　　　（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址／http：//www. bitpress. com. cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／三河市华骏印务包装有限公司
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／15
字　　数／354 千字
版　　次／2020 年 4 月第 1 版　2020 年 4 月第 1 次印刷
定　　价／45.00 元

责任编辑／钟　博
文案编辑／孟祥雪
责任校对／周瑞红
责任印制／李志强

前　言

随着社会经济的发展，数学的理论和方法在经济活动与分析中的作用十分重要，对财经管理类专科各专业学生的数学素养有着较高的要求，本书就是按财经管理类专科各专业的课程特点与教学要求编写的，能够满足这类专业对数学知识的需要．

在内容编排上，我们在每章的开头有“问题背景”“本章导学”，让读者在学习每一章之前，对内容有一个大致的了解，教学内容力求做到深入浅出，通俗易懂，在保证教材内容完整性的前提下，我们对一些内容做了适当的精简与合并，书中的定理性质有选择地给出证明过程，省略一些详细的推导过程，通过例子、几何图形帮助读者理解，最终熟记．教材中各章的例题都经过精心挑选，并增加经济应用问题举例，这些例子有助于读者理解教材内容及其应用，掌握基本计算方法．每一章后面配有相应的习题，能够覆盖本章的知识点，帮助读者巩固所学知识．总之，尽量使教材内容做到通俗、简单，并有一定的应用性，以满足财经管理类专科读者的需求．

全书共分七章，包括函数、函数的极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、二元函数微积分学简介．

本书由屈思敏担任主编，喻光继担任副主编．黄凤丽、蔡俊宁、韦秋凤参与编写．

由于编者水平有限，书中难免存有不足之处，恳请读者批评指正．

编　者

目　录

第一章

函　　数

问题背景

自然界的许多现象和事物都在运动变化中，在研究它们的数量问题时，往往涉及的变量不止一个，一些变量之间会有某种确定的对应关系．例如，人们在对物体运动（如天文、航海等问题）的研究中，引出了函数这个数学概念．从此以后函数这个概念几乎在所有的科学研究中占据了中心位置．函数就是以变量为研究对象，研究变量之间的依赖关系．

本章导学

本章介绍函数的基本知识．函数是微积分的主要研究对象．其中主要介绍函数概念及一些特性，函数概念中包括确定函数的两要素、函数的表示法、反函数、初等函数、分段函数等；函数特性主要有有界性、奇偶性、单调性及周期性．

第一节　函数的概念

函数研究变量与变量之间的关系，在初等数学中，我们已经了解函数概念，即函数关系就是变量之间的依赖关系，给定一个自变量的值就能够唯一确定一个因变量的值．许多研究领域都离不开函数，例如，函数是研究经济学的重要工具．函数同样是微积分中研究的主要对象，这里，我们将介绍函数的基本理论，包括函数的性质与运算等．

一、常量与变量

常量和变量是一个量的两种形式．

在自然界以及社会的许多领域中，我们会发现或碰到各种各样的量，有变化的、不变化的．例如，温度、时间、重量、价格、收入、成本等．这些量可以分为两类，一类是在研究的过程中保持不变的，始终是一个常数的量，我们称其为常量；另一类是在所研究的过程中发生变化的，可以取不同数值的量，我们称其为变量．

例如，水的结冰点是 0 ℃、某种商品在一定时期内的价格等，它们是常量；室外温度、生产过程中的产量等都是不断变化的，它们都是变量.

还有，一个物体做匀速运动时，速度是常量，时间、位移是变量.

常量和变量是相对于具体研究过程而言的. 同一个量，在某一过程中是常量，而在另一过程中则可能是变量；反过来也是如此. 例如，某种商品的价格在一段时间内是不变的，它是常量，但是，把时间延长价格就会是一个变量. 再如，速度在匀速运动和变速运动中分别是常量和变量. 这说明常量和变量具有相对性.

一个变量能取得许多数值，这些数值可用集合表示，称之为这个变量的变化范围，它随着所研究问题的性质不同而不同.

例如，将温度为 26 ℃的水烧开，于是水的温度 T 从 26 ℃增加到 100 ℃，即变量 T 取得从 26 到 100 之间的各个数值.

再如，商场中的顾客人数是一个变量，它的取值是 0、1、2、3、….

（一）区间

有些变量的变化是离散的，例如，某人一天内接到的电话次数、一天内某地发生火灾的次数、一棵果树结果的数量等.

有些变量的变化是连续的，它可以取介于某个范围内的任意数值，例如，体重的变化、温度的变化等.

在几何上，一个变量的取值可用数轴上的点来描述.

通常，用区间和邻域来描述连续变量的变化范围.

对于连续变化的变量而言，区间就是由介于两个实数 a，b 之间的一切数值的集合，其中，a，b 称为区间的端点.

区间可分为有限区间和无限区间.

有限区间有：

（1）开区间：不包括两个端点，记作 $a<x<b$ 或 (a, b)；

（2）闭区间：两个端点都包括在内，记作 $a\leqslant x\leqslant b$ 或 $[a, b]$；

（3）半开区间：只包括其中一个端点在内的区间.

只包含左端点在内的半开区间，记作 $a\leqslant x<b$ 或 $[a, b)$；

只包含右端点在内的半开区间，记作 $a<x\leqslant b$ 或 $(a, b]$.

无限区间有：

（1）取任意实数，记作 $-\infty<x<+\infty$或 $(-\infty, +\infty)$.

（2）取小于 a 的一切实数，记作 $-\infty<x<a$ 或 $(-\infty, a)$；

（3）取不大于 a 的一切实数，记作 $-\infty<x\leqslant a$ 或 $(-\infty, a]$；

（4）取大于 a 的一切实数，记作 $a<x<+\infty$或 $(a, +\infty)$；

（5）取不小于 a 的一切实数，记作 $a\leqslant x<+\infty$或 $[a, +\infty)$.

（二）邻域

邻域，简单地说就是点 x_0 的邻近区域.

在数轴上，以点 x_0 为中心、长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，称为点 x_0 的 δ 邻域.

点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径．

邻域也可以用实数集合

$$\{x: |x-x_0|<\delta, \ \delta>0\}$$

表示．

例如，$|x-2|<1$ 是以点 $x_0=2$ 为中心，以 1 为半径的邻域，即开区间 $(1, 3)$．

二、函数的概念

函数用来研究变量之间的关系．

在研究某些自然现象或对一些实际问题的分析中，往往出现多个变量，这些变量有的是彼此孤立的，没有任何关系；有的是相互影响、有依赖关系的，即一个量或一些量的变化会使另一个量发生变化，这些变量之间存在着某种关系，有的关系是不确定性的，比如收入与消费之间的关系是不确定性的，有的关系是确定性的，比如，价格为常数时，销售收入与销售量之间的关系就是确定性的．

如果变量之间的影响是确定的，并且是按照某一个规则的，那么我们说这些变量之间存在着函数关系．

例如，某商品的价格为 4，假定销量为 x，销售收入为 y，则这两个变量有一个等式关系：

$$y=4x$$

当 x 取一个具体的数值 x_0 时，y 就有一个确定的值 $y_0=4x_0$ 与 x_0 对应，这是一种确定性的关系，y 依赖于 x，我们说 y 是 x 的函数．

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 为非空的实数集合，若变量 x 在 D 内任取一个数值 x_0，变量 y 按照某一确定的法则 f，总有唯一确定的数值 y_0 与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数．记作

$$y=f(x)$$

其中，x 称为自变量；y 称为因变量或函数．

f 表示 y 与 x 的对应规则，是函数的符号．

函数符号也可以用其他字母来表示，如 $y=y(x)$、$y=g(x)$、$y=h(x)$ 等．

集合 D 是使得函数有意义的自变量 x 的取值范围，称为函数的定义域，记作 $D(f)$，相应的 y 值的集合称为函数的值域．

当自变量 x 在定义域 $D(f)$ 内取一个确定值 x_0 时，因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$ 可以得到对应的值 y_0，称之为函数值，记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$．

函数的定义明确了确定函数关系的三个要素：定义域、对应法则和值域．

由于值域是由定义域和对应法则决定的，因此函数的要素实际上只有两个：定义域和对应法则，简称为函数的两个要素．

当函数的两个要素完全确定，即一个函数的定义域和对应规则确定后，就确定了函数关系，同时，也说明了函数关系不受变量符号的影响，即同一个函数关系可以用不同的变量表示．

$y=\ln x$ 与 $s=\ln t$ 是同一个函数，$y=x(\sin^2 x+\cos^2 x)$ 与 $y=x$ 也是同一函数，这是因为

它们的定义域和对应规则完全一样.

$y=\frac{x^2}{x}$与$y=x$是两个不同的函数,因为它们的定义域不同,$y=\frac{x^2}{x}$的定义域为$\{x|x\neq 0\}$,$y=x$的定义域为$(-\infty,\infty)$.

$y=\sqrt{x^2}$与$y=x$的定义域相同,定义域都为$(-\infty,\infty)$,但对应规则不同,例如,$x=-1$时,函数$y=\sqrt{x^2}$的值为$y=1$,而函数$y=x$的值为$y=-1$,所以$y=\sqrt{x^2}$和$y=x$是两个不同的函数.

由此可知,两个函数是否相同,只要看它们的定义域和对应规则是否都相同.

例1 已知$f(x)=\frac{1-x}{1+2x}$,求$f(2)$,$f(-x)$,$f(e^{x^2})$.

解 $f(2)=\frac{1-2}{1+2\times 2}=-\frac{1}{5}$,

$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+2(-x)}=\frac{1+x}{1-2x}$,

$f(e^{x^2})=\frac{1-e^{x^2}}{1+2e^{x^2}}$.

例2 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\frac{x+4}{x^2+4x}$;

(2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(3) $f(x)=x^2-\lg(2x-1)$;

(4) $f(x)=\lg(x+1)+\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

解 (1) 要使$f(x)=\frac{x+4}{x^2+4x}$有意义,则分母不能为零.

所以$x^2+4x\neq 0$,解得,$x\neq -4$且$x\neq 0$,所以,定义域为

$$(-\infty,\ -4)\cup(-4,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$$

(2) 要使$f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$有意义,则必须$4-x^2\geqslant 0$,且$4-x^2\neq 0$,解得,$-2<x<2$,所以,定义域为$(-2,2)$.

(3) 要使$f(x)=x^2-\lg(2x-1)$有意义,必须$2x-1>0$,即$x>\frac{1}{2}$,定义域为$\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$.

(4) 要使$f(x)=\lg(x+1)+\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$有意义,函数的第一项中要求$x+1>0$,即$x>-1$,

同时，要求第二项中的 $1-2x>0$，即 $x<\dfrac{1}{2}$，定义域为 $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$.

确定函数的定义域，除上述方法之外，对于根据实际问题建立的函数关系式，变量本身有着它的实际意义，因而，要从函数解析式结构中确定自变量的取值范围，同时还要根据问题的实际意义分析自变量的取值范围.

例如，某商品的销售量记为 Q，价格定为 10，则收入 R 是销售量 Q 的函数 $R=10Q$，显然，若不考虑 Q、R 的实际意义，只考虑函数解析式本身，则定义域为 $Q\in(-\infty,\ +\infty)$，若同时考虑 Q、R 的实际意义，销售量 Q 不可能小于零，定义域应为 $[0,\ +\infty)$.

函数的表示法有解析法（公式法）、表格法、图示法.

对于这三种方法，各举一个例子加以说明.

例 3　$y=\ln(1+x)+\cos x$.

这是一个用数学表达式表示的函数，因变量为 y，自变量为 x，y 为 x 的函数，定义域为 $(-1,\ +\infty)$.

例 4　某商品价格 P（单位：元）与需求量 Q（单位：台）的关系如表 1-1 所示.

表 1-1

价格 P	2	3	3.5	4	5.1	6	7	8.3
需求量 Q	73	71	71	60	50	39	25	20

这是一个用表格表示的函数，Q 是 P 的函数，需求量 Q 随价格 P 的变化而变化. 自变量 P 的所有取值为 2，3，3.5，4，5.1，6，7，8.3，从表格中可以查到 Q 的一个对应的值. 它的定义域为

$$\{2,\ 3,\ 3.5,\ 4,\ 5.1,\ 6,\ 7,\ 8.3\}$$

例 5　某河流的水位 y 与某日 24 小时内随时间 t 变化的曲线如图 1-1 所示.

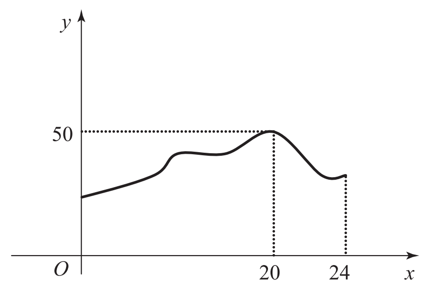


图 1-1

这是一个在直角坐标系下，用图形表示的函数.

水位 y 与时间 x 的函数关系直接表示为曲线. 当 x 取 0 到 24 中任意一个数时，通过图 1-1 的曲线都能找到一个确定的 y 值与它对应. 例如 $x=20$ 时，$y=50$.

函数的三种表示方法各有特点.

解析法形式简明，便于作理论研究与数值计算，但是不如图示法直观.

表格法的表中有对应数据，可直接查用（如三角函数表、对数函数表等），但是不便作理论研究.

图示法直观，并可从图形看出函数的变化情况，但是不便作理论研究.

三、隐函数与分段函数

（一）隐函数

函数关系其实就是变量之间的等式关系.

我们在前面提到的函数 $y=f(x)$，因变量和自变量是明确的，因变量在等式的左边，自变量在等式的右边，因变量用自变量来表示，我们称这类函数为显函数．

例如，$y=2+x^3$、$y=\cos x$ 等．

但是，有些函数的因变量与自变量的关系只是用一个方程 $F(x, y)=0$ 来表示，哪一个是因变量、哪一个是自变量并不明显．

例如，$y-x^2=\cos xy$，$xy+e^{x+y}-1=0$ 等，都是表示两个变量 x，y 的函数关系，但不明确哪一个是自变量、哪一个是因变量．

两个变量 x，y 的函数关系隐含在方程 $F(x, y)=0$ 中，这种函数关系称为隐函数．

一些隐函数可以通过变换化为显函数．例如，隐函数 $y-2x=0$ 可以转换为显函数 $y=2x$ 或 $x=\dfrac{y}{2}$.

但是，也有一些隐函数化为显函数十分困难，甚至不可能化为显函数．

例如，隐函数 $y-x^2=\cos xy$ 是很难转化为显函数的．

（二）分段函数

先看一个例子：

某电信公司的套餐为每月 60 元，收费标准：免费通话 200 分钟，200 分钟后每分钟收费 0.25 元，则月电话费 y（元）和通话时间 x（分钟）的关系为

$$y=\begin{cases}60, & x\leqslant 200\\ 60+0.25(x-200), & x>200\end{cases}$$

再如，绝对值函数可以表示成

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

在定义域内，函数的数学表达式不唯一．即对于自变量在不同范围内的取值，函数表达式不同，这样的函数称为分段函数．

分段函数是实际问题研究中常见的函数．

注意：分段函数是由若干个数学表达式表示的函数，它是一个函数，而不是几个函数，对于自变量 x 在不同范围内的取值，函数 y 只是具体的表达式不同而已．

分段函数的定义域是各个数学表达式中自变量的取值集合的并集．

例 6　已知函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{x}, & -1\leqslant x<0\\ x, & 0\leqslant x<3\\ \dfrac{x^2-1}{x+1}, & x\geqslant 3\end{cases}$$

求：(1) 函数 $f(x)$ 的定义域；(2) $f(-1)$、$f(0)$、$f(1)$、$f(4)$.

解　(1) 函数 $f(x)$ 的定义域就是各个区间的并集，即 $[-1, +\infty)$,

(2) 因为 $x=-1\in[-1, 0)$，所以 $f(-1)=\dfrac{e^{-1}}{-1}=-e^{-1}$；

$x=0\in[0,3)$，$f(0)=0$；

$x=1\in[0,3)$，$f(1)=1$；

$x=4\in[3,+\infty)$，所以 $f(4)=\dfrac{4^2-1}{4+1}=3.$

上例中，尽管 $x=-1$ 时，$\dfrac{x^2-1}{x+1}$没有意义，但是，只有当 $x\geqslant 3$ 时，才有函数表达式 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$，而 $x=-1$ 时，函数为 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$，它是有意义的．

四、反函数

隐函数中的两个变量 x、y，并没有明确哪一个是因变量，在研究过程中，将哪一个变量看成因变量，需要取决于研究和解决问题的目的及方法，可以把 y 表达为 x 的函数，也可以反过来把 x 表达为 y 的函数，这就是反函数．

在函数 $y=f(x)$ 中，x 是自变量，y 是因变量，x 可以在定义域内自由独立取值，y 的取值随 x 的取值而定，x、y 有一个依赖关系，y 的变化依赖于 x.

实际上，x 的变化有时也依赖于 y.

先看一个例子．

设某种商品的销售收入为 y，销售量为 x，单价为 10，则收入 y 是销售量 x 的函数

$$y=10x$$

其中，x 是自变量；y 是因变量，y 是 x 的函数．

如果把 $y=10x$ 看作一个等式，也可以写成

$$x=\frac{y}{10}$$

这时，$x=\dfrac{y}{10}$作为一个函数，y 是自变量；x 变成了 y 的函数．

上述两个式子从数学等式关系看，只是两种具体不同的写法，形式不同而已．

但从函数的意义上来看，由于对应 f 法则发生了改变（依赖关系相反），因此它们是两个不同的函数．

我们称函数 $x=\dfrac{y}{10}$为函数 $y=10x$ 的反函数．

事实上，$y=10x$ 与 $x=\dfrac{y}{10}$互为反函数．

我们给出反函数的定义：

定义 1.2　设 $y=f(x)$ 的定义域为 D、值域为 $\mathbf{R}$，如果对于 $\mathbf{R}$ 中 y 的每一个值 y_0，在 D 中都有唯一确定的，且满足 $y=f(x)$ 的 x 值 x_0 与之对应，即 $f(x_0)=y_0$，我们称这个函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y)$$

这时 y 为自变量，x 为因变量，x 是 y 的函数．

由定义知，$y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数．

函数 $y=f(x)$ 中，x 为自变量，y 为因变量，定义域为 D，值域为 $\mathbf{R}$.

函数 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 为自变量，x 为因变量，定义域是 $\mathbf{R}$，值域为 D.

应该指出，并不是所有的函数都存在反函数.

比如，$y=x^2$ 就不存在反函数，因为 $y=1$ 时，有两个 x 值与之对应，这两个 x 值分别是 -1，1，不符合函数的定义.

一个函数如果存在反函数，那么它必须是一一对应的关系.

显然，单调函数一定存在反函数.

因为确定一个函数的两个要素为定义域和对应规则，至于用什么符号表示自变量、因变量都不影响函数关系，因而按照通常的习惯，我们仍用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$.

在同一坐标平面内，函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称. 利用这一点，由函数 $y=f(x)$ 的图形就很容易知道它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形.

如果 $y=f(x)$ 的反函数存在，只需由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$，即可得到它的反函数.

例 7　求 $y=2x-1$ 的反函数.

解　由 $y=2x-1$ 得到 $x=\dfrac{y+1}{2}$.

因此，$y=\dfrac{x+1}{2}$是 $y=2x-1$ 的反函数.

函数 $y=2x-1$ 与其反函数 $y=\dfrac{x+1}{2}$ 的图形，如图 1－2 所示. 它们关于直线 $y=x$ 对称.

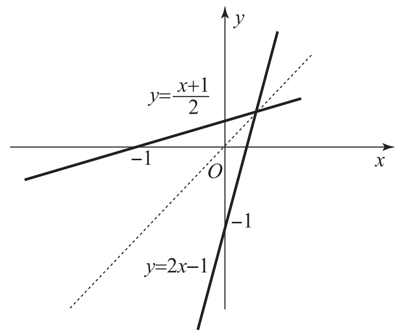


图 1－2

例 8　求下列函数的反函数：

（1）$y=x^2-1$，$x\in(0,+\infty)$；　　（2）$y=x^2-1$，$x\in(-\infty,0)$.

分析：由 $y=x^2-1$ 解得，$x=\pm\sqrt{y+1}$，由于因变量的值不唯一，因此它不是反函数.

解　（1）在 $x\in(0,+\infty)$ 时，由 $y=x^2-1$ 解得，$x=\sqrt{y+1}$，所以 $y=x^2-1$ 的反函数为 $x=\sqrt{y+1}$，即 $y=\sqrt{x+1}$.

（2）在 $x\in(-\infty,0)$ 时，由 $y=x^2-1$ 解得，$x=-\sqrt{y+1}$，所以 $y=x^2-1$ 的反函数为 $x=-\sqrt{y+1}$，即 $y=-\sqrt{x+1}$.

第二节　函数的几种特性

一个函数 $y=f(x)$ 可以在它的定义域内，根据对应法则求其函数值. 但是，为了深入了解函数的变化规律，我们还需要分析函数的各种特性.

一、函数的有界性

定义 1.3　设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在两个常数 M、m（$M>$

m），对于所有的 $x\in(a, b)$，恒有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界．

在 (a, b) 内有界的函数 $f(x)$ 称为有界函数，否则称为无界函数．

例如，$y=\sin x+1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的，因为在 $(-\infty, +\infty)$ 内对任意的 x 都有 $0\leqslant\sin x\leqslant1$.

在定义域内有界的函数，常见的有 $y=\sin x$、$y=\cos x$.

注意：有界性是相对于具体区间而言的．

例如，$y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1, 4)$ 内是有界的，$\dfrac{1}{4}\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant1$；但在区间 $(0, 1)$ 内则无界，$1\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant+\infty$.

有界变量：设 y 是一个变量，如果存在两个常数 a，b $(a<b)$，在 y 的整个变化过程中，总有 $a\leqslant y\leqslant b$，则称变量 y 为有界变量．

比如，一定时期内某商品的价格是有界变量．

二、函数的奇偶性

定义 1.4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，对任意的 $x\in D$，如果

(1) $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；

(2) $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数．

如果对任意的 $x\in D$，(1)、(2) 均不成立，则称 $f(x)$ 为非奇非偶函数．

例如，$f(x)=x^2\sin x$ 是奇函数，$f(x)=x^3\sin x$ 为偶函数，$f(x)=x^3\sin x+1$ 为非奇非偶函数．

偶函数的图形关于 y 轴对称．

这是因为 $f(-x)=f(x)$，所以如果点 $A(x, f(x))$ 是曲线上的一个点，则它关于 y 轴的对称点 $B(-x, f(x))$ 也是曲线上的点，如图 1－3 所示．

奇函数的图形关于原点对称．

这是因为 $f(-x)=-f(x)$，所以如果点 $A(x, f(x))$ 是曲线上的一个点，则它关于原点的对称点 $B(-x, -f(x))$ 也是曲线上的点，如图 1－4 所示．

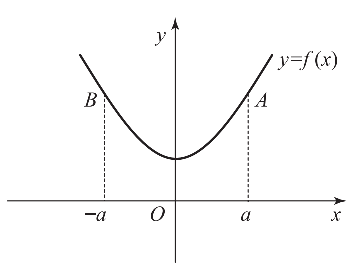


图 1－3

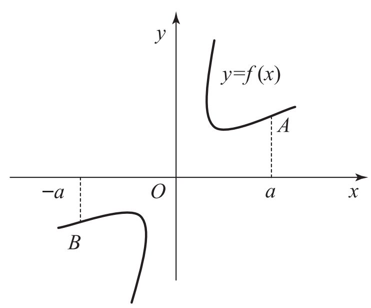


图 1－4

例 1　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^4-3x^2$；

（2）$f(x)=e^{-x}+e^{x}$；

（3）$f(x)=x^{3}+\sin x$；

（4）$f(x)=x-3x^{2}$.

解　（1）$f(x)=x^{4}-3x^{2}$ 的定义域为 $D=(-\infty,\ +\infty)$，在定义域 D 内，因为

$$f(-x)=(-x)^{4}-3(-x)^{2}=x^{4}-3x^{2}=f(x)$$

所以 $f(x)=x^{4}-3x^{2}$ 是偶函数.

（2）在定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$ 内，因为

$$f(-x)=e^{-(-x)}+e^{-x}=e^{x}+e^{-x}=f(x)$$

所以 $f(x)=e^{-x}+e^{x}$ 是偶函数.

（3）在定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$ 内，因为

$$f(-x)=(-x)^{3}+\sin(-x)=-x^{3}-\sin x=-f(x)$$

所以 $f(x)=x^{3}+\sin x$ 为奇函数.

（4）在定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$ 内，因为

$$f(-x)=-x-3x^{2}$$

$f(-x)=-x-3x^{2}\neq f(x)$，$f(-x)=-x-3x^{2}\neq -f(x)$，所以 $f(x)=x-3x^{2}$ 为非奇非偶函数.

三、函数的单调性

定义 1.5　设函数 $y=f(x)$ 在区间（a，b）内有定义，对于（a，b）内的任意两点 x_1、x_2，如果

（1）当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在（a，b）内是单调增加的；

（2）当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在（a，b）内是单调减少的.

当 $x_1<x_2$ 时，上述（1）、（2）均不成立，则 $f(x)$ 不是单调函数.

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数，相应的区间称为单调增加（减少）区间.

单调增加的函数随自变量 x 的增加而增加，其图形沿 x 轴正向逐渐上升，如图 1－5 所示.

单调减少的函数随自变量 x 的增加而减少，其图形沿 x 轴正向逐渐下降，如图 1－6 所示.

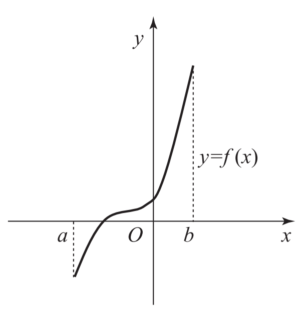


图 1－5

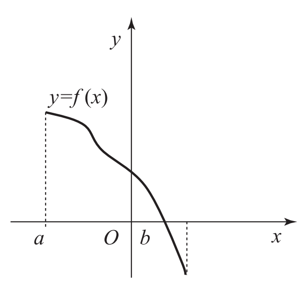


图 1－6

可以分别用符号“↗”和“↘”表示单调增加和单调减少．

例 2　讨论函数 $y=e^x-1$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的单调性．

解　在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内任意选取两点 x_1、x_2，设 $x_1<x_2$，因为

$$f(x_1)-f(x_2)=(e^{x_1}-1)-(e^{x_2}-1)=e^{x_1}-e^{x_2}<0$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $y=e^x-1$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加．

四、函数的周期性

定义 1.6　对于函数 $y=f(x)$，如果存在正的常数 T，使得 $f(x)=f(x+T)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，满足这个等式的最小正数称为函数的周期．

常见的周期函数有三角函数．

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 是周期函数，周期为 2π，因为 $\sin(x+2\pi)=\sin x$.

同样，其他的三角函数也是周期函数．

第三节　初等函数

基本初等函数包括常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数．它们是微积分中所研究对象的基础．

基本初等函数是最常见的函数．

一、基本初等函数

（一）常数函数

$y=C$（C 为常数）．

定义域是 $(-\infty,+\infty)$，无论 x 取何值，都有 $y=C$，所以，它的图形是过点 $(0,C)$ 且平行于 x 轴的一条直线，如图 1－7 所示．

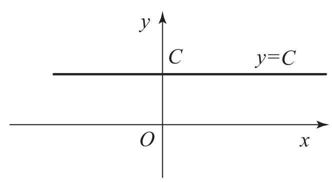


图 1－7

（二）幂函数

$y=x^\alpha$（$\alpha\neq0$ 为实数）．

由于当 α 取不同值时，幂函数有着不同的定义域，因而为了便于比较，我们只讨论 $x\geqslant0$ 的情况，而 $x<0$ 时的图形可根据函数的奇偶性来确定．

当 $\alpha>0$ 时，函数的图形通过原点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加且无界．

例如，$f(x)=x^2$，如图 1－8 所示．

当 $\alpha<0$ 时，幂函数 $y=x^\alpha$ 中 $x\neq0$，即图形不过原点，但仍然通过点 $(1,1)$，在 $(0,+\infty)$ 内单调减少．

例如，$f(x)=\dfrac{1}{x}$，如图 1－9 所示．