iPraclass

高等职业教育 iPraclass 新形态教材

职业基础数学（下）

● 主 编　李巍巍　王宝芹　范晓辉

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等职业教育 iPraclass 新形态教材

职业基础数学（下）

主　编　李毳毳　王宝芹　范晓辉
副主编　徐惠莲　杨海波　张　智

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书根据高等职业教育的教育理念，以职业能力为主线构建课程体系，突出职业教育的特点，由实际案例引入教学内容，激发学生学习兴趣，注重对学生数学素养、职业能力和应用能力的培养. 特别在每个模块里编写了用数学软件MATLAB解决数学问题的内容，以突破高职院校学生数学计算困难的瓶颈.

全书分为上、下两册，共十个模块，上册内容包括：极限与连续、导数与微分、导数的应用、一元函数积分学及多元函数微积分学；下册内容包括：常微分方程、线性代数、概率论与数理统计、线性规划、数学建模概述. 在每一模块中均编有应用与实践内容，其中包括高等数学在物理、机械、经济、电工电子、信息技术等方面的应用和数学软件MATLAB的使用. 每节配有习题，并将习题答案附于书后. 本书可供高职院校工科类和经济管理类专业的学生作为教材或学习参考书使用.

图书在版编目（CIP）数据

职业基础数学. 下 / 李毳毳，王宝芹，范晓辉主编 .—北京：北京理工大学出版社，2020.1

ISBN 978－7－5682－8065－5

Ⅰ.①职…　Ⅱ.①李…　②王…　③范…　Ⅲ.①高等数学－高等职业教育－教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2020）第 002781 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / （010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http：//www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市华骏印务包装有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 10.5
字　　数 / 250 千字
版　　次 / 2020 年 1 月第 1 版　2020 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 / 29.80 元

责任编辑 / 江　立
文案编辑 / 江　立
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 施胜娟

前　言

高等数学作为一门重要的基础课程,除了具有基础工具的作用之外,还具有对学生进行思维训练和能力培养等素质教育的功能.随着高职教学改革的深入,课程建设也取得了丰硕的成果.高等数学课程被评选为学院精品课程和吉林省高等学校优秀课程,教材建设成功立项为学院“十三五”综合教学改革项目.为教材的编写提供了良好的契机.

为了适应高职教育人才培养目标的要求,满足各专业学生学习的需要,编者进行了多方面的专业需求调研,结合学院人才培养方案对本课程的要求,本着“实用、必需、够用”的原则,将多年来从事高职高专数学教学的经验汇集整理,编写了本套教材.

本书在教学内容的选取上,站在企业用人的角度.紧密联系专业知识,强化数学知识的应用性,旨在培养学生的职业能力和可持续发展能力,提高学生运用数学知识分析和解决实际问题的能力,突出了基础和专业的深度融合.

本套教材在编写思想、体例设计和内容安排上的特点如下:

(1)站在企业用人的角度,针对高职学生的特点及学生面对的职业岗位群,以日常生活和生产实践的典型案例为切入点,按照“实践引例—理论教学—应用实践”的思路编写,实现了从感性认识上升到理性认识、再从理性认识回到实践的飞跃,真正激发学生的学习兴趣.使学生充分感受到数学的应用价值,为后续的专业学习打下良好的基础.

(2)分模块、分层次编排.可供理工类和经管类专业教师根据学生的实际需要,选取若干模块组织教学.突出了教材的实用性、科学性、针对性,在保证科学性的基础上注意讲清概念,减少理论证明.注重学生基本运算能力、分析问题及解决问题能力的培养.

(3)每个模块中都有“应用与实践”一节,将具有明显的应用背景或者较强趣味性、探索性的数学知识融入其中.在每个模块中,介绍数学软件 MALAB 的算法和语句,建立数学模型、设计解法,使学生真正体会到数学的奥妙和数学的实用性和趣味性,达到培养学生综合素质的目的.

(4)为使学生能对数学知识进行有序的梳理,每个模块前有学习目标,然后有小结,而且还配备了相应的习题,旨在使学生先了解知识脉络,然后通过习题检查学习效果,总结方法和规律.

(5)增加了数学建模的内容,让学生了解数学建模的思想方法,注重培养学生的数学技能及应用能力.

(6)每个模块后增编了阅读材料.介绍相关的数学知识概况及数学家的故事.把数学文化

融入教学,促进科学素质和人文素质的有机融合,培养学生的数学素养和思想文化素养.

本套教材由上册(模块一～五)和下册(模块六～十)组成.上册主编徐惠莲、杨海波、张智,副主编李毳毳、王宝芹、范晓辉;下册主编李毳毳、王宝芹、范晓辉,副主编徐惠莲、杨海波、张智.各模块编写人员有:徐惠莲(模块一、三、五);张智(模块二);杨海波(模块四、六);王宝芹(模块六、七);范晓辉(模块三、八);李毳毳(模块九、十);齐艳春、温艳红参加了上册各模块的习题、复习题答案核实校对及附表部分查找、整理工作;魏星、赵子明参加了下册各模块的习题、复习题答案的核实校对及附表部分查找整理工作.本套教材由职业基础部梁英武部长主审、徐惠莲统稿.高等数学教研室全体教师精诚团结、群策群力,高质量地完成了这套教材.

在本书编写中我们借鉴了国内许多专家学者的观点、专著及网站资料,同时得到了长春职业技术学院教学院长王军、教务处长李明革的精心指导和大力支持,在此一并表示衷心的感谢!

编者意在奉献给学生一本适用并具有特色的教材,但由于水平有限.难免有错误和不妥之处,恳请广大同仁及学生给予批评指正.

目　录

模块六　常微分方程 …… (001)

第一节　微分方程的基本概念 …… (001)

第二节　一阶微分方程 …… (004)

第三节　高阶微分方程 …… (010)

※ 第四节　应用与实践六 …… (014)

小结 …… (018)

复习题六 …… (019)

阅读材料 …… (020)

模块七　线性代数 …… (021)

第一节　行列式的概念 …… (021)

第二节　行列式的性质及其运算 …… (026)

第三节　矩阵的概念及其运算 …… (031)

第四节　逆矩阵与初等变换 …… (036)

第五节　一般线性方程组的求解 …… (044)

※ 第六节　应用与实践七 …… (049)

小结 …… (053)

复习题七 …… (055)

阅读材料 …… (057)

模块八　概率论与数理统计 …… (059)

第一节　离散型随机变量及其分布 …… (060)

第二节　连续型随机变量的分布密度 …… (064)

第三节　随机变量的数字特征 …… (070)

第四节　统计量及其分布 …… (076)

第五节　参数估计 …… (080)

第六节　假设检验 …… (085)

※ 第七节　应用与实践八 …… (088)

小结 …… (092)

复习题八 …… (093)

阅读材料…………（094）

模块九　线性规划…………（097）

第一节　线性规划问题的数学模型…………（097）

第二节　线性规划模型的解法…………（101）

第三节　线性规划的对偶理论…………（107）

第四节　灵敏度分析…………（111）

※ 第五节　应用与实践九…………（114）

小结…………（118）

复习题九…………（119）

阅读材料…………（120）

模块十　数学建模概述…………（122）

第一节　数学模型简介…………（122）

第二节　数学建模…………（125）

第三节　数学建模与能力的培养…………（128）

第四节　初等模型实例…………（134）

※ 第五节　应用与实践十…………（136）

习题参考答案…………（143）

附表 1　标准正态分布函数值表…………（155）

附表 2　χ^2 分布临界值表…………（157）

附表 3　t 分布临界表…………（159）

参考文献…………（160）

模块六　常微分方程

【学习目标】

☆ 理解微分方程的基本概念.
☆ 掌握可分离变量的微分方程、齐次微分方程、一阶线性微分方程和可降阶的高阶微分方程的解法. 了解二阶线性齐次(非齐次)微分方程的解的结构.
☆ 掌握应用微分方程解决具体问题的步骤,会用 MATLAB 解微分方程.

在广泛的科学领域内,人们在探求物质世界运动规律的过程中,经常依据问题提供的条件寻找出变量间的函数关系,然而在许多实际问题中,往往不能直接找出所研究的函数关系,但有时却可以列出含有自变量、未知函数及其导数或微分的关系式,这种关系式就是我们所要研究的微分方程. 微分方程有着深刻而生动的实际背景,是现代科学技术中分析问题和解决问题的一个强有力的工具.

【引例】土地沙化问题

建设绿地、防止沙漠化的环保意识已成为人们的共识. 现已查明,有一块土地有一部分正在沙化. 并且沙化的数量正在增加,其增加的速度与剩下的绿地数量成正比. 由统计得知,每年沙化土地的增长率是绿地的$\frac{1}{10}$. 现有土地 10 万亩,试确定沙化土地与时间的函数关系. 如果 x 为时刻 t 的沙化土地数量,则沙化土地的增长率为$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,绿地的数量为 $10-x$,由此得到$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{10}(10-x)$. 这个方程就是微分方程,要得到函数关系就得通过微分方程来求解. 本模块主要介绍微分方程的概念及几种常见类型微分方程的解法和简单应用.

第一节　微分方程的基本概念

一、微分方程实例

我们先通过几个实例来说明微分方程的基本概念.

例 1　一条曲线经过点(1,2),且在该曲线上任意点 $M(x,y)$处的切线斜率为 $2x$,求该曲线方程.

解　设所求的曲线方程为 $y=f(x)$,由导数的几何意义,有关系式

$$F'(x)=2x,即\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x. \tag{1}$$

于是得到积分曲线族为

$$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C, \tag{2}$$

又因为曲线过(1,2)点,所以将(1,2)点代入上式,得

$$2 = 1^2 + C.$$

从而 $C=1$，所以所求曲线方程是

$$y = x^2 + 1. \tag{3}$$

当 C 取任意值时，不难做出(2)式的图形(图 6—1).

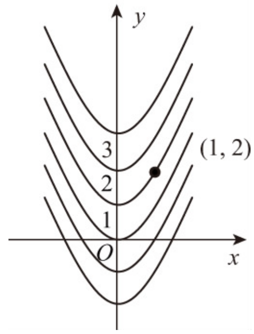

图 6—1

例 2 一物体由静止开始从高处自由下落，已知物体下落时的重力加速度是 g，求物体下落的位置与时间之间的函数关系.

解 由题意，取物体开始下落处为坐标原点，s 轴垂直向下(如图6—2 所示)，因为加速度是位置函数 $s(t)$ 对时间 t 的二阶导数，根据题意得到 $s(t)$ 与时间 t 之间的关系所满足的方程为

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g, \tag{4}$$

且 $s(t)$ 还应满足

$$s(0) = 0, s'(0) = 0. \tag{5}$$

对上式两边积分一次得到

$$\frac{ds}{dt} = gt + c_1, \tag{6}$$

再积分一次，得到

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2, \tag{7}$$

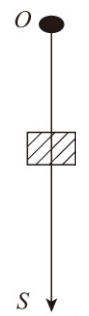

图 6—2

其中 c_1，c_2 是任意常数. 将条件(5)式代入(6)式和(7)式，得到 $c_1=0$，$c_2=0$，因此自由下落距离 s 与时间 t 的关系为

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

上面两个实例，虽然实际意义不相同，但是解决问题的方法都是归结为先建立一个含有未知数的导数(或微分)的关系式，然后通过此关系式，求出满足所给附加条件的未知函数. (1)式和(4)式都含有未知函数的导数(或微分)，这种方程就称为微分方程. 下面我们给出微分方程的一些基本概念.

二、微分方程的概念

定义 1 含有未知函数的导数或微分的方程叫做**微分方程**.

未知函数是一元函数的微分方程叫做**常微分方程**，未知函数是多元函数的微分方程叫做**偏微分方程**. 如前面实例 1 中的(1)式和实例中(4)式都是常微分方程. 本模块我们只介绍常微分方程的一些初步知识及简单应用，有时就简称为微分方程(或方程).

在一个微分方程中，未知函数的导数的最高阶数，叫做**微分方程的阶**.

例如，$\frac{dy}{dx}=2x$，$y'=2x+1$ 是一阶微分方程，$y''+2y'+y=0$ 是二阶微分方程.

二阶或二阶以上的微分方程称为**高阶微分方程**.

定义 2 如果把某个函数代入微分方程中，能使该微分方程成为恒等式，那么称这个函数为该**微分方程的解**. 求微分方程解的过程叫做**解微分方程**.

例如，例 1 中的 $y = \int 2x dx = x^2 + C$ 和 $y = x^2 + 1$ 都是微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 的解；例 2 中

$s=\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2$ 和 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 都是$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=g$ 的解.

从上述例子可以看出，微分方程的解中可以含有任意常数，如果微分方程的解中所含有相互独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相等，则称这样的解为微分方程的**通解**. 这里所说的任意常数相互独立是指不能通过合并而减少常数的个数.

例如，例 1 中的 $y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$ 是$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$ 的通解，例 2 中的 $s=\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2$ 是$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=g$ 的通解.

如果给方程通解中的所有任意常数一确定的值就得到微分方程的特解，即不含任意常数的解叫做微分方程的**特解**.

例如，例 1 中的 $y=x^2+1$ 是$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$ 的一个特解，例 2 中的 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 是$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=g$ 的一个特解.

用于确定通解中任意常数的条件，称为**初始条件**. 初始条件的个数与微分方程的阶数相同.

例如，例 1 中的 $2=1^2+C$ 就是初始条件，例 2 中的 $s(0)=0, s'(0)=0$ 是初始条件.

求微分方程满足初始条件的解问题称为**初值问题**.

微分方程解的图形称为此方程的**积分曲线**. 由于通解中含有任意常数，所以微分方程的通解的图像是具有某种共同性质的一族曲线，称为微分方程的**积分曲线族**. 其特解的图形是根据初始条件而确定的积分曲线族中的某一条**特定的积分曲线**.

例 3　试写出下列各微分方程的阶.

(1)$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-xy=0$；(2)$(3x-4y)\mathrm{d}y+(2x-3y)\mathrm{d}y=0$；

(3)$y''+2y'+y=0$；(4)$y^{(4)}+y^6+x^8=0$.

解　(1)一阶微分方程；(2)一阶微分方程；

(3)二阶微分方程；(4)四阶微分方程.

例 4　验证 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$ 是微分方程 $y''+4y=0$ 的通解，并求满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=-1$ 的特解.

解　因为　$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$，所以

$$y'=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x,$$
$$y''=-4C_1\cos 2x-4C_2\sin 2x.$$

将上面各式代入原方程 $y''+4y=0$ 的左端，得

$$-4C_1\cos 2x-4C_2\sin 2x+4C_1\cos 2x+4C_2\sin 2x=0.$$

故已给函数满足方程 $y''+4y=0$，是它的解. 由于有两个任意常数 C_1, C_2，因此这个解又是微分方程的通解.

将初始条件代入上面两式中，求得

$$C_1=1, C_2=-\frac{1}{2}.$$

所以 $y''+4y=0$ 满足初始条件的特解是

$$y=\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x.$$

习题 6－1

1. 指出下列各微分方程的阶数.

(1) $y''-3y'+2y=x^2$；　　(2) $x^2\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}x=0$；

(3) $y'''+2y'+y=0$；　　(4) $y^3\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x}+y^4=0$；

(5) $x^2y''-xy'+y=0$；　　(6) $y''y'+x^3y'+y=0$；

(7) $y^{(5)}+\sin(x+y)=y'+3y$；　　(8) $(7x-6y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$.

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解.

(1) $xy'-y\ln y=0, y=\mathrm{e}^x$；

(2) $y''-4y'+4y=0, y=x\mathrm{e}^{2x}$；

(3) $y''=6x+2, y=x^3+x^2$；

(4) $y''+y=0, y=2\sin x+\cos x$.

3. 指出下列各题中的函数是否为所给方程的解. 若是解，指出是通解还是特解. 其中 C_1，C_2，C_3 为任意的常数.

(1) $y''-2y'+y=0, y=x^2\mathrm{e}^x$；

(2) $(x+y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0, y=C^2-x^2$；

(3) $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0, y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}$；

(4) $y''+3y'+2y=x\mathrm{e}^{-2x}, y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}-\left(\dfrac{1}{2}x^2+x\right)\mathrm{e}^{-2x}$.

4. 求微分方程 $y'''=6x+1$ 的通解.

5. 验证 $y=Cx+\dfrac{1}{C}$ 是微分方程 $x\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1=0$ 的通解（其中任意常数 $C\neq0$），并求满足初始条件 $y|_{x=0}=2$ 的特解.

第二节　一阶微分方程

本节我们讨论一阶微分方程的几种类型及其解法.

一阶微分方程的一般形式是

$$F(x,y,y')=0,$$

或解出 y' 的形式：$y'=f(x,y)$.

一、可分离变量的微分方程与齐次方程

1. 可分离变量的微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$$

的一阶微分方程，叫做**可分离变量的微分方程**.

我们采用积分的方法来求解可分离变量微分方程，求解步骤如下：

(1) 分离变量：变方程为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$　的形式（$g(y)\neq0$）；

（2）两端积分：$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x$；

（3）求得通解：$G(y)=F(x)+c$.

其中 $G(y)$ 和 $F(x)$ 分别为 $\frac{1}{g(y)}$ 和 $f(x)$ 的某一个原函数.

例 1　求微分方程 $y'=y$ 的通解.

解　分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\mathrm{d}x,$$

两端积分

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y}=\int \mathrm{d}x,$$

得

$$\ln|y|=x+C_1,$$

所以

$$y=\pm e^{x+C_1}=\pm e^{C_1}e^x.$$

因为 $\pm e^{C_1}$ 仍是任意常数，因此设 $C=\pm e^{C_1}$，得方程的通解为

$$y=Ce^x.$$

例 2　求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}$ 的通解.

解　分离变量得 $y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x$

两端积分

$$\int y\mathrm{d}y=\int -x\mathrm{d}x,$$

得

$$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+C_1,$$

得方程的通解

$$x^2+y^2=C.$$

例 3　求微分方程　$xy\mathrm{d}x-(1+x^2)\mathrm{d}y=0$ 通解.

解　原方程化为

$$(1+x^2)\mathrm{d}y=xy\mathrm{d}x,$$

分离变量得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

两端积分

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

得

$$\ln|y|=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\ln C_1,$$

$$y=\pm C_1\sqrt{1+x^2}.$$

因 $\pm C_1$ 仍是任意常数，把它记作 C，便得方程的通解

$$y=C\sqrt{1+x^2}.$$

例 4　求微分方程　$\cos x\sin y\mathrm{d}y=\cos y\sin x\mathrm{d}x$　满足 $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$ 的特解.

解　分离变量得

$$\frac{\sin y}{\cos y}\mathrm{d}y=\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x,$$

两端积分

$$\int \frac{\sin y}{\cos y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x,$$

得

$$\cos y = C\cos x.$$

将 $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$ 代入上式，得 $C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，于是所求的微分方程的特解为

$$\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x.$$

2. 齐次方程

如果一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$$

可以化成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

的形式，则称这个方程为齐次方程.

此类方程的求解分三步进行.

第一步：将原方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的形式；

第二步：作变量替换

$$u = \frac{y}{x},$$

以 u 为新的未知函数，就可化为可分离变量的方程.

因为 $u=\frac{y}{x}$，即 $y=xu$，求导数得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

代入方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 中得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi(u) - u,$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u} = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两端积分得

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

第三步：回代. 求出积分后，将 u 还原成 $\frac{y}{x}$ 就得到所给方程的通解.

例 5 求解微分方程 $xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$.

解 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x},$$

因此是齐次方程. 令 $u=\frac{y}{x}$，则

$$y = xu,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

于是原方程化为

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\frac{1}{u}+u,$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}.$$

分离变量并积分得

$$u^2=2\ln|x|+2C(C\text{ 为任意常数}),$$

再用$\frac{y}{x}$代替 u，便得原方程的通解为

$$y^2=2x^2\ln|x|+2Cx^2(C\text{ 为任意常数}).$$

二、一阶线性微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{1}$$

的微分方程叫做**一阶线性微分方程**，其中 $P(x)$，$Q(x)$都是自变量 x 的已知函数. 所谓“线性”指的是(1)式中的未知函数 y 及其导数 y'都是一次式.

(1)当 $Q(x)\equiv 0$，(1)式变为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0, \tag{2}$$

叫做**一阶线性齐次微分方程**.

方程是可分离变量的微分方程，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x,$$

积分得

$$\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+C_1,$$

即

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}(C=\pm\mathrm{e}^{C_1}). \tag{3}$$

(3)式为一阶线性齐次微分方程(2)式的通解，其中 $p(x)$的积分$\int p(x)\mathrm{d}x$只取一个原函数.

(2)若 $Q(x)\neq 0$，方程(1)式叫做**一阶线性非齐次微分方程**. 因为一阶线性齐次方程是一阶线性非齐次方程的特殊情况，所以可以设想把一阶线性齐次方程的通解中的常数 C 换成函数 $C(x)$，即 $y=C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ 作为一阶线性非齐次方程的通解.

下面就假定 $y=C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ 是一阶线性非齐次方程的通解，$C(x)$ 是待定函数.

把假定解代入方程得

$$\left(C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\right)'+P(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x),$$

整理得

$$C'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x},$$

积分得

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx+C,$$

把 $C(x)$ 代入假定解中，即得一阶非齐次线性方程的通解

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right), \tag{4}$$

（4）式中 $p(x)$ 的积分 $\int p(x)dx$ 只取一个原函数.

该方法称为**常数变易法**. 由于该通解作为公式不易记忆，因此不背公式，根据推理过程，即利用常数变易法来求解一阶线性非齐次微分方程.

例 6 求微分方程 $y'+y=e^{-x}$ 的通解.

解 **方法一** 常数变易法

先求齐次方程 $y'+y=0$ 的通解，分离变量得

$$\frac{dy}{y}=-dx,$$

两端积分得

$$\ln y=-x+C_1,$$

即

$$y=e^{-x+C_1}=e^{C_1}e^{-x}=Ce^{-x}.$$

再设 $y=C(x)e^{-x}$ 为原方程的解，代入原方程得

$$(C(x)e^{-x})'+C(x)e^{-x}=e^{-x},$$

$$C'(x)e^{-x}-C(x)e^{-x}+C(x)e^{-x}=e^{-x},$$

即

$$C'(x)=1.$$

积分得

$$C(x)=x+C,$$

故所求方程的通解为

$$y=e^{-x}(x+C).$$

方法二 直接利用公式 $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$ 求解 .

因为 $P(x)=1$，$Q(x)=e^{-x}$，所以通解为

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int dx}\left(\int e^{-x}e^{\int dx}dx+C\right)\\&=e^{-x}\left(\int e^{-x}\,e^{x}dx+C\right)\\&=e^{-x}(x+C).\end{aligned}$$

例 7 求微分方程 $\frac{dy}{dx}-y\cot x=2x\sin x$ 的通解.

解 **方法一** 常数变易法

先求齐次方程 $\frac{dy}{dx}-y\cot x=0$ 的通解，分离变量得

$$\frac{dy}{y}=\cot x dx,$$

两端积分得

$$\int\frac{dy}{y}=\int\cot x dx,$$

$$\ln y=\ln\sin x+\ln C,$$

即
$$y=C\sin x.$$

再设 $y=C(x)\sin x$ 为原方程的解，
代入原方程得

$$C'(x)\sin x+C(x)\cos x-C(x)\cos x=2x\sin x,$$

整理得
$$C'(x)=2x,\text{即 } C(x)=x^2+C,$$

故所求方程的通解为

$$y=(x^2+C)\sin x.$$

方法二　直接利用公式 $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$ 求解.

将已知
$$p(x)=-\cot x,Q(x)=2x\sin x,$$

代入公式得
$$\begin{aligned}y&=\left(\int 2x\sin x e^{-\int\cot x dx}\,dx+C\right)e^{\int\cot x dx}\\&=\left(\int 2x\sin x e^{-\ln\sin x}\,dx+C\right)e^{\ln\sin x}\\&=\left(\int 2x\sin x\frac{1}{\sin x}\,dx+C\right)\sin x\\&=(x^2+C)\sin x.\end{aligned}$$

例 8　求一曲线方程，此曲线通过原点，并且它在点(x,y)处的切线斜率等于 $2x-y$.

解　根据导数的几何意义，有

$$y'=2x-y,\text{且 } y|_{x=0}=0.$$

此方程为一阶线性非齐次方程，因 $P(x)=1,Q(x)=2x$，所以通解为

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int dx}\left(\int 2xe^{\int dx}dx+C\right)=e^{-x}\left(2\int xe^x dx+C\right)\\&=e^{-x}\left(2\int xde^x+C\right)=e^{-x}\left(2xe^x-2\int e^x\,dx+C\right)\\&=e^{-x}(2xe^x-2e^x+C)=2x-2+Ce^{-x}.\end{aligned}$$

将初始条件 $y|_{x=0}=0$ 代入上式，得

$$C=2.$$

所以所求曲线方程为

$$y=2x-2+2e^{-x}.$$

习题 6－2

1. 求下列微分方程的通解.

(1)$xy'-y\ln y=0$；　(2)$\sqrt{1-x^2}dy+\sqrt{1-y^2}dx=0$；

(3)$\frac{dy}{dx}=10^{x+y}$；　(4)$(x^2+y^2)dx-xydy=0$；

(5)$x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{y}{x}$；　(6)$y'+y=e^x$；

(7)$y'+\frac{1}{x}y=x+3$；　(8)$y'+y\tan x=\sin 2x$.

2. 求下列微分方程满足初始条件的特解.

(1) $y'\sin x-y\ln y=0, y|_{x=\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}$;

(2) $y'=\mathrm{e}^{2x-y}, y|_{x=0}=0$;

(3) $y'-y\tan x=\sec x, y|_{x=0}=0$;

(4) $y'-\frac{1}{1-x^2}y=1+x, y|_{x=0}=1$.

3. 求下列一阶微分方程的通解.

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\mathrm{e}^{-x}$;

(2) $xy'+y=x^2+3x+2$;

(3) $y'+y\tan x=\sin 2x$;

(4) $(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$;

(5) $y\ln y\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$;

(6) $(y^2-6x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0$.

4. 一曲线通过点(3,10)，其在任意点处的切线斜率等于该点横坐标的平方，求此曲线方程.

第三节　高阶微分方程

前一节介绍了求解一阶微分方程的方法，本节将介绍高阶微分方程的类型以及求解高阶微分方程的方法.

一、可降阶的高阶微分方程

类型：$y^{(n)}=f(x)$型.

特点：方程右端是仅含 x 的函数.

求法：将原方程两边 n 次积分即可求得通解.

例 1　求微分方程 $y''=\mathrm{e}^{2x}$的通解.

解　对原方程两端积分一次，得

$$y'=\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C_1.$$

再积分一次，即可得原微分方程的通解为

$$y=\int\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C_1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+C_1x+C_2.$$

例 2　求微分方程 $y'''=x^3+\frac{1}{x^3}$的通解.

解　对原方程两端积分一次，得

$$y''=\int\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}-\frac{x^{-2}}{2}+C_1,$$

再积分一次，得

$$y'=\int\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+C_1\right)\mathrm{d}x=\frac{x^5}{20}+\frac{x^{-1}}{2}+C_1x+C_2,$$

再积分一次，即可得原微分方程的通解为

$$y=\int\left(\frac{x^5}{20}+\frac{x^{-1}}{2}+C_1\right)\mathrm{d}x=\frac{x^6}{120}+\frac{\ln|x|}{2}+\frac{C_1x}{2}+C_2x+C_3.$$